Pedro A. Viñuela Villa

Consideraciones sobre el cálculo infinitesimal leibniziano y el cálculo de fluxiones newtoniano

Resumen: *El presente trabajo contrasta el cálculo infinitesimal de Leibniz y el cálculo de fluxiones de Newton para poner de relieve algunos aspectos relevantes del pensamiento leibniziano: la importancia del simbolismo en matemáticas, la relación entre la doctrina del pensamiento simbólico y la concepción de los infinitesimales como «ficciones útiles».*

Palabras clave: *Cálculo. Característica. Pensamiento simbólico. Infinitesimal. Ficción.*

Abstract: *This paper compares the Leibnizian calculus and Newtonian calculus in order to present some relevant aspects of Leibniz's thought: the importance of symbolism in mathematics, the relation between the doctrine of symbolic thought and the vision of infinitesimals as «useful fictions».*

Key words: *Calculus. Characteristic. Symbolic thought. Infinitesimal. Fiction.*

1. Introducción

El cálculo infinitesimal constituye el logro matemático más notable del siglo XVII. Proporciona a la ciencia de la naturaleza una herramienta sumamente poderosa y efectiva para analizar y comprender cuantitativamente diversos procesos de cambio y movimiento del mundo fenoménico. Aunque Leibniz y Newton son considerados sus inventores o descubridores, no debe pensarse que crearon el cálculo *ex nihilo*. Los desarrollos infinitesimales se remontan al uso del método de exhaución por Arquímedes para calcular áreas de superficies y volúmenes de sólidos. Los matemáticos europeos venían usándolos y trabajando en ellos desde hacía tiempo, en especial a partir de los estudios de Cavalieri y de su método de los indivisibles. De hecho, el cálculo continuó desarrollándose y ampliándose después de la muerte de Leibniz y Newton, recibiendo su expresión y fundamentación más rigurosa en el siglo XIX. Sin embargo, si se atribuye la gloria a estos dos grandes hombres se debe a que ambos elaboraron procedimientos y simbolismos algebraicos que hicieron posible ofrecer un tratamiento unificado de los diversos métodos infinitesimales desarrollados anteriormente por sus predecesores mediante un método algorítmico simple y general. En las manos de estos dos grandes matemáticos los nuevos métodos unificados se convirtieron en instrumentos poderosos de la ciencia (cf. Courant y Robbins 1996, p. 398; Mancosu 1996, p. 150; Boyer 1959, p. 186).

La idea central del cálculo, como se sabe, es que los procesos de diferenciación y de integración son en términos generales inversos o, dicho en términos geométricos, la determinación de la tangente a una curva dada y el cálculo del área delimitada por el eje y la curva son problemas inversos. Leibniz y Newton reconocieron con claridad la íntima conexión entre ambos procesos, dejando claramente establecida la relación existente entre cálculo diferencial y cálculo integral, lo que hoy se conoce habitualmente como teorema fundamental del cálculo.[1]

2. Cálculo infinitesimal leibniziano y cálculo fluxional newtoniano

A pesar de la agria disputa por la prioridad en la invención del cálculo, se ha demostrado que tanto Newton como Leibniz llegaron de manera independiente a sus métodos y resultados. Newton descubrió su método de series infinitas y el cálculo de fluxiones durante los años 1665-1666. Aun cuando sus descubrimientos se remontan a 1675, Leibniz fue el primero en hacer públicos sus resultados en las *Acta Eruditorum* en un breve ensayo de 1684 titulado *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur et singulare pro illis calculi genus* (cf. Hofmann 1974, pp. 187-201). En este opúsculo Leibniz ofrece las fórmulas de la derivada del producto $d(xy) = xdy + ydx$, la derivada del cociente $d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{y^2}$ y la derivada de una potencia de *x* $dx^n = nx^{n-1}dx$. En 1686 Leibniz publicó el artículo *De geometria recondita et analysi indivisibilium atque infinitorum*, donde proporcionaba los fundamentos de su concepción del cálculo integral.

Leibniz concibe la curva como un polígono «infinitangular», es decir, como un polígono compuesto por un número infinitamente grande de lados. Inspirado por sus estudios sobre las propiedades de series numéricas, como él mismo explica en *Historia et origo calculi differentialis* (cf. Durán 2006, pp. 235-240), Leibniz considera que los problemas de tangentes y cuadraturas son problemas inversos de modo análogo a como las operaciones de sumar términos numéricos consecutivos y establecer diferencias entre ellos tienen una relación recíproca entre sí. La analogía con el cálculo numérico es importante. A medida que las diferencias de los términos se hacen más pequeñas, mejores son las aproximaciones de las cuadraturas y las tangentes de la curva (considerada como polígono). Y finalmente se hacen exactas cuando las diferencias se hacen infinitamente pequeñas (o los términos sucesivos se hacen infinitamente próximos), es decir, cuando la curva es considerada como un polígono de infinitos lados (cf. Bos 1980, pp. 84-86). De ahí que Leibniz haya considerado la integración como una especie de suma y que haya adoptado el signo de una *S* estilizada, a saber ∫, para designar dicha operación. Leibniz vio con claridad, por tanto, que las operaciones de diferenciación e integración son inversas y recíprocas.

