La Educación Matemática, resolución de problemas, y el empleo de herramientas computacionales[1]

Luz Manuel Santos Trigo
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, IPN.
México
msantos@cinvestav.mx

Resumen

Las propuestas recientes del currículum matemático sugieren que los estudiantes utilicen herramientas computacionales en sus experiencias de aprendizaje. Sin embargo, ante el notable desarrollo de la tecnología y el reconocimiento de que distintos instrumentos pueden ofrecer diferentes caminos y oportunidades para los estudiantes en los procesos de comprender y resolver problemas matemáticos, se hace necesario investigar el potencial que ofrecen algunas de esas herramientas en la construcción del conocimiento de los estudiantes. ¿Qué tipo de representaciones y formas de razonamiento muestran los estudiantes cuando emplean herramientas computacionales en el estudio de las matemáticas? ¿Cómo se caracterizan los procesos que exhiben los estudiantes al transformar artefactos como Excel, el software dinámico o la calculadora simbólica en herramientas de aprendizaje y de resolución de problemas? Estas preguntas orientan la discusión sobre la relevancia de utilizar distintas herramientas computacionales y proporcionan información relevante sobre las transformaciones curriculares y enfoques de instrucción que el empleo de tales herramientas demanda.

Palabras clave

Educación Matemática, resolución de problemas matemáticos, herramientas computacionales.

Abstract

Recent curriculum proposals recognize the importance for students to use diverse computational tools; however different tools may offer distinct opportunities for students to represent and solve mathematical problems. Thus, it is important to investigate not only the types of tools that help students construct mathematical knowledge; but also to document

[1] Trabajo presentado en la *XII Conferencia Interamericana de Educación Matemática*, celebrada en Querétaro, México, en julio de 2007.

Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática. 2011. Año 6. Número 8. pp 35-54. Costa Rica

the type of reasoning that students develop as a result of using those tools. What types of representations and ways of reasoning do teachers and students show when they incorporate the systematic use of computational tools in problem solving activities? This question is used to organize and discuss elements of a framework to address issues related to the use of those tools in instructional practices.

Key words

Mathematics Education, Mathematical Problem Solving, Computational tools.

1. Introducción

¿Qué conocimiento matemático se debe estudiar en el nivel preuniversitario? ¿Qué procesos del pensamiento matemático[2] deben desarrollar los estudiantes en ese nivel? ¿Qué significa pensar matemáticamente? ¿Cómo organizar o estructurar una propuesta curricular? ¿Qué escenarios de instrucción favorecen o promueven la construcción del conocimiento matemático de los estudiantes? ¿Cuál es el papel del uso de distintas herramientas computacionales en la comprensión y resolución de problemas? ¿Qué significa que los estudiantes aprendan o construyan el conocimiento matemático? Estas son algunas preguntas que han guiado el desarrollo de la educación matemática en los últimos veinte años y han inspirado la formulación de programas de investigación sobre aspectos que involucran el desarrollo de marcos conceptuales que caractericen los procesos de aprendizaje de los estudiantes, la resolución de problemas, el uso de la tecnología y las propuestas curriculares (Schoenfeld, 1985; Santos, 2007; Lehrer & Chazan, 1998; Kelly & Lesh, 2001; English, 2002). Entre las reflexiones importantes alrededor de los temas de investigación en la educación matemática se destaca el reconocimiento deque aprender matemáticas va más allá de que el estudiante domine un conjunto de reglas, algoritmos, fórmulas o procedimientos para resolver listas de problemas rutinarios. Se resalta que durante el proceso de aprender matemáticas, los estudiantes necesitan desarrollar una disposición y forma de pensar consistente con la práctica o el quehacer de la disciplina. En este contexto, los estudiantes constantemente buscan y examinan diferentes tipos de relaciones, plantean conjeturas, utilizan distintos sistemas de representación, establecen conexiones, emplean varios argumentos y comunican sus resultados (Santos, 2007). Con esta visión, las reformas recientes sobre la educación preuniversitaria sugieren estructurar el currículum alrededor de:

[2] El Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas (NCTM, por sus siglas en inglés) identifica a la resolución de problemas, el razonamiento y la prueba, la comunicación, las conexiones y las representaciones como los procesos inherentes del quehacer de las matemáticas.

(i) líneas de contenidos que comprenden el desarrollo del pensamiento numérico, algebraico, geométrico, y aspectos relacionados con la actividad de medir, ordenar y el manejo de información (estadística); y

(ii) procesos inherentes del quehacer de la disciplina donde se destaca la resolución de problemas, el razonamiento matemático, las conexiones matemáticas, el empleo de representaciones y la comunicación de resultados (NCTM, 2000). Además, se reconoce que un factor importante en el crecimiento y evolución de las matemáticas y el aprendizaje es el poder que ofrece el empleo de distintas herramientas tecnológicas en la resolución de problemas y comprensión de las ideas matemáticas.

De hecho, el NCTM (2000) identifica el uso de la tecnología como un elemento esencial que debe sustentar las propuestas curriculares:

> Las computadoras y las calculadoras cambian lo que los estudiantes pueden hacer con las representaciones convencionales y expanden el conjunto de representaciones con las que pueden trabajar. Por ejemplo, los estudiantes pueden mover, invertir, reducir, visualizar relaciones a través de programas de utilidades o software dinámico. … pueden manipular expresiones, e investigar conjuntos complejos de datos usando hojas de cálculo. Cuando los estudiantes aprenden a utilizar estas nuevas herramientas versátiles, pueden también analizar las formas en que algunas representaciones que se realizan empleando la tecnología difieren de las representaciones convencionales (p.68-69).

