Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones 2012 **19**(1) : 239–245
cimpa – ucr issn: 1409-2433

UNA NOTA SOBRE OBJETOS K–FINITOS EN UN TOPOS BOOLEANO CON EL OBJETO DE LOS NÚMEROS NATURALES

A NOTE ON K–FINITE OBJECTS IN A BOOLEAN TOPOS WITH THE NATURAL NUMBERS OBJECT

Osvaldo Acuña Ortega*

Received: 2 Sep 2011; Revised: 7 Nov 2011; Accepted: 10 May 2012

*CIMPA & Escuela de Matemática, Universidad de Costa Rica, 2060 San José, Costa Rica.

Resumen

Probamos que todo objeto k-finito en un topos booleano con el objeto de los números naturales es internamente el cociente de algún cardinal finito.

Palabras clave: Teoría de topos, objetos K–finitos, números naturales.

Abstract

We prove that every k-finite object in a boolean topos with natural number object is internally the quotient of a natural number object.

Keywords: Topoi, K–finite objects, natural numbers.

Mathematics Subject Classification: 03G30, 18B25.

1 Introducción

Sea $X \in |E|$, con E un topos elemental con el objeto de los números naturales $1 \xrightarrow{o} \mathbb{N} \xrightarrow{s} \mathbb{N}$, entonces

$$M(X) = \{R \in \Omega^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times X} / R \text{ es funcional} \wedge \exists_{n\in\mathbb{N}}(domR[n])\} \xrightarrow{i_X} \Omega^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times X}$$

donde i_X es la inclusión que define a $M(X)$ y la $\models [n] = \{(a,b) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}/a+b+1=n\}$, "$R$ es funcional" se debe entender por:

$$\forall x, y, y'(R(x,y) = R(x,y') \Rightarrow y = y').$$

Sigue inmediatamente de la definición de $M(X)$ que la fecha

$$dom \circ \ i_X : M(X) \longrightarrow \Omega^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times X} \longrightarrow \Omega^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}},$$

donde dom es la fecha dominio, se factoriza a través de $[-] : \mathbb{N} \longrightarrow \Omega^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ y por lo tanto existe una única fecha $l : M(X) \longrightarrow \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{tikzcd} M(X) \arrow[r, "i_X"] \arrow[d, "l"'] & \Omega^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times X} \arrow[d, "dom"] \\ \mathbb{N} \arrow[r, "{[\cdot]}"'] & \Omega^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times X} \end{tikzcd}$$

commuta.

Definimos $* : M(X) \times M(X) \longrightarrow \Omega^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times X}$ como: $\models R_1 * R_2 = \{(a,b,x) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}\times X / \exists_{k_1\in\mathbb{N}}((a,k_1,x) \in R_1 \vee (k_1,b,x) \in R_2) \wedge a+b+1 = l(R_1)+l(R_2)\}$.

2 Resultados

Proposición 1 *Si R_1, R_2 son variables de tipo $M(X)$ entonces*

i) $\models dom\ (R_1 * R_2) = [l(R_1) + l(R_2)]$ *y*

ii) $\models R_1 * R_2$ *es funcional.*

En particular $*$ se factoriza a través de $M(X)$.

Prueba: i)$\models (a,b) \in dom(R_1 * R_2) \Rightarrow a, b \in \mathbb{N} \wedge a + b + 1 = l(R_1) + l(R_2)$ $\Rightarrow (a,b) \in [l(R_1) + l(R_2)]$. Por lo tanto $\models dom(R_1 * R_2) \subseteq [l(R_1) + l(R_2)]$.

Tenemos también que:
$\models (a,b) \in [l(R_1) + l(R_2)]$
$\Rightarrow \exists_{k_1}(1 + a + k_1 = l(R_1) \wedge l(R_2) + k_1 = b) \vee \exists_{k_2}(1 + k_2 + b = l(R_2) \wedge a = k_2 + l(R_1))$
$\Rightarrow \exists_{k_1}((a,k_1) \in dom(R_1) \wedge l(R_2) + k_1 = b) \vee \exists_{k_2}((k_2,b) \in dom(R_2) \wedge a = k_2 + l(R_1))$
$\Rightarrow \exists_x \exists_{k_1}((a,k_1,x) \in R_1 \wedge l(R_2) + k_1 = b) \vee \exists_X \exists_{k_2}((k_2,b,x) \in R_2 \wedge l(R_1) + k_2 = a)$
$\Rightarrow \exists_x \exists_{k_1}(((a,k_1,x) \in R_1 \wedge a + b + 1 = l(R_1) + l(R_2)) \vee ((k_1,b,x) \in R_2 \wedge a + b + 1 = l(R_1) + l(R_2)))$
$\Rightarrow \exists_x \exists_{k_1}((a,k_1,x) \in R_1 \vee (k_1,b,x) \in R_2) \wedge a + b + 1 = l(R_1) + l(R_2)$
$\Rightarrow \exists_x (a,b,x) \in R_1 * R_2$
$\Rightarrow (a,b) \in dom(R_1 * R_2)$.
Entonces $\models [l(R_1) + l(R_2)] \subseteq dom(R_1 * R_2)$ y por extensionalidad se tiene que $\models dom(R_1 * R_2) = [l(R_1) + l(R_2)]$.