Newton presentó sus resultados en una serie de exposiciones tardíamente publicadas.[2] La primera exposición impresa del cálculo de Newton apareció en 1687 en los *Philosophiae naturalis principia mathematica*. Los *Principia* no utilizan la notación característica del método de fluxiones, sino que están escritos en una especie de cálculo infinitesimal *more geometrico* basado en el *método de las razones primeras y últimas* (*methodus rationum primarum et ultimarum*), expuesto en la sección primera del libro primero de dicha obra. Newton declara haber preferido reducir las demostraciones de las proposiciones a «las primeras y últimas sumas y razones de cantidades nacientes y evanescentes, es decir, a los límites de esas sumas y razones», porque, aunque el método de los indivisibles abrevia las demostraciones (largas y tediosas según el proceder de los geómetras antiguos), «la hipótesis de los indivisibles parece de alguna manera más ruda y, por ello, es considerada menos geométrica como método» (Newton 2011, p. 71). El prefacio de *The Method of Fluxions and Infinite Series; with its Application to the Geometry of Curve-Lines*[3] declara que el principio fundamental sobre el que está construido el método de fluxiones, que es muy simple y es tomado de la mecánica racional, consiste en:

> Toda cantidad matemática, particularmente la extensión, puede concebirse como generada por un movimiento local continuo; y que cualquier cantidad, al menos por analogía y acomodación, pueden concebirse como generadas de una manera similar. Por consiguiente, debe haber velocidades comparativas de aumento y disminución, durante dichas generaciones, cuyas relaciones son fijas y determinables. (Newton 1736, p. xi).[4]

Newton sostiene en esta obra que todos los problemas relativos a la naturaleza de las curvas pueden reducirse a sólo dos, a saber: (i) encontrar la velocidad del movimiento en cualquier tiempo propuesto, siendo dada continuamente (es decir, en cualquier tiempo) la longitud del espacio descrito; y (ii) encontrar la longitud del espacio descrito en cualquier tiempo propuesto, siendo dada continuamente la velocidad del movimiento (cf. Newton 1736, p. 19). Estos problemas generales se corresponden con los procesos de diferenciación e integración respectivamente. En este escrito se introduce la característica notación newtoniana que utiliza las letras finales del alfabeto (v, x, y, z) para representar las cantidades fluyentes o *fluentes* (*fluents*), las variables que varían continua e indefinidamente, mientras que dichas letras con un punto sobre ellas ($\dot{v}$, $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$) designan las *fluxiones* (*fluxions*) o tasas de cambio de la variable respecto al tiempo (las velocidades instantáneas del movimiento). Newton puntualiza que las fluxiones son las velocidades o celeridades (*Velocities or Celerities*) por las cuales cada fluente es aumentado o incrementado por su movimiento generador (*generating Motion*) (cf. Newton 1736, p. 20).

Como se puede ver, la notación fluxional de Newton se asienta en una concepción cinemática de las curvas y de su generación. Newton estaba especialmente interesado en los procesos temporales y dinámicos subyacentes a los fenómenos físicos. Elabora su método de fluxiones concibiendo la geometría desde un punto de vista cinemático, como herramienta para la investigación de la naturaleza.

El punto de partida de Leibniz, en cambio, no es cinemático ni basado en consideraciones físicas, sino que es algebraico, teniendo como trasfondo sus estudios de filosofía y lógica, así como una formación en matemáticas, que es –como él mismo reconoce- deficiente respecto a los principales avances de su época. En efecto, Leibniz llega relativamente tarde a las matemáticas modernas. Inspirado por sus tempranos estudios de lógica y combinatoria, accede a ellas recién en su decisiva estancia en París de 1672-1676. Sus estudios de lógica aristotélica lo introdujeron, como él dice, en el «país de los escolásticos», donde se interesó sobre todo por la silogística y los aspectos formales de la computación y las propiedades de los números. De hecho Leibniz no obtuvo un conocimiento real y una adecuada familiaridad con la geometría, ni en la escuela ni en la universidad, sino tan sólo en su madurez. En 1714, mirando en retrospectiva, indica en *Historia et origo calculi differentialis* que inicialmente no prestó suficiente atención a Euclides y que sólo comenzó a conocer en profundidad el análisis de Descartes a instancias de Huygens.[5]

A continuación se presenta, a modo de resumen, una comparación del cálculo leibniziano, el cálculo newtoniano y el cálculo moderno:[6]