Estos componentes apuntan a una visión de las matemáticas que promueve el estudio de diversas líneas del pensamiento matemático desde la educación básica y rompe con el esquema de proponer un arreglo por asignaturas (aritmética, álgebra, geometría, trigonometría, cálculo, etc.). Es decir, los estudiantes constantemente reflexionan sobre conceptos e ideas fundamentales que involucran variación, medición, estimación, ponderación, comparación, búsqueda de patrones, lugares geométricos, y comunicación de resultados durante todo el periodo de la enseñanza preuniversitaria. Así, por ejemplo las ideas de variación o cambio que aparecen en las experiencias de los estudiantes a nivel primaria, eventualmente se transforman en las ideas poderosas del cálculo (Camacho & Santos, 2004a). La actividad de identificar y describir el camino o huella que dejan partes de una figura al mover ciertos componentes dentro de una configuración dinámica llega a ser una estrategia importante para distinguir y analizar propiedades de lugares geométricos que aparecen en el estudio de la geometría analítica.

En esta perspectiva destaca la necesidad de conectar las líneas de contenidos con los procesos del quehacer de la disciplina y resulta importante investigar el papel e impacto del uso de herramientas tecnológicas en el aprendizaje de los estudiantes.

Es importante reconocer que existen varios tipos de artefactos tecnológicos que el estudiante puede utilizar durante sus experiencias de aprendizaje. Cada artefacto puede ofrecer distintas oportunidades a los estudiantes para representar, identificar, examinar y comunicar resultados matemáticos (Santos, 2007). Por ejemplo:

(i) El empleo de las hojas de cálculo "Excel" puede resultar una herramienta poderosa para que los estudiantes representen información en forma tabular y gráfica que permite investigar patrones de parámetros asociados con un fenómeno o situación. Además, es una herramienta eficiente para realizar cálculos u operaciones relacionadas con patrones de comportamiento de problemas o situaciones particulares. Los modelos de explicación que los estudiantes pueden desarrollar a partir del uso de esta herramientas se basan en representaciones discretas del fenómeno. Un ambiente donde se promueva el empleo de calculadoras simbólicas puede ayudar a los estudiantes a explorar el comportamiento de expresiones generales a partir de la consideración y análisis de casos particulares o encontrar una expresión que describa el patrón o comportamiento de una relación numérica o algebraica. Además, con la ayuda de la calculadora los estudiantes pueden también analizar la conexión entre las representaciones algebraicas de ciertos fenómenos y sus gráficas correspondientes (Moreno & Santos, 2007). Aquí, el uso de la herramienta propicia que los estudiantes construyan modelos de explicación basados en representaciones continuas de la situación o problema.

(ii) El software dinámico resulta una herramienta útil en la construcción de representaciones "exactas" de entidades geométricas (puntos, segmentos, rectas, círculos, polígonos, medianas, etc.) y permiten visualizar de manera precisa el comportamiento de partes de cierta configuración o representación del problema (Santos, Espinosa, 2010). Aquí los estudiantes tienen la oportunidad de mover elementos de estas configuraciones y observar cambios o invariantes en el proceso de análisis del problema. La observación de invariantes en una representación resulta fundamental en el desarrollo de conjeturas y en el proceso de argumentación y comunicación de esas conjeturas por parte del estudiante. En particular, el uso de software dinámico como Cabri Geometry, Sketchpad o Geogebra, ofrece una herramienta poderosa para examinar relaciones geométricas desde diversos ángulos (Goldenberg & Cuoco,1998). Por ejemplo, en general, resulta difícil imaginar el lugar geométrico que describe un punto una línea u otro objeto geométrico cuando se mueve dentro de una configuración.

El uso de este tipo de software permite fácilmente trazar el camino que deja parte de la configuración (punto, segmento, triangulo, etc.) cuando se mueve con respecto a otros elementos dentro de esa misma configuración y cómo consecuencia ofrece la oportunidad al estudiante de analizar y describir tal lugar geométrico en términos de propiedades. Además, los estudiantes pueden realizar variaciones precisas e instantáneas de sus propias representaciones visuales que se producen bajo el uso de este tipo de software. Esto les permite realizar constantes exploraciones y probar sus ideas matemáticas y conjeturas en una forma visual, eficiente y dinámica. Arcavi & Hadas (2000) afirman que:

> Los ambientes dinámicos no sólo permite a los estudiantes construir figuras con ciertas propiedades y visualizarlas, sino que también les permite transformar esas construcciones en tiempo real. Este dinamismo puede contribuir en la formación de hábitos para transformar (mentalmente o por medio de una herramienta) una instancia particular, para estudiar variaciones, invariantes visuales, y posiblemente proveer bases intuitivas para justificaciones formales de conjeturas y proposiciones (pp. 26).

Así, el empleo del software puede funcionar como una herramienta de gran utilidad para que los estudiantes participen en procesos de búsqueda y formulación de conjeturas o relaciones y argumentos o justificaciones matemáticas (Santos & Espinosa, 2010). Sin embargo, ante la variedad de artefactos disponibles es necesario identificar no sólo las ventajas que le puedan brindar al estudiante durante la comprensión de las ideas matemáticas y la resolución de problemas, sino también caracterizar las representaciones, estrategias y formas de razonamiento que exhiban los estudiantes como resultado de usar tales herramientas en sus experiencias de aprendizaje.

2. Un Ejemplo sobre el Empleo del Software Dinámico

Se presenta un problema donde se muestra que el uso de la herramienta puede ayudar a los estudiantes a construir una representación que permita identificar y explorar propiedades matemáticas y buscar extensiones y formas de sustentarlas. Se destacan fases importantes asociadas con el proceso de resolución.

El Problema: *Sea Q un punto de la función $f(x) = \frac{1}{x}$ (en el primer cuadrante). Una recta tangente a la gráfica que pasa por el punto Q genera (con los ejes) un triángulo rectángulo. ¿Cuáles deben ser las coordenadas del punto Q para que la longitud de la hipotenusa sea máxima o mínima?* (Arcavi, 2005, p.44).

Representación y Comprensión del problema. ¿Cómo representar la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ gráficamente? ¿Cuál es el dominio de $f(x)$? ¿Cómo representar y relacionar los elementos del dominio con los valores de la función? Este tipo de preguntas resultan relevantes para que los estudiantes puedan construir una representación gráfica o geométrica del problema. Con el uso del software dinámico los estudiantes pueden situar sobre el sistema Cartesiano el punto P sobre el eje X y encontrar el valor correspondiente $\dfrac{1}{x}$ sobre el eje Y para determinar el punto Q (figura 1).