(ii)$\models (a,b,x) \in R_1 * R_2 \wedge (a,b,y) \in R_1 * R_2$
$\Rightarrow \exists_{k_1}((a,k_1,x) \in R_1 \vee (k_1,b,x) \in R_2) \wedge \exists_{k_2}((a,k_2,y) \in R_1 \vee (k_2,b,y) \in R_2) \wedge a + b + 1 = l(R_1) + l(R_2)$
$\Rightarrow \exists_{k_1}\exists_{k_2}(((a,k_1,x) \in R_1 \vee (k_1,b,x) \in R_2) \wedge ((a,k_2,y) \in R_1 \vee (k_2,b,y) \in R_2)) \wedge a + b + 1 = l(R_1) + l(R_2)$
$\Rightarrow \exists_{k_1}\exists_{k_2}(((a,k_1,x) \in R_1 \wedge (a,k_2,y) \in R_1 \vee ((a,k_1,x) \in R_1 \wedge (k_2,b,y) \in R_2) \vee ((k_1,b,x) \in R_2 \wedge (a,k_2,y) \in R_1)$
$\vee((k_1,b,x) \in R_2 \wedge (k_2,b,x) \in R_2)) \wedge a + b + 1 = l(R_1) + l(R_2)$
$\Rightarrow \exists_{k_1}\exists_{k_2}((k_1 = k_2 \wedge (a,k_1,x) \in R_1 \wedge (a,k_2,y) \in R_1) \vee$ falso $\vee$ falso $\vee (k_1 = k_2 \wedge (k_1,b,x) \in R_2 \wedge (k_2,b,x) \in R_2))$
$\Rightarrow x = y \vee x = y$
$\Rightarrow x = y$.

Por lo tanto $\models (a,b,x) \in R_1 * R_2 \wedge (a,b,y) \in R_1 * R_2 \Rightarrow x = y$, y entonces se tiene que $\models R_1 * R_2$ es funcional. Hemos visto que $i_X \circ$ dom $= l \circ [-]$, internamente ésto nos dice que $\models_{M(X)} dom(R) = [l(R)]$. Por (i), (ii) tenemos que $* : M(X) \times M(X) \to M(X)$.

Como $\models dom(R_1 * R_2) = [l(R_1) + l(R_2)]$ y $\models dom(R_1 * R_2) = [l(R_1 * R_2)]$ tenemos que $\models [l(R_1 * R_2)] = [l(R_1) + l(R_2)]$ y entonces como $[-]$ es inyectiva se tiene que $\models l(R_1 * R_2) = l(R_1) + l(R_2)$.
Para cada $X \in\mid E \mid$ denote por ϕ_X la fecha única $\phi \to X$. Como $\phi_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times X} = (\phi_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}, \phi_X)$ entonces $\phi_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times X}$ es una relación funcional y entonces $\ulcorner\phi\urcorner_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times X}$ se factoriza a través del subconjunto de relaciones funcionales en $\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times X$. Por otro lado $o \circ [-] = \ulcorner\phi\urcorner_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$, pero claramente tenemos que

$$\begin{array}{ccc} 1 & \xrightarrow{\ulcorner\phi\urcorner_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times X}} & \Omega^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times X} \\ {\scriptstyle id_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \exists_{pr_1}} \\ 1 & \xrightarrow{\ulcorner\phi\urcorner_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}} & \Omega^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \end{array}$$

conmuta, es decir $dom \circ \ulcorner\phi\urcorner_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times X} = \ulcorner\phi\urcorner_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ y entonces tenemos que $\ulcorner\phi\urcorner_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times X} : 1 \to \Omega^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times X}$ se factoriza a través de $M(X)$. Denote esta factorización por $\phi^X : 1 \to M(X)$. ■