	Cálculo leibniziano	Cálculo newtoniano	Cálculo moderno
Conceptos fundamentales	*Variable* (variando en una serie de valores infinitamente próximos) *Diferencial*: diferencia infinitamente pequeña entre valores sucesivos en la serie	*Variable* (variando en el tiempo) *Fluxión*: velocidad finita o tasa de cambio respecto al tiempo de la variable	*Función*
Variable base; criterio	*dx* = constante (de modo que *ddx* = … = 0)	*Tiempo*; $\dot{t} = \mathbf{1}$ (de modo que $\bar{t} = \cdots = \mathbf{0}$)	
Operaciones fundamentales	*Diferenciación*: Variable → variable infinitamente pequeña $x \to dx$ $dy \to ddy$	*Encontrar la fluxión a partir de un fluente dado*: Variable → tasa de cambio con respecto al tiempo de la variable $x \to \dot{x}$ $\dot{x} \to \bar{x}$	*Derivación*: Función ® función $f \to f'$ $f' \to f''$ (f' siendo la derivada de f y definida en términos del concepto de límite como: $f'(x) = \frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$)
	Sumación: Variable → variable infinitamente grande $x \to \int x$ $ydx \to \int ydx$	*Encontrar la cantidad fluente a partir de una fluxión dada*: $x \to \dot{x}$	*Integración*: Función → función $f \to F$ (con $F(x) = \int_a^x f(t)dt$)
Lugar principal de los infinitesimales	En los diferenciales *dx*, *ddx*,…	En los momentos o, o^2,… del tiempo	Análisis no estándar *Smooth infinitesimal analysis*
Principales técnicas matemáticas	Triángulo característico; analogías con -, + y ÷, x	Integración término a término y diferenciación de series de potencia	

Es importante destacar que tanto el cálculo de Newton como el de Leibniz se refieren a *variables*, mientras que el cálculo moderno trata con *funciones*. Todas las funciones son finitas y el concepto básico es el concepto de límite. En el análisis moderno ya no se habla de cantidades infinitamente pequeñas ni infinitamente grandes. Aunque Newton trató de basar su cálculo en el uso de límites, lo hizo de manera poco clara y satisfactoria.[7] Según Courant, la fundamentación del cálculo fue oscurecida por el no reconocimiento del derecho exclusivo del concepto de límite como la fuente de los nuevos métodos (cf. Courant y Robbins 1996, p. 433). En la actualidad el concepto de límite ha sido completamente clarificado, avance con el que no contaban Leibniz y Newton en su época.

Se puede apreciar, por tanto, una clara y significativa diferencia de enfoques entre ambos matemáticos, que concierne tanto a la manera de acceder a los problemas infinitesimales como a la fundamentación del cálculo y al problema del rigor en el desarrollo de las matemáticas. Como advierte Hall (2002, p. 431), Newton fue un geómetra por elección, mientras que Leibniz fue sobre todo un algebrista. Aunque ambos trabajaron con cantidades infinitamente pequeñas y se dieron cuenta de los problemas lógicos que su utilización implicaba, Newton, a diferencia de Leibniz, se tomó el problema del rigor mucho más en serio. Como afirma Bos (1980, p. 93), Newton creía que su cálculo podía proporcionar una fundamentación rigurosa por medio del concepto de *razones primeras y últimas*, un concepto afín al concepto de límite (aunque no idéntico a él). Pensaba que era «posible ofrecer una explicación completamente geométrica, expresada en términos de su geometría cinemática, para el éxito del método de los infinitesimales» (Kitcher 1984, p. 237). Mientras los seguidores de Leibniz fueron criticados por utilizar libremente la manipulación algebraica de «símbolos vacíos», Newton y sus adeptos fueron considerados como seguidores de «los verdaderos métodos de los antiguos», cercanos al ideal euclídeo del rigor.

Los escritos de Leibniz dan a entender que él no llegó a considerar el problema del rigor, en lo que al cálculo infinitesimal concierne, como algo especialmente urgente. Esta actitud puede parecer extraña en alguien que insistentemente reclama la necesidad de demostrar todas las proposiciones, incluso los axiomas, y que constantemente señala la importancia de que la ciencia se asiente sobre principios firmes y rigurosos. En algunos pasajes de su obra Leibniz explica las razones de ello. La ciencia en sus inicios (como en el nacimiento del cálculo) no debe ser refrenada por exceso de celo formal ni por una desmesurada escrupulosidad en sus procedimientos, por cuanto el rigor excesivo puede ser contraproducente e incluso puede llegar a paralizar el avance de la propia ciencia (cf. NE IV 2 § 8). La fundamentación del saber ha de valorarse en perspectiva y supeditarse a la naturaleza y repercusión de los resultados que produce. No se puede pretender fundamentar sobre bases absolutamente rigurosas algo que todavía no se ha alcanzado plenamente. El empeño por profundizar en la inteligencia de los primeros principios de la ciencia, admitidos en un comienzo sin prueba, y sin una estricta fundamentación, responde *sensu stricto* a una fase del desarrollo del saber en la que ya se ha apuntalado y afianzado la conquista del nuevo territorio y en la que la ciencia ha logrado una suficiente madurez y seguridad en sí misma (cf. NE IV 7 § 1). En otras palabras, la fundamentación rigurosa de los cimientos del cálculo infinitesimal puede esperar a la consolidación de la ciencia. Inicialmente debe predominar la búsqueda de procedimientos adecuados y la constatación de la corrección de los resultados. De este modo, se ha de privilegiar en primera instancia el desarrollo de la lógica inventiva de la ciencia, de los aspectos heurísticos de la matemática infinitesimal como *ars inveniendi*, en lugar de concentrarse en su justificación rigurosa, a fin de lograr la consolidación de sus métodos y resultados, que están dirigidos a favorecer, en última instancia, el progreso y el bienestar del género humano.