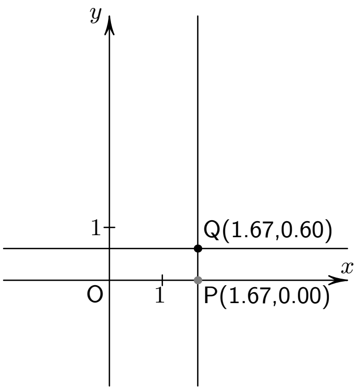

Figura 1: Representación del punto $Q(x, 1/x)$ sobre el plano.

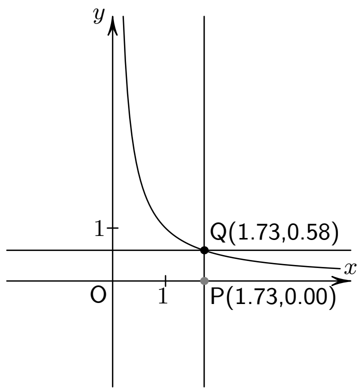

Figura 2: El lugar geométrico de Q cuando P se mueve sobre el eje X.

En (Camacho y Santos 2009) se muestra que un aspecto importante en la representación gráfica de objetos matemáticos y relaciones entre ellos es el uso de cierta notación que permita distinguir y comunicar las propiedades y comportamientos de esos objetos. Si nos planteamos cuál es el lugar geométrico del punto Q cuando el punto P se mueve a lo largo del eje X, el software permite encontrar el camino que deja el punto Q (Figura 2).

Búsqueda de relaciones. Construyamos ahora la recta PR, la cual forma con los ejes un triángulo rectángulo. Se observa que al mover el punto P sobre el eje X, la inclinación de la recta PR con respecto al eje X cambia (Figura 3). ¿Cómo se puede medir esa inclinación? ¿Cómo se determina la pendiente de la recta PR? ¿Existe alguna relación entre la recta PR y la recta tangente a $f(x)$ en el punto Q? ¿Nos ayudará conocer el significado geométrico del concepto de derivada puntual, es decir, interpretar la derivada de $f(x)$ en el punto Q?

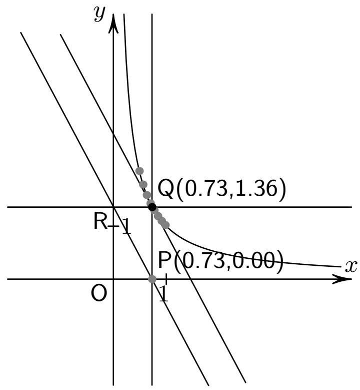

Figura 3: Trazo de la línea tangente a $f(x)$ como la paralela a PR que pasa por Q.

Se observa que para cualquier posición de $P(x, 0)$, se tendrá que las coordenadas del punto R serán $(0, 1/x)$ y la pendiente de la recta PR será $-1/x^2$. Esta pendiente corresponde a la de la recta tangente a $f(x) = 1/x$ en el punto $Q(x, 1/x)$. Esto es porque $f'(x) = -1/x^2$ (la interpretación geométrica de la derivada). Así, para trazar la recta tangente a $f(x)$ en el punto Q, es suficiente trazar la recta paralela a la recta PR que pase por el punto Q (Figura 3).

Justificando Relaciones. Las representaciones dinámicas del problema permiten identificar invariantes o relaciones al mover objetos dentro de la representación. ¿Existe alguna relación entre los puntos O, R, y S? (Figura 4).

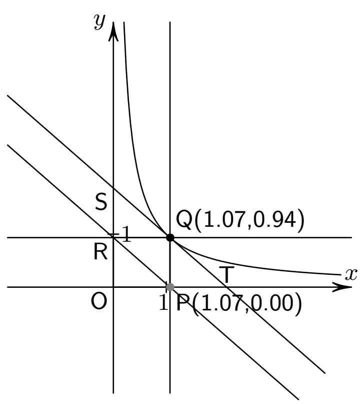

Figura 4: ¿Qué relación existe entre los puntos O, R, y S

Aplicando criterios de congruencia de triángulos se observa que los triángulos RQS, OPR y PTQ son congruentes y por lo tanto R y P son puntos medios de los segmentos SO y OT respectivamente. Con esta información se tiene que $ST = 2RP$, que se sustenta aplicando el teorema “un triángulo STO, si

R y P son puntos medios de los lados SO y TO respectivamente, entonces la recta PR que pasa por los puntos medios es paralela a la recta ST y se cumple que la longitud del segmento RP es la mitad de la longitud del lado del triángulo ST".

Examinando las variaciones gráficamente. Se observa que cuando el punto P se mueve sobre el eje X, la longitud del segmento PR cambia. ¿Cómo varía la longitud de la diagonal PR del rectángulo $OPQR$? ¿En que posición alcanza un valor mínimo? Con la ayuda del software, se puede representar la relación entre la posición del punto P y el valor correspondiente de la longitud de la diagonal (Figura 5).

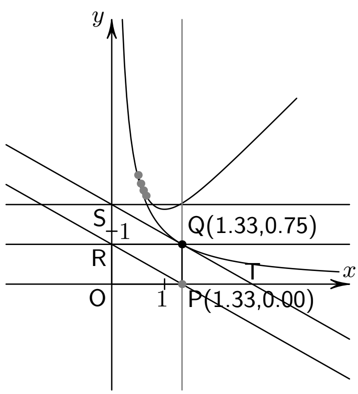

Figura 5: Representación gráfica de la variación de PR cuando P se mueve a lo largo del eje X.

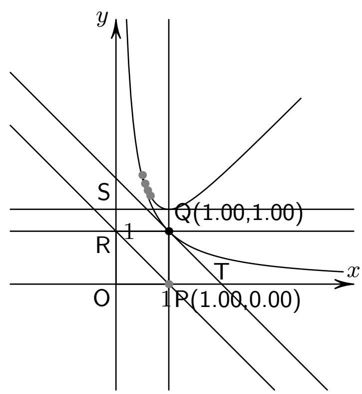

Figura 6: ¿Cuándo la longitud del segmento PR es mínima?