Proposición 2 $(M(X), *, \phi^X)$ *es un objeto monoide con identidad.*

PRUEBA: Probaremos que $*$ es asociativo. A lo largo de esta prueba aparecen implicaciones no triviales que denotaremos por $\otimes$ y $\otimes\otimes$ cuyas justificaciones aparecerán más adelante en la prueba.
Sean R_1, R_2, R_3 variables del tipo $M(X)$. Por definición de $*$ tenemos que:
$\models (a,b,x) \in (R_1 * R_2) * R_3$
$\Leftrightarrow \exists_{k_1}((a,k_1,x) \in R_1 * R_2 \vee (k_1,b,x) \in R_3) \wedge a+b+1 = l(R_1)+l(R_2)+l(R_3)$
$\Leftrightarrow \exists_{k_1}(\exists_{k_2}(((a,k_2,x) \in R_1 \vee (k_2,k_1,x) \in R_2) \wedge a+k_1+1 = l(R_1)+l(R_2) \vee$ $(k_1,b,x) \in R_3) \wedge a+b+1 = l(R_1)+l(R_2)+l(R_3)$
como $\models \exists_{k_2}(k_2 = k_1 + l(R_2))$
$\Leftrightarrow \exists_{k_1}(\exists_{k_2}(((a,k_2,x) \in R_1 \vee (k_2,k_1,x) \in R_2) \wedge a+k_1+1 = l(R_1)+l(R_2))$ $\vee \exists_{k_2}((k_1,b,x) \in R_3 \wedge k_2 = k_1 + l(R_2))) \wedge a+b+1 = l(R_1)+l(R_2)+l(R_3)$
$\Rightarrow \exists_{k_1}\exists_{k_2}((a,k_2,x) \in R_1 \vee ((k_2,k_1,x) \in R_2 \wedge a+k_1+1 = l(R_1)+l(R_2)) \vee$ $((k_1,b,x) \in R_3 \wedge k_2 = k_1 + l(R_2))) \wedge a+b+1 = l(R_1)+l(R_2)+l(R_3)$
$\overset{\otimes}{\Rightarrow} \exists_{k_2}((a,k_2,x) \in R_1 \vee (\exists_{k_1}(((k_2,k_1,x) \in R_2 \wedge b+k_2+1 = l(R_2)+l(R_3)) \vee$ $((k_1,b,x) \in R_3 \wedge b+k_2+1 = l(R_2)+l(R_3)))) \wedge a+b+1 = l(R_1)+l(R_2)+l(R_3)$
$\Rightarrow \exists_{k_2}((a,k_2,x) \in R_1 \vee (k_1,b,x) \in R_2 * R_3) \wedge a+b+1 = l(R_1)+l(R_2 * R_3)$
$\Rightarrow (a,b,x) \in R_1 * (R_2 * R_3)$.
Por lo tanto $\models (a,b,x) \in (R_1 * R_2) * R_3 \Rightarrow (a,b,x) \in R_1 * (R_2 * R_3)$.
Probemos ahora la otra implicación:
$\models (a,b,x) \in R_1 * (R_2 * R_3)$
$\Leftrightarrow \exists_{k_1}((a,k_1,x) \in R_1 \vee ((k_1,b,x) \in R_2 * R_3) \wedge a+b+1 = l(R_1)+l(R_2)+l(R_3)$
$\Leftrightarrow \exists_{k_1}((a,k_1,x) \in R_1 \vee \exists_{k_2}((k_1,k_2,x) \in R_2 \vee (k_2,b,x) \in R_3) \wedge b+k_1+1 =$ $l(R_2)+l(R_3)) \wedge a+b+1 = l(R_1)+l(R_2)+l(R_3)$