Esta actitud encuentra su explicación más plausible en el hecho de que Leibniz tenía conciencia plena de que el cálculo suponía un avance revolucionario en matemáticas, de modo que era preciso subordinar el escrúpulo formal y la búsqueda del rigor al progreso de esta rama nueva de las matemáticas. Según Hall (1980, p. 90), la principal diferencia entre Leibniz y Newton (y Huygens) reside en la valoración del cálculo.

Leibniz tuvo conciencia de que no se trataba de una mera prolongación y continuación de los métodos analíticos ya existentes, de un perfeccionamiento, si se quiere, de lo ya disponible, sino de una mutación decisiva y de un salto cualitativo respecto de lo previamente alcanzado. Newton, aunque consciente del carácter innovador de sus logros, no lo vio así. Leibniz, en cambio, consideró su cálculo infinitesimal como un gran paso adelante, al modo como lo fue la introducción del álgebra, de manera que la matemática jamás volvería a ser la misma. Leibniz tenía consciencia, en definitiva, del verdadero valor y trascendencia histórica del cálculo.

3. Característica universal y notación del cálculo

A partir de ahora nos concentraremos sobre todo en algunos aspectos fundacionales del cálculo infinitesimal leibniziano, que son de interés filosófico y de alcance sistemático en el pensamiento de Leibniz. En particular nos referiremos sucintamente al papel del simbolismo y del pensamiento simbólico en la concepción de los infinitesimales como ficciones útiles.

Bos (1980, p. 60) afirma que la principal idea que se encuentra a la base de la invención del cálculo infinitesimal leibniziano es de naturaleza filosófica, a saber: la idea de la *characteristica universalis* como lenguaje simbólico general. A lo largo de toda su vida, Leibniz jamás abandonó el proyecto de crear una *characteristica generalis* que empleara los caracteres, adecuadamente ideados, de modo que todas las consecuencias que se pudieran establecer, en el curso del razonamiento, procedieran directamente de los caracteres mismos. Un simbolismo semejante potenciaría la capacidad inventiva de la ciencia para beneficio de la humanidad. Insigne investigador e inventor de notaciones matemáticas, es plenamente consciente de que la potencia y el éxito de la matemática provienen en gran medida de la índole peculiar de su lenguaje simbólico. Leibniz consideraba, como afirma Dascal (1978, p. 5), sus éxitos en el álgebra, el cálculo infinitesimal y la lógica como simples muestras de su proyecto más ambicioso de crear una notación simbólica universal que se convertiría en el instrumento definitivo de perfeccionamiento de la ciencia y de la filosofía. Leibniz dimensionó con acierto el valor de la notación de su nuevo cálculo y de las ventajas operacionales propiciadas por ella (cf. Hall 1980, p. 90).

Leibniz destaca las virtudes de su simbolismo en su escrito *Symbolismus memorabilis calculi algebraici et infinitesimalis in comparatione potentiarum et differentiarum, et de lege homogeneorum transcendantal,* publicado en 1710 en *Miscellanea Berolinensia ad incrementum scientiarum*, poniendo de relieve la analogía que permite establecer su notación entre la elevación a una potencia de una suma de variables y la diferenciación de un producto de variables. Esta analogía se observa constantemente si se continúa la potenciación y la diferenciación, de modo que es posible operar con los diferenciales *como si* se tratase de potencias algebraicas. Con ello se revela y enfatiza que *d* actúa como un operador diferencial sobre una variable.

La regla de la diferenciación del producto de dos variables establece que $d(xy) = xdy + ydx$ (cf. Leibniz 1989, p. 106).(8) A partir de ella se tiene que $d^2(xy) = dd(xy) = d(xdy + ydx) = d^2xd^0y + 2dxdy + d^0xd^2y = yd^2x + 2dxdy + xd^2y$, siendo $d^0x = x$ y $d^0y = y$. Si se desarrolla el cuadrado del binomio de dos variables se tiene que $(x + y)^2 = x^2y^0 + 2x^1y^1 + y^2x^0 = x^2 + 2xy + y^2$, con $x^0 = 1$ y $y^0 = 1$. De este modo, el simbolismo exhibe una similitud entre los desarrollos de $d^n(xy)$ y $(x + y)^n$ o, como escribe Leibniz, $p^n(x + y)$. Se observa que la diferenciación se convierte en una manipulación simbólica y mecánica gracias a la combinatoria (cf. Leibniz 1989, p. 419, nota 24).