Se observa además que, al mover el punto P sobre el eje X en una posición el rectángulo $OPQR$, se convierte en cuadrado y es en esa posición donde la longitud de la diagonal es mínima. Es decir, cuando Q tiene coordenadas $Q(1, 1)$ la longitud de la diagonal es mínima (Figura 6).

Conexiones. Se observa también, que para cualquier posición del punto Q, el área del rectángulo $OPQR$ es siempre una unidad, es decir el área del rectángulo que se forma para cualquier posición de Q es constante. Algebraicamente se tiene que las dimensiones del rectángulo se pueden expresar como x y $1/x$ y por lo tanto el área del rectángulo $OPQR$ será $x(1/x) = 1$. También se cumplirá que el área del rectángulo $OTUS$ siempre será 4 unidades cuadradas para cualquier posición del punto Q (Figura 7).

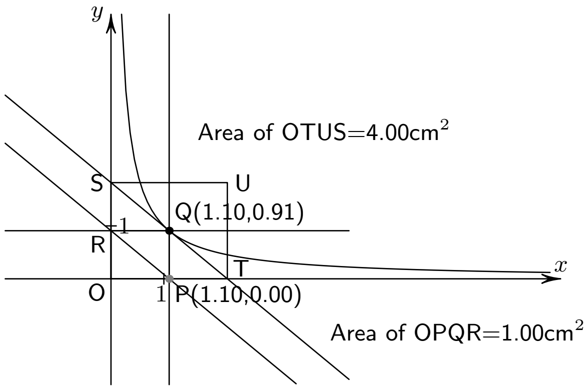

Figura 7: Área del cuadrado $OTUS$.

La relación entre las áreas de las figuras que se forman al trazar la recta tangente que pasa por un punto Q de la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ se puede expresar de la forma siguiente:

Si Q es un punto de la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ en el primer cuadrante, la recta tangente a la función que pasa por Q corta a los ejes y genera un triangulo rectángulo. Para cada posición de Q el triangulo rectángulo generado tiene un área de dos unidades cuadradas.

¿Qué ocurre con el área de esos triángulos cuando se considera la función $f(x) = \dfrac{n}{x}$ para $n = 2, 3, \ldots$?

Utilizando el software de geometría dinámica se puede explorar algunos casos particulares y observar el comportamiento del área de los triángulos que se formas. La figura 8 muestra el valor del área que se forma en el primer cuadrante cuando la función es $f(x) = \dfrac{3}{x}$ y al analizar otros casos (lo que se realiza fácilmente con el uso del software) es inmediato conjeturar que

El área del triangulo que se forma tiene el doble del área del rectángulo que se forma al trazar la rectas perpendiculares desde el punto Q a ambos ejes.

Esta conjetura puede sustentarse al observar que las coordenadas del punto Q en $f(x) = \dfrac{n}{x}$ son $Q(x, n/x)$ y que el área correspondiente del rectángulo que se forma al trazar rectas perpendiculares desde Q es $x(n/x) = n$. Otra vez, el empleo del software genera información valiosa para analizar el caso general.

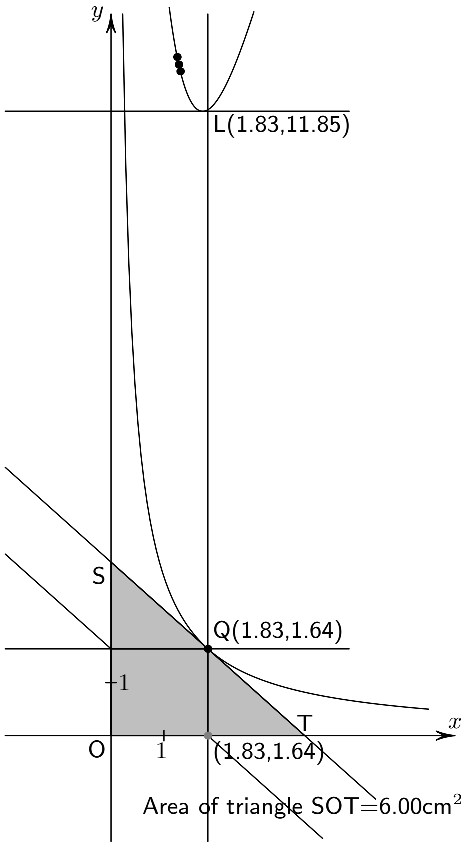

Figura 8: ¿Cuál es el área del triangulo OTS cuando $f(x) = 3/x$?

Hemos visto a lo largo del desarrollo de esta segunda actividad, que en el camino de representar el problema en forma dinámica, utilizando el software, aparecen resultados importantes: la relación entre la pendiente de la recta tangente a la hipérbola $y = 1/x$ y la pendiente de la recta PR. Con esta información, el trazo de la recta tangente a la función en Q es inmediato. Se constata además que la representación del problema ofrece la oportunidad de buscar y explorar una serie de relaciones matemáticas.

3. Sobre los Marcos Conceptuales y las Herramientas Computacionales

Un tema crucial en la educación matemática es el desarrollo o construcción de marcos conceptuales que permitan documentar y explicar cómo y cuándo los estudiantes construyen conocimiento matemático nuevo (Santos & Barrera, 2007). En particular las preguntas relevantes que orientan la discusión alrededor de los marcos conceptuales incluyen ¿Cómo promover un ambiente de aprendizaje en el salón de clases donde los estudiantes tengan oportunidad de revelar sus ideas y participar en el proceso de construcción del conocimiento matemático? ¿Cómo caracterizar y explicar el desarrollo del aprendizaje de los estudiantes? ¿Qué significa pensar matemáticamente? ¿Qué es la resolución de problemas y cómo se relaciona con el aprendizaje de los estudiantes? En este contexto, se identifican los temas y resultados importantes que han orientado el desarrollo de la investigación en el área de la resolución de problemas como propuesta para que los estudiantes aprendan matemáticas. En los últimos 30 años la resolución de problemas ha sido reconocida como una actividad fundamental en el aprendizaje de los estudiantes. Numerosos proyectos de investigación en esta área han enfocado la atención sobre temas donde se destacan:

(I) El quehacer matemático y su relación con el aprendizaje. Una meta importante en la instrucción matemática es crear un ambiente de aprendizaje donde los estudiantes tengan oportunidad de participar activamente en el proceso de construcción del conocimiento matemático. Así, caracterizar lo que significa aprender la disciplina es un aspecto fundamental que conlleva necesariamente a reflexionar sobre las ideas y conceptos fundamentales de la disciplina y el desarrollo del quehacer matemático. Por ejemplo, el trabajo de Schoenfeld (1985) documenta las cualidades importantes del quehacer de la disciplina y su relación con el aprendizaje de los estudiantes. En particular reconoce que para que los estudiantes vean a las matemáticas como una actividad con sentido, éstos necesitan aprenderla en un salón de clase que refleje un *microcosmos* de la cultura matemática. Es decir, que se promuevan los valores propios de la disciplina en las actividades de aprendizaje del salón de clases. Romberg y Kaput (1999) en la misma dirección plantean que sin importar el contenido específico, el propósito de enseñar matemáticas puede ser descrito, en términos prácticos, como enseñarles a los estudiantes a emplear las matemáticas, a construir y comunicar ideas, usarlas como una herramienta analítica poderosa para resolver problemas y apreciar y describir los patrones que se encuentran en diversos contextos. Devlin (1994) identifica a las matemáticas como la ciencia de los patrones. "Es una forma de ver al mundo físico, biológico y sociológico que habitamos y el mundo de nuestras mentes y pensamientos" (p. 6). Así, el poder matemático consiste no solamente en detectar, construir, inventar, entender, o manipular patrones; sino también en ser capaz de comunicar esos patrones a otros. En esta dirección, el quehacer matemático se puede caracterizar como la actividad de encontrar y examinar patrones asociados o productos de esos mundos. Estos patrones pueden ser numéricos, entre figuras o formas, patrones de movimiento y en general patrones de comportamiento de relaciones. Además, los patrones pueden ser reales o imaginarios, visuales o mentales, dinámicos o estáticos, cualitativos o cuantitativos, de interés utilitario o de carácter recreativo. El referente de estudio de estos patrones puede ser el mundo que nos rodea o una reflexión pura de la mente del individuo. Santos (2002a; 2004c) muestra que el uso de tecnología resulta una herramienta útil en la búsqueda de distintos tipos de patrones.

(II) Las creencias de los maestros y alumnos acerca de las matemáticas y en particular acerca de la resolución de problemas. Un aspecto notable en el aprendizaje de los estudiantes es que tengan oportunidad de revelar sus ideas y formas de razonamiento al interactuar con distintas situaciones o problemas. Es decir, el conocimiento previo que traen los estudiantes al escenario de instrucción donde se promueve al resolución de problemas desempeña un papel crucial en términos de lo que se valora en el proceso de resolución y entendimiento de los problemas. Es común que los estudiantes crean que poseen recursos limitados que no les permite pensar distintas formas de solución o proponer preguntas relevantes que les permita investigar conexiones entre distintas representaciones (Schoenfeld, 1998). Es aquí donde el ambiente de instrucción debe ofrecer oportunidades para que los estudiantes mismos reconozcan que es posible que participen activamente no sólo en los procesos de reflexión acerca del uso de distintas representaciones y métodos de solución, sino que también en la actividad misma de proponer problemas (Camacho, et al, 2010). En esta dirección los estudiantes deben reconocer que las matemáticas son más que estudiar un conjunto de reglas, definiciones y procedimientos que necesitan aplicar en la solución de algunos problemas. Esta incluye aceptar que son una disciplina donde es fundamental plantear conjeturas, utilizar una variedad de representaciones, buscar diferentes métodos de solución, plantear preguntas y emplear distintos argumentos para comunicar soluciones o resultados (Santos, 2007). En este sentido, las creencias tanto de los profesores como de los alumnos deben reflejar los aspectos que se muestran en el quehacer de la disciplina (Santos, 2004).

(III) El desarrollo de marcos conceptuales que den cuenta de las competencias de los estudiantes en la resolución de problema. Lester (2005) argumenta que un marco teórico es una estructura básica de ideas (abstracciones y relaciones) que sirven como base [para justificar y explicar] un fenómeno a investigar. Estas abstracciones y las (supuestas) interrelaciones entre ellas representan [y ayudan a explicar] los aspectos relevantes del fenómeno [de cómo es estudiado] y determinado dentro de la perspectiva de investigación que ha sido adoptada (p. 458). ¿Qué aspectos fundamentales dan cuenta del quehacer de la disciplina?¿Cuáles son las dimensiones del pensamiento matemático? Estas preguntas han sido parte de la agenda de investigación en la resolución de problemas. En particular, el programa de investigación desarrollado por Alan Schoenfeld durante la época de los noventa aporta información valiosa acerca de lo que caracteriza el proceso de resolver problemas. Identifica cuatro categorías importantes que caracterizan el proceso de aprender matemáticas: (i) los recursos básicos que comprende el entendimiento de definiciones, hechos, reglas y procedimientos junto con las distintas formas de accederlos; (ii) las estrategias heurísticas que incluye el empleo de diagramas, el análisis de casos particulares, el relajamiento de condiciones, y el planteamiento de submetas; (iii) las estrategias de monitoreo que permiten al estudiante evaluar y controlar constantemente el proceso de solución de problemas; y (iv) las creencias y en general las concepciones que muestren los estudiantes acerca de las matemáticas y en particular hacia la resolución de problemas.