Ahora bien, la notación de Leibniz «no es meramente sugestiva por sí misma –como advierte Courant-, sino que es en realidad sumamente flexible y útil. La razón es que en muchos cálculos y transformaciones formales podemos tratar con los símbolos *dx* y *dy* exactamente *como si* fueran números ordinarios. Tratando a *dx* y *dy* como números es posible dar una expresión más clara a muchos cálculos que pueden llevarse a cabo con toda validez sin su uso» (Courant y John 1988, p. 193). Para facilitar la operatoria y potenciar la capacidad inventiva de los caracteres, este simbolismo trata, de alguna manera, lo continuo *como si* fuera discreto, los infinitesimales *como si* fueran cantidades finitas.[9] Las analogías que el simbolismo de Leibniz sugiere ayudan a agilizar y automatizar el pensamiento. La doctrina leibniziana del pensamiento simbólico permite comprender mejor este planteamiento, como veremos a continuación.

4. Pensamiento ciego

El proyecto de la característica universal y la doctrina del pensamiento simbólico van de la mano para Leibniz, lo cual se refleja en la invención de la notación del cálculo infinitesimal. En las *Meditaciones sobre el conocimiento, la verdad y las ideas* (1684) Leibniz sostiene que el pensamiento ciego o simbólico se utiliza «no sólo en el álgebra, sino en la aritmética, y casi en todo» (GP IV 423). Los caracteres y pensamientos ciegos son útiles para el razonamiento, por motivos de eficiencia mental y economía temporal.

> Creo que, efectivamente, sin el deseo de hacerse entender nunca hubiéramos llegado a formar un lenguaje; y una vez formado, también le sirve al hombre para razonar por sí mismo, tanto por la oportunidad que le dan las palabras para acordarse de los pensamientos abstractos como por la utilidad que tiene para razonar el servirse de caracteres y pensamientos sordos [*caracteres et pensées sourdes*], pues si hiciese falta explicarlo todo y substituir siempre cada término por su definición, necesitaríamos demasiado tiempo. (NE III 1 §2).

Ahora bien, la utilización de sistemas simbólicos no garantiza de suyo el conocimiento. Como todo instrumento, el órgano simbólico debe ser adecuado a su finalidad. Si no lo es, su uso puede ser contraproducente. Según Leibniz, puede acontecer que lo que es expresado en el lenguaje no necesariamente tenga su correlato en el plano de las ideas. Constituye un requisito de todo conocimiento la posesión efectiva de una idea de la cosa de la que se piensa o se habla, de acuerdo a criterios estrictamente lógicos, no psicológicos.

Sin embargo, Leibniz argumenta en los *Nuevos ensayos* que el pensamiento simbólico se caracteriza por la existencia de algo vacío y sordo en el pensamiento (*quelque chose de vuide et de sourd dans la pensée*), que no queda cubierto sino por el nombre, ya sea porque, al usar las palabras, no se lo vincula a ninguna idea, ya sea porque se lo une a una idea imperfecta (*idée imparfaite*), una de cuyas partes está vacía y, por así decir, queda en blanco.(10) Esta clase de pensamiento, desprovisto de contenido, es frecuente e incluso fundamental en la ciencia matemática, puesto que no siempre es posible disponer de la ayuda de las figuras, como en geometría. El álgebra pone de relieve que es posible realizar grandes descubrimientos sin tener que recurrir siempre a las ideas mismas de las cosas (cf. NE IV 3 §30). Como acontece en el cálculo algebraico, el pensamiento consiste en gran medida en el empleo y manipulación ciega o sorda de caracteres, donde se considera solamente de vez en cuando lo que los signos representan.

El espíritu, debido a la naturaleza finita de las facultades humanas de conocer, busca afanosamente maneras de compendiar, abreviar, tomar atajos. Sin estos recursos artificiales el espíritu no avanzaría mucho en la comprensión y conocimiento de la complejidad de lo real. Sin alguna clase de signos no se podría pensar ni razonar. Para Leibniz el pensamiento ciego cumple una función vital en la abstracción y en los procedimientos algorítmicos, en los cuales se ha de prestar atención principalmente a las reglas sintácticas que regulan la operatoria con los caracteres. Aunque Leibniz piensa que se trata de una tendencia extensamente documentada en el lenguaje natural, con resultados dispares, es en los lenguajes formales, como en las matemáticas, donde se ha sabido encausar adecuadamente y sacar rendimiento a esa disposición cognitiva natural.

5. Infinitesimales como ficciones útiles

Cuando Leibniz hizo público su cálculo infinitesimal, las objeciones relativas al carácter supuestamente contradictorio de los infinitesimales no tardaron en llegar. Podían ser tratados como cantidades finitas y la notación de Leibniz permitía establecer fructíferas asociaciones con el cálculo numérico en términos algorítmicos. Pero al mismo tiempo los infinitesimales de grado superior se igualaban a cero, lo cual supone al menos las siguientes dificultades. El infinitesimal parece constituir una entidad matemática intermedia entre el cero y una cantidad finita, sin ser en realidad ninguna de las dos. Además, como los infinitesimales de grado superior son despreciados, los resultados alcanzados parecen ser tan sólo aproximaciones, en lugar de resultados exactos. También se objetó que se considerara a los infinitesimales como cantidades realmente existentes, aunque muy pequeñas, a la manera de los indivisibles de Cavalieri.

Leibniz adopta básicamente dos estrategias para defender su cálculo y la índole de los infinitesimales. Aunque argumentó -en línea con el concepto moderno de límite- que el infinitesimal (el diferencial) es una cantidad que se puede hacer siempre más pequeña que una cantidad dada, su respuesta madura consistió en sostener que el infinitesimal es una *ficción útil*, una *ficción bien fundada*. Poco antes de morir, en su escrito de 1716 *La última respuesta*, declara que «el cálculo infinitesimal es útil cuando se trata de aplicar la matemática a la física, aunque no pretendo emplearlo para dar cuenta de la naturaleza de las cosas. Pues considero a las cantidades infinitesimales como ficciones útiles» (GP IV 629). En lo que sigue nos concentraremos en esta línea de defensa de Leibniz y mostraremos su vinculación con la doctrina del pensamiento simbólico.

Es importante destacar que Leibniz califica de ficción *útil* al infinitesimal, porque las ficciones pueden ser, como de hecho sucede frecuentemente, ficciones inútiles, improductivas. Como la duda cartesiana, las ficciones pueden ser extravagantes (cf. *Advertencia a la parte general de los Principios de Descartes*, GP IV 358, EF 482). Ahora bien, según Leibniz, los entes matemáticos se caracterizan precisamente por ser *entia imaginaria*, los cuales pueden ser posibles o imposibles, puesto que hay ficciones imposibles como la cuadratura del círculo. En términos prácticos, y en tanto que noción posible, el infinitesimal es admitido por la utilidad que su uso reporta.

En una carta a Des Bosses del 11 de marzo de 1706 Leibniz se expresa de manera significativa sobre el asunto:

> Filosóficamente hablando no sostengo las magnitudes infinitamente pequeñas más que las infinitamente grandes, o las infinitesimales más que las infinituplas. Pues las considero, a unas y otras, ficciones de la mente [*mentis fictionibus*], debido a formas abreviadas de hablar [*modum loquendi compendiosum*], aptas para el cálculo, tal como son las raíces imaginarias en el álgebra. Además, he demostrado que estas expresiones tienen gran utilidad para abreviar el pensamiento [*ad compendium cogitandi*] y de este modo para la invención; y no pueden conducir al error, ya que bastaría con sustituir lo infinitamente pequeño por una magnitud tan pequeña como uno quiera, de modo que el error sería menor que cualquiera dado; de donde se sigue que no puede darse ningún error. (GP II 305; Leibniz 2007, pp. 32-33).

El carácter ficcional de los infinitesimales viene dado entonces por el hecho de ser formas compendiadoras de hablar, atajos simbólicos, formas de escribir que ahorran tiempo y energía mental y permiten automatizar el pensamiento. El infinitesimal constituye, en fin, una abreviatura cuya existencia sería, por de pronto, meramente nominal e imaginaria. En cierta forma, Leibniz es nominalista (al menos provisional) en lo que a las nociones matemáticas concierne.[11] Según él, los entes matemáticos son seres abstractos que no existen realmente. La ficción matemática entonces se juega, por así decir, su carta de ciudadanía como dispositivo cognitivo en la utilidad y fecundidad que su empleo conlleva en términos heurísticos, algorítmicos y computacionales.

En la medida en que constituyen formar de hablar que compendian procedimientos de paso al límite y que, con todo, pueden considerarse como si fuesen magnitudes indivisibles, aunque en realidad no lo sean, los infinitesimales son ficciones útiles. Aun cuando $\frac{dy}{dx}$ designe una operación de diferenciación respecto a una variable, puede tratarse, sin embargo, *como si* fuese un cociente de magnitudes finitas, como una fracción racional. Desde el punto de vista de la eficiencia operacional este tratamiento es muy útil para resolver ecuaciones diferenciales simples. El ficcionalismo leibniziano respecto a los infinitesimales descansa en el tratamiento algorítmico "*como si*" que se les puede dispensar.

Estos procesos de abreviación han sido especialmente relevantes en el desarrollo histórico del álgebra, que –como afirman numerosos eruditos (cf. Bell 1985, pp. 132-133; Dantzig 2007, p. 80)- ha pasado por las fases *retórica*, *sincopada* y *simbólica*, en las cuales un proceso paulatino de sincopación ha permitido finalmente que las abreviaturas se conviertan en auténticos símbolos algebraicos. El caso de los infinitesimales y de los números imaginarios sería una «vuelta de tuerca» adicional en este proceso de abstracción, formalización y simbolización creciente del lenguaje matemático. Desde el punto de vista leibniziano, los sistemas simbólicos matemáticos tienden a avanzar por el camino de una independización y autonomía progresivas respecto a los supuestos objetos que representarían y a los que se referirían. El simbolismo propende para Leibniz a la presentación meramente formal de estructuras que los signos y sus relaciones revelarían.