Es importante mencionar que la abundante literatura incluye la construcción de marcos teóricos que dan cuenta de los aspectos esenciales alrededor de la resolución de problemas y además sugiere algunas ideas para implementar la actividad de resolución de problemas en el salón de clase (Whimbey & Lochhead, 1976; Schoenfeld, 1985, 1998; Curcio, 1987; Silver, 1987; Charles, & Silver, 1988; NCTM, 2000, Santos, 2007, 2001, 2003, 2004; Perkins, 1995; PMENA, 2001, 2002, 2003, 2004). Sin embargo, también es importante reconocer que la mayoría de los trabajos publicados en los últimos 10 años se basan en investigar las competencias de los estudiantes para trabajar problemas o actividades que incluían fundamentalmente el empleo de lápiz y papel. Por ejemplo, en el programa de investigación de Alan Schoenfeld se explora y documenta el trabajo que muestran estudiantes y matemáticos al interactuar con conjuntos de problemas no rutinarios (Schoenfeld,1998). En los procesos de solución de esos problemas no incluye el uso de herramientas tecnológicas. Es decir, los resultados son producto del trabajo de los participantes basado exclusivamente en el uso de lápiz y papel. ¿Qué tipo de transformaciones y ajustes se requieren en los marcos teóricos cuando se incorporan herramientas digitales en el estudio de las matemáticas? Este tipo de preguntas orientan la discusión sobre la importancia de examinar constantemente los principios, métodos y resultados de la investigación en educación matemática. En particular, se reconoce que el empleo de distintas herramientas digitales influye directamente en la forma de desarrollar y comprender las ideas matemáticas. Artigue (2002) afirma que el uso de herramientas computacionales en la práctica matemática ha cambiado no solamente los métodos que se emplean en la disciplina, sino también los temas y problemas que se investigan. De manera similar, el empleo sistemático de este tipo de herramientas ofrece a los estudiantes distintas oportunidades para aprender y reconstruir el conocimiento matemático (Heid, 2002). En esta línea de ideas, resulta importante documentar y analizar los diferentes elementos del razonamiento matemático que desarrollan y exhiben profesores y estudiantes al desarrollar actividades de aprendizaje en escenarios de resolución de problemas que promuevan el uso sistemático de distintas herramientas digitales. Lester (2005) indica que cuando un investigador decide utilizar un marco teórico particular también decide seguir la agenda pragmática de investigación reconocida en esa teoría o marco teórico. Es decir, el investigador acepta y utiliza las convenciones y formas de argumentación y experimentación asociadas con ese marco.

Santos y Barrera (2007) proponen evaluar los principios y métodos asociados con los marcos teóricos a partir de analizar temas alrededor de:

(a) la visión del conocimiento matemático (¿qué significa desarrollar o construir y comprender matemáticas?),
(b) el tipo de problemas que promueven el aprendizaje de la disciplina (¿qué es lo que caracteriza un problema? ¿qué tipo de actividades promueven el aprendizaje?),
(c) las formas de explicar el aprendizaje de los estudiantes (¿cómo se construye o aprende el conocimiento matemático? ¿Cómo generan o producen nuevos conocimientos los estudiantes?),
(d) las prácticas de instrucción que promueven el aprendizaje de los estudiantes (¿qué formas de interacción y desarrollo de actividades fomentan la construcción y comprensión del conocimiento matemático de los estudiantes?) y
(e) las formas de evaluación del conocimiento matemático (¿cómo evaluar las competencias de los estudiantes?

Es decir, se reconoce la importancia de incorporar en la agenda de investigación en educación matemática aspectos o temas directamente relacionados con el análisis de los marcos teóricos relevantes que sustentan distintos programas de investigación. En este contexto, se hace necesario desarrollar formas y herramientas que nos permitan evaluar y contrastar la relevancia y pertinencia en el uso de esos marcos de investigación.

(IV) Sobre el Empleo de Diversas Herramientas Computacionales. El desarrollo notable de herramientas tecnológicas ha generado diversas oportunidades para incorporar su uso en el aprendizaje de las matemáticas. Kaput (1992) en una revisión del impacto del uso de la tecnología en la construcción del conocimiento matemático afirmó que “las limitaciones mayores del uso de la computadora en las siguientes décadas serían probablemente menos debidas a las limitaciones tecnológicas y más a las limitaciones de la imaginación humana y a las restricciones [producidas por] de los viejos hábitos y estructuras sociales” (p. 515). A más de una década, la predicción de Kaput se confirma ya que las reformas recientes de las propuestas curriculares y las formas de instrucción no han incorporado de manera sustantiva los cambios necesarios que reclaman el empleo sistemático de las herramientas computacionales. Se observa por ejemplo que las evaluaciones internacionales del aprovechamiento matemático de los estudiantes no incluyen, en general, evaluar los métodos y estrategias que aparecen al resolver problemas con el empleo de la tecnología (PISA, 2006). El uso de las herramientas implica investigar las formas de razonamiento matemático que se producen durante la comprensión de los conceptos matemáticos y en la resolución de problemas. La existencia de una variedad de herramientas tecnológicas con distintos potenciales para ser utilizadas en la instrucción matemática plantea un reto no sólo a los profesores sino también a los investigadores en educación matemática en términos de ofrecer información sustentada acerca de cómo utilizar esas herramientas en el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes. Es decir, resulta importante conocer el potencial o ventajas reales que puede ofrecer el uso de determinada herramienta en la construcción del conocimiento matemático de los estudiantes.

Zbiek, Heid, Blume & Dick (2007) distinguen dos tipos de actividad matemática donde el empleo de herramientas computacionales juega un papel importante: las actividades técnicas y conceptuales. Las técnicas se refieren a las acciones sobre los objetos matemáticos o sobre sus representaciones como realizar una construcción geométrica, una medición, un cálculo numérico, una manipulación algebraica, resolver una ecuación, recoger datos, ordenarlos, etc. Mientras que una actividad conceptual se refiere a aspectos relacionados con formas de comprender ideas y resolver problemas matemáticos. En ese proceso, es necesario que los estudiantes desarrollen recursos que les permita comunicar y buscar conexiones, estructuras y relaciones matemáticas. Algunos ejemplos incluye encontrar y describir patrones, conjeturar, generalizar, abstraer, conectar representaciones, predecir, probar y refutar. Las dos actividades se complementan ya que ambas demandan una actitud inquisitiva por parte de los estudiantes que los conduzca a lograr una articulación y una justificación de resultados. Es decir, las actividades técnicas que se realizan con el empleo de la tecnología pueden involucrar una combinación de acciones rutinarias orientadas o justificadas a partir de un razonamiento conceptual. Heid (2002) afirma que los resultados de investigaciones que involucran el uso de CAS (Computer Algebra Systems) niegan la afirmación que las habilidades de los estudiantes a realizar procedimientos deben preceder al desarrollo de un entendimiento conceptual de las ideas matemáticas.