6. A modo de conclusión

Como hemos visto, existen similitudes y diferencias importantes entre el cálculo infinitesimal de Leibniz y el cálculo de fluxiones de Newton. Ambas versiones del cálculo se basan en el uso de variables, en lugar de trabajar con funciones, como se hace en el análisis moderno. Pese a ciertas formulaciones de Newton, y a algunas sugerencias más bien aisladas de Leibniz, el concepto básico del cálculo infinitesimal no es para ellos el concepto moderno de límite, sino el de fluxión y el de diferencial respectivamente. De todos modos, estos puntos en común en los desarrollos de ambos autores no deberían hacernos perder de vista las profundas diferencias existentes entre ambas concepciones del cálculo, en lo que respecta especialmente a sus puntos de partida y a los enfoques que los caracterizan y les dan forma. Newton se interesó más por el rigor que Leibniz, debido tal vez a que no vio con la misma claridad que éste el significado y el carácter revolucionarios del nuevo análisis matemático. Su cercanía al punto de vista tradicional, basado en la geometría clásica como modelo de certeza y rigor, contribuyó a ello en gran medida. Leibniz, más cercano al modo algebraico de pensar e interesado en los métodos generales que explotan los aspectos algorítmicos y la automatización de los procedimientos de cálculo, vio la importancia capital del simbolismo. Su ojo avizor, desarrollado en sus estudios de lógica formal y combinatoria numérica, le permitió asociar inmediatamente su proyecto general de crear una característica universal con la invención del cálculo. Pero la utilidad real de la característica sólo puede entenderse a la luz de una epistemología que ponga debidamente de relieve la importancia del órgano simbólico en el saber sobre la base de la disposición natural del hombre para ello. Su doctrina del pensamiento ciego o simbólico constituye un elemento clave que permite vincular ese proyecto con la obtención de resultados efectivos en las ciencias. Aunque Leibniz da a entender en numerosos pasajes que no es partidario de un formalismo puro, puesto que los signos en algún momento tienen que referirse a algún contenido ideal, a fin de dar un fundamento al pensamiento *a parte rei*, no se puede negar, de todas formas, la existencia de una cierta tensión entre la doctrina leibniziana del pensamiento simbólico y su teoría de las ideas, en la medida en que el simbolismo tiende a una formalización extrema y a un desarrollo autónomo, pues se hace cada vez más difícil referir las "ficciones" y las abstracciones resultantes a las ideas que en principio les corresponderían.

Notas

1. El teorema fundamental del cálculo se puede formular brevemente así: La derivada de la integral indefinida $F(x) = \int_a^x f(u)du$ como función de x es igual al valor de $f(u)$ en el punto x: $F'(x) = f(x)$. En otras palabras, el proceso de integración, que lleva de la función $f(x)$ a $F(x)$ (la primitiva de $f(x)$), se invierte por el proceso de diferenciación

aplicado a $F(x)$ (cf. Courant y Robbins 1996, pp. 436-437).

2. *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas* (escrito en 1669 y publicado en 1711); *Methodus fluxionum et serierum infinitorum* (escrito en 1671 y publicado en 1742 (en versión inglesa en 1736); *De quadratura curvarum* (escrito en 1676 y publicado en 1704).
3. Esta es la traducción al inglés de 1736 del original latino no publicado hasta ese entonces. La traducción fue realizada por John Colson, maestro de la escuela libre de matemáticas *Sir Joseph Williamson*, asentada en Rochester.
4. El problema de encontrar tales relaciones se basa en suponer que la cantidad es «infinitamente divisible, o que puede ser (al menos mentalmente) disminuida continuamente, de modo que al final, antes de que se extinga totalmente, se llegue a cantidades que pueden llamarse cantidades evanescentes [*vanishing Quantities*], o que son infinitamente pequeñas y menores que cualquier cantidad asignable» (Newton 1736, p. xi).
5. Leibniz escribe en *Historia et origo*: «Pero la aplicación de verdades numéricas a la geometría y también la consideración de series infinitas eran a la sazón totalmente ignotas para nuestro mozo, quien dábase por satisfecho con observar complacido cosas tales en series de números. Nada tenía de la geometría, fuera de vulgarísimos preceptos prácticos, y apenas miraba a Euclides con atención suficiente, metido de plano en otros estudios» (Durán 2006, p. 240).
6. Este cuadro está basado en Bos (1993, p. 96), Bos (1980, pp. 92-93) y Grattan-Guinness (1998, p. 245).
7. En la sección primera del libro primero (lema I) de los *Principia* Newton proporciona una especie de definición del límite de una variable: «Las cantidades, y las razones de cantidades, que en cualquier tiempo finito tienden continuamente a la igualdad, y que antes de terminar ese tiempo se aproximan una a otra más que cualquier diferencia dada, se hacen finalmente iguales» (Newton 2011, p. 61).
8. Leibniz lo había introducido en las *Acta Eruditorum* en octubre de 1684 en el *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur et singulare pro illis calculis genus*.
9. Leibniz pasa de lo discreto a lo continuo, dándose cuenta de las analogías y similitudes entre el estudio de sumas y diferencias de números en los triángulos aritmético y armónico y las consideraciones infinitesimales sobre tangentes y cuadraturas (cf. Boyer 1959, pp. 203-204).
10. Leibniz llama también a los pensamientos ciegos (*cogitationes caecas*) pensamientos sordos (*pensées sourdes*), esto es, vacíos de percepción y sentimiento (*vuides de perception et de sentiment*) (cf. NE II 21 § 35). En el siglo XVII, se llamaba números sordos o razones sordas (*rationes surdae*) a los números irracionales o inconmensurables (*numera incommensurabilia*), es decir, aquellos números que no pueden ser expresados como cociente entre dos números enteros, siendo $\sqrt{2}$ un buen ejemplo de ellos (cf. C 17-18; NE II 16 § 4). Newton, de hecho, en su *Arithmetica Universalis*, define *numerus surdus*, como aquél que es inconmensurable con la unidad (*cui unitas est incommensurabilis*) (cf. Newton 1722, p. 2).
11. Como afirma en la *Disertación del estilo filosófico de Nizolio* (1670), «nominalistas son los que piensan que todas las cosas, excepto las sustancias singulares, son meros nombres. Niegan, por tanto, de raíz, la realidad de los abstractos y universales» (Leibniz 1993, p. 85).

Bibliografía

Bell, E. T. (1985). *Historia de las matemáticas*. Traducción de R. Ortiz. México D.F.: Fondo de Cultura Económica.

Bos, H. J. M. (1993). *Lectures in the History of Mathematics*. United States of America: American Mathematical Society.

——— (1980). *Newton, Leibniz and the Leibnizian Tradition*. En I. Grattan-Guinness (ed.), From the Calculus to Set Theory 1630-1910. An Introductory History, Princeton and Oxford: Princeton University Press, pp. 49-93.

Boyer, Carl B. (1959). *The history of the calculus and its conceptual development*. Nueva York: Dover Publications.

Courant, Richard y Robbins, Herbert (1996). What is Mathematics? An Elementary Approach to Ideas and Methods. Second edition revised by Ian Stewart. Nueva York: Oxford University Press.

Courant, Richard y John, Fritz (1988). *Introducción al cálculo y al análisis matemático* (vol. 1). Versión española de Saul Hahn Goldberg, Rolando Jiménez Domínguez y José S. Florio. México D.F.: Editorial Limusa.

Dantzig, Tobias (2007). *Number: The Language of Science*. Londres: Plume.

Dascal, Marcelo (1978). *La sémiologie de Leibniz*. París: Éditions Aubier Montaigne.

Durán, Antonio J. (ed.) (2006). *La polémica sobre la invención del cálculo infinitesimal*. Escritos y documentos. Barcelona: Crítica.

Grattan-Guinness, Ivor (1998). *The Norton History of the Mathematical Sciences: The Rainbow of Mathematics*. New York and London: W. W. Norton & Company.

Hall, Rupert A. (1980). *Philosophers at war. The quarrel between Newton and Leibniz*. Cambridge: Cambridge University Press.

Hoffmann, Joseph E. (1974). *Leibniz in Paris 1672-1676:* His Growth to Mathematical Maturity. Nueva York: Cambridge University Press.

Kitcher, Philip (1984). *The Nature of Mathematical Knowledge*. Nueva York: Oxford University Press.

Leibniz, G. W. (2007). *The Leibniz-Des Bosses correspondence*. Translated, edited, and with an introduction by Brandon C. Look and Donald Rutherford. United States of America: Yale University Press.

Leibniz, G. W. (2003). *Escritos Filosóficos*. Edición de Ezequiel de Olaso; notas de Ezequiel de Olaso y Roberto Torretti; traducciones de Roberto Torretti, Tomás Zwanck y Ezequiel de Olaso. Madrid: Antonio Machado Libros.

Leibniz, G. W. (1993). *Disertación sobre el estilo filosófico de Nizolio*. Estudio preliminar y traducción de Luis Fraile Delgado. Madrid: Tecnos.

Leibniz, G. W. (1989). *La naissance du calcul différentiel*. 26 articles des Acta Eruditorum. Introduction, traduction et notes par Marc Parmentier. Preface de Michel Serres. París: Librairie Philosophique J. Vrin.

Leibniz, G. W. (1971). Die mathematischen Schriften (7 vols.). Herausgegeben von C. I. Gerhardt. Berlín: Georg Olms Hildesheim.

Leibniz, G. W. (1961). *Die philosophischen Schriften (7 vols.)*. Herausgegeben von C. I. Gerhardt. Berlín: Georg Olms Hildesheim.

Mancosu, Paolo (1996). *Philosophy of Mathematics & Mathematical Practice in the Seventeenth Century*. Nueva York: Oxford University Press.

Newton, Isaac. (2011). *Principios matemáticos de la Filosofía Natural* (tercera edición). Estudio preliminar, traducción y notas de Antonio Escohotado. Madrid: Editorial Tecnos.

Newton, Isaac. (1736). *The Method of Fluxions and Infinite Series; with its Application to the Geometry of Curve-Lines*. Traducida por John Colson e impresa por Henry Woodfall. Londres.

Newton, Isaac. (1726). *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (editio tertia aucta & emendate). Apud Guil. & Joh. Innys, Regiae Societatis typographos. Londini.

Newton, Isaac. (1722). *Arithmetica Universalis: sive de compositione et resolutione arithmetica liber* (editio secunda). Londres.