> …[Estudios con CAS] han generado evidencias de que antes del desarrollo relacionados con procesos rutinarios, los estudiantes

> pueden aprender a mayor profundidad que en un currículum tradicional que recomienda el desarrollo de procedimiento rutinarios ante de los conceptos (Heid, 2002, p. 98).

Aquí nos interesa ilustrar el papel del uso de algunas herramientas computacionales en la resolución de problemas que se abordan en un primer curso de cálculo. La idea es mostrar las formas de razonamiento que emergen a parir del uso de las herramientas. En particular, se destaca la construcción de modelos dinámicos de los problemas los cuales permiten visualizar y explorar diversas relaciones matemáticas. En este proceso resulta esencial buscar diversas maneras de resolver los problemas y contrastar las ventajas y limitaciones que ofrezcan los distintos acercamientos.

¿Qué tipo de representaciones de los problemas y objetos matemáticos resultan importantes con el uso de herramientas computacionales? ¿cuál es el papel del uso de las herramientas en la exploración de conjeturas o relaciones matemáticas? ¿qué tipo de razonamiento matemático pueden desarrollar los estudiantes cuando utilizan una o varias herramientas computacionales? Estas preguntas señalan los temas relevantes que surgen en escenarios de resolución de problemas que fomenten el uso sistemático de herramientas computacionales. El proceso de solución de los problemas aporta información acerca de las estrategias, los recursos, las representaciones y las formas de explorar y presentar resultados. Los problemas, uno en el dominio del cálculo diferencial y el otro del cálculo integral son ejemplos típicos que se estudian en un curso inicial de cálculo. Con el uso de las herramientas se muestra que durante el proceso de solución a los problemas aparecen representaciones que favorecen la búsqueda y exploración de relaciones matemáticas. Además, el empleo de las herramientas permite visualizar y explorar el significado de esas relaciones.

4. Comentarios Finales

Es sabido que una de las metas más importantes en la instrucción matemática, es la de propiciar un ambiente de aprendizaje donde los estudiantes tengan oportunidad de participar directamente en los procesos de construcción y demostración de relaciones matemáticas. El empleo sistemático de algunas herramientas puede ayudar a los estudiantes a utilizar representaciones de objetos matemáticos que faciliten la búsqueda de relaciones. Para conseguir esto, es necesario que los profesores conozcan el potencial de esas herramientas y sean capaces de identificar diferentes estrategias que les permitan utilizarlas en sus prácticas de enseñanza. Un elemento importante que ayuda a la selección de las herramientas a utilizar en la instrucción, se relaciona con las formas de razonamiento y las estrategias de solución que se surgen en la resolución de problemas con la ayuda de la tecnología. Como consecuencia de lo anterior, es necesario que los profesores reflexionen y exploren el potencial de las herramientas. Para orientar el desarrollo de su práctica profesional, los profesores deben hallar respuestas a cuestiones tales como: ¿cuáles son los aspectos del quehacer matemático que resultan significativos al emplear el software dinámico en la resolución de problemas? ¿qué tipo de representaciones y formas de razonamiento emergen en los procesos de resolución de problemas con el uso del software dinámico? ¿qué relación existe entre los acercamientos o procesos de solución que se realizan con lápiz y papel y aquellos donde se utiliza el software dinámico? En este artículo se ha intentado mostrar el potencial del software dinámico en la solución de dos tipos de problemas o actividades con características esencialmente distintas. Se destaca que el uso del software de geometría dinámica permite construir una representación del problema en términos de las propiedades de los objetos del problema. En el ejemplo se muestra que las facilidades del software permiten representar gráficamente la función como un lugar geométrico para poder así establecer conexiones entre la pendiente de una de las diagonales del rectángulo que se forma al proyectar el punto Q sobre los ejes coordenados y la pendiente de la recta tangente de la función en el punto Q. De esta forma, la representación del problema se analiza en términos de preguntas que eventualmente generan una serie de resultados o relaciones matemáticas. En particular, el estudio de la variación continua de la longitud de la diagonal del rectángulo se presenta desde el punto de vista gráfico, sin hacer uso de recursos algebraicos. Desde esta perspectiva, el empleo de la herramienta no sólo facilita la representación dinámica de los problemas que involucran variación de parámetros, sino que ofrece la oportunidad a los estudiantes de conectar distintos contenidos y buscar nuevas relaciones o resultados (Camacho y Santos, 2004b).

De manera general, se observa que el uso del software dinámico puede resultar una herramienta poderosa para los estudiantes en términos de generar representaciones dinámicas del problema que les permitan identificar relaciones matemáticas. Se destaca que durante la construcción y análisis de las representaciones dinámicas, los estudiantes deben pensar el problema en términos de preguntas que los conduce al planteamiento de conjeturas o relaciones. Este ciclo de visualizar, reconocer y argumentar son procesos fundamentales del quehacer de la disciplina que los estudiantes pueden practicar sistemáticamente con la ayuda de este tipo de herramientas.

Finalmente se resalta la importancia de presentar distintos argumentos matemáticos que le den sustento a las conjeturas y en algunos casos generar nuevo conocimiento matemático.

Referencias

Arcavi, A. (2005). Developing and using symbol sense in mathematics. *For the learning of mathematics*, 25, 2, pp.42-47.

Arcavi, Abraham., & Hadas, Nurit. (2000). Computer mediated learning: An example of an approach. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 5, pp.25-45.

Camacho-Machín, M., Depool-Rivero, R. & Santos-Trigo, M. Students' use of derive software in comprehending and making sense of definite integral and area concepts. *Research in Collegiate Mathematics Education* (2010). American Mathematical Society, Vol. 16: 29-50.

Camacho, M. & Santos, L.M. (2004a). El estudio de fenómenos de variación haciendo uso de herramientas tecnológicas. *Revista UNO*, Vol. 37, pp. 105-122, España.

Camacho, M. & Santos, M. (2004). La relevancia de los problemas en el aprendizaje de las matemáticas a través de la resolución de problemas. *NÚMEROS*, vol. 58, pp. 45-60, España.

Camacho, M., Depool. R., & Santos, M. (2004). Promoting students' comprehension of definite integral and area concepts through the use of derive software. *Proceedings of the XXVI Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, pp. 447-454. University of Toronto, Canada.

Charles, R. & Silver, E. (1988) (Eds.). *The teaching and assessing of mathematical problem solving*. Reston VA: The National Council of Teachers of Mathematics.

Curcio, F. (1987) (Ed.), *Teaching and learning: A Problem-solving focus*. Reston VA: The National Council of Teachers of Mathematics.

Devlin, K. (1994). *Mathematics. The science of patterns*. NY:Scientific American Library.

English, L. (Ed.) (2002). Handbook of international research in mathematics education. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Goldenberg, P. & Cuoco, A. (1998). What is dynamic geometry? In R.Leher & D. Chazan (Eds.), *Designing learning environments for developing understanding of geometry and space*, pp. 351- 367. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Kaput, J. (1992). Technology and mathematics education. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, pp. 515-556. NY: Macmillan.

PISA (Programme for International Student Assessment) (2006). Assessing Scientific, Reading and Mathematical Literacy. *A Framework for PISA 2006*. Paris: Organization for Economic Co operation and Development.

Kelly, A., E. & Lesh, R. (Eds.), *Handbook of research design in mathematics education*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Lehrer, R. & Chazan, D. (Eds.) (1998). Designing learning environments for developing understanding of geometry and space. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Lester, F. K. (2005). On the theoretical, conceptual, and philosophical foundation for research in mathematics education. *ZDM* 2005 Vol.37, 6, p.458.

Moreno, L. & Santos, M. Democratic access and use of powerful mathematics in an emerging country. In L. English (Ed.). *Handbook of International Research in Mathematics Education.* NY: Routledge, Taylor & Francis Group. Segunda Edición, (2008), ISBN 13: 978-0-8058-5875-4: 319- 351.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston VA: The Council.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston VA: The Council.

Perkins, D. (1995). Outsmarting IQ. *The emerging science of learnable intelligence*. N.Y:The Free Press.

PMENA, 2001, 2002, 2003, 2004. *Proceedings of the 23, 24, 25. 26 annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Columbus OH: ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education.

Polya, G. 1945. How to Solve it. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Romberg, T.A., & Kaput, J. (1999). Mathematics worth teaching, mathematics worth understanding. En E. Fennema & T. A. Romberg (Eds.), Mathematics clasroom that promote understanding (pp. 3-17). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Santos T. L.M (2007). *Resolución de problemas matemáticos. Fundamentos cognitivos*. Mexico, DF: Trillas.

Santos-Trigo, M. & Barrera-Mora, F. (2007). Contrasting and looking into some mathematics education frameworks. *The Mathematics Educator*, 10(1), pp. 81-106.

Santos-Trigo, M. & Camacho-Machín, M. Towards the construction of a framework to deal with routine problems to foster mathematical inquiry. *PRIMUS,* (2009), ISSN: 1051-1970, 19(3): 260-279.

Santos-Trigo, M. & Espinosa-Pérez, H. High School Teachers' use of dynamic software to generate serendipitous mathematical relations. *The Montana Mathematics Enthusiast*, 2010, ISSN 1551-3440, Vol. 7, no.1, pp.31-46. Montana Council of Teachers of Mathematics & Information Age Publishing.

Santos, M (2004). Exploring the Triangle Inequality and Conic Sections Using Dynamic Software for Geometry. *Mathematics Teacher*, Vol 97, No 1, pp. 68-72.

Santos, M. (2001). Potencial didáctico del softaware dinámico en el aprendizaje de las matemáticas. *Avance y Perspectiva*, 20, pp. 247-258. Este trabajo también lo publicó la revista *Expresiones* de la Dirección General de Educación Tecnológica Industria, pp. 5-17

Santos, M. (2002). Students' use of mathematical representations in problem solving. *Mathematics and Computer Education Journal*, pp. 101-114, Spring Issue.

Santos, M. (2002a). Students' use of technological tools to construct conceptual systems in mathematical problem solving. En F. Hitt (Ed.), *Representation and mathematics visualization*, pp. 111-125. Working Group Representation and Visualization: PMENA.

Santos, M. (2003). Procesos de Transformación de Artefactos Tecnológicos en Herramientas de Resolución de Problemas Matemáticos. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*. Vol X, No2. pp. 195-212.

Santos, M. (2004). The Role of Technology in Students' Conceptual Constructions in a Sample Case of Problem Solving. *Focus on Learning Problems in Mathematics.* Spring Edition, vol 26, 2, pp. 1-17.

Santos, M. (2004b). The role of dynamic software in the identification and construcction of mathematical relationships. Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching, 23 (4), pp, 399-413.

Santos, M. & Espinoza H. (2002). Searching and exploring properties of geometric configurations via the use of dynamic software. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 33(1), pp. 37-50.

Santos, M. & Vargas, C. (2003). Más allá del uso de exámenes estandarizados. *Avance y Perspectiva*, 22, pp. 9-22.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. New York: Academic Press.

Schoenfeld, A., H. (1998). Reflections on a course in mathematical problem solving. *Research in Collegiate Mathematics Education III.*, pp. 81-113.

Silver, E. A. (1987). Foundations of cognitive theory and research for mathematics problem-solving instruction, In Alan H. Schoenfeld (Ed), *Cognitive science and mathematics education*, Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, pp. 1-31.

Whimbey, A. & Lochhead, J.(1976). *Problem solving & comprehension.* 6th edition, Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Zbiek, R. M., Heid, M.K., & Blume, G. W. (2007). Research on technology in mathematics education. In F. K. Lester, Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 1169-1207). NCTM, Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Nota: El autor agradece el apoyo del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, por medio de los proyectos Conacyt 47850 y 80359, donde se investiga el uso de distintas herramientas computacionales en la resolución de problemas matemáticas en el nivel medio superior.