como $\exists_{k_2}(k_2 = k_1 + l(R_2))$
$\Rightarrow \exists_{k_1}((\exists_{k_2}(a,k_1,x) \in R_1 \wedge k_2 = k_1 + l(R_2)) \vee \exists_{k_2}((k_1,k_2,x) \in R_2 \wedge b + k_1 + 1 = l(R_1) + l(R_2)) \vee (k_2,b,x) \in R_3)$
$\wedge a+b+1 = l(R_1)+l(R_2)+l(R_3) \overset{\otimes\otimes}{\Rightarrow} \exists_{k_2}\exists_{k_1}(((a,k_1,x) \in R_1 \wedge a+k_2+1 = l(R_1)+l(R_2)) \vee ((k_1,k_2,x) \in R_2 \wedge a+k_2+1 = l(R_1)+l(R_2)) \vee (k_2,b,x) \in R_3 \wedge a+b+1 = l(R_1)+l(R_2)+l(R_3)$
$\Rightarrow \exists_{k_2}((a,k_2,x) \in R_1 * R_2 \vee (k_2,b,x) \in R_3) \wedge a+b+1 = l(R_1 * R_2)+l(R_3)$.
Por lo tanto $\models (a,b,x) \in R_1 * (R_2 * R_3) \Rightarrow (a,b,x) \in (R_1 * R_2) * R_3$ y entonces $\models R_1 * (R_2 * R_3) = (R_1 * R_2) * R_3$.
Tenemos que $\circledast$ es la conjunción de:
$\models a+b+1 = l(R_1)+l(R_2)+l(R_3) \wedge a+k_1+1 = l(R_1)+l(R_2) \wedge (k_1,k_2,x) \in R_2$
$\Rightarrow b+k_2+1 = l(R_2)+l(R_3) \wedge (k_1,k_2,x) \in R_2$
y
$\models (a+b+1 = l(R_1)+l(R_2)+l(R_3) \wedge k_2 = k_1 + l(R_2) \wedge (k_1,b,x) \in R_2) \Rightarrow (b+k_2+1 = l(R_2)+l(R_3) \wedge (k_1,b,x) \in R_3)$.
También tenemos que $\otimes\otimes$ es la conjugación de:
$\models (a+b+1 = l(R_1)+l(R_2)+l(R_3) \wedge b+k_1+1 = l(R_2)+l(R_3) \wedge (k_1,k_2,x) \in R_2) \Rightarrow (a+k_2+1 = l(R_1)+l(R_2) \wedge (k_1,k_2,x \in R_2)$
y $\models (a+b+1 = l(R_1)+l(R_2)+l(R_3) \wedge k_2 = k_1+l(R_2) \wedge (a,k_1,x) \in R_1) \Rightarrow (a+k_1+1 = l(R_1)+l(R_2) \wedge (a,k_1,x) \in R_1)$.
Ambas $\otimes$ y $\otimes\otimes$ tienen pruebas triviales.
Finalmente probemos que $\models R_1 * \phi^X = \phi^X * R_1 = R_1$:
$\models (a,b,x) \in R_1 * \phi^X \Leftrightarrow \exists_{k_1}((a,k,x) \in R_1 \vee (k_1,b,x) \in \phi^X) \wedge a+b+1 = l(R_1)+l(\phi^X)$
(como $[\![\exists_{k_1}(k_1,b,x) \in \phi^X]\!] = \phi$ y $l(\phi^X) = \circ$)
$\Leftrightarrow \exists_{k_1}(a,k_1,x) \in R_1 \wedge l(R_1) = a+b+1$
$\Leftrightarrow \exists_{k_1}(a,k_1,x) \in R_1 \wedge a+k_1+1 = a+b+1$
$\Leftrightarrow \exists_{k_1}(a,k_1,x) \in R_1 \wedge k_1 = b$
$\Leftrightarrow (a,b,x) \in R_1$.
Por lo tanto $\models R_1 * \phi^X = R_1$. Similarmente se prueba que $\models \phi^X * R_1 = R_1$ y entonces ϕ^X es el elemento neutro de $M(X)$. Entonces $(M(X), *, \phi^X)$ es un monoide con identidad. ■

Nota: Observe que $l : M(X) \longrightarrow (\mathbb{N}, +)$ es un homorfismo de monoide con identidad ya que $\models l(R_1 * R_2) = l(R_1) + l(R_2)$ y $l \circ \phi^X = 0$. Como $\models \forall_{R \in M(X)} R * \phi^X = R \Rightarrow \forall_{R \in M(X)} l(R) + l(\phi^X) = l(R)\ l(\phi^X) = 0$ y siendo $\models \forall_{R \in M(X)} R * \phi^X = R$ se tiene que $\models l(\phi^X) = 0$, es decir $l \circ \phi^X = 0$.

Proposición 3 *Para todo $p : 1 \longrightarrow \mathbb{N}$ tenemos que*

$$\begin{array}{ccc} X^{[p]} & \longrightarrow & 1 \\ \subseteq\Big\downarrow & & \Big\downarrow p \\ M(X) & \underset{l}{\longrightarrow} & \mathbb{N} \end{array}$$

es un producto fibrado.

Prueba: Tenemos que $\models l^{-1}(p) = \{R \in \Omega^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times X}/R$ es funcional $\wedge$ dominio de R es $\ulcorner[p]\urcorner\}$ entonces $\models l^{-1}(p) = X^{[p]}$. ■

Nota: Denote por $\psi : M(X) \to \Omega^X$ el morfismo $M(X) \subseteq \Omega^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times X} \overrightarrow{\exists_{pr_2}} \Omega^X$, es claro que éste morfismo es un homomorfismo con identidad de $(M(X), \vee, \phi^X)$ y $(\Omega^X, \cup, \phi)$, más aún la imagen de ψ es $K(X)$.

Teorema 4 *Si E es un topos elemental booleano con el axioma de infinitud. Entonces X es $k-$finito si y solo si $q : 1 \longrightarrow \mathbb{N}$ tal que epic $(X^{[q]}) \to 1$ es un epimorfismo.*

Prueba: ($\Leftarrow$) Si epic$(X^{[q]}) \to 1$ es un epimorfismo esto implica que $\models \exists_{R\in M(X)}\psi(R) = \ulcorner X\urcorner$, pero esto dice que $1 \overset{\ulcorner X\urcorner}{\to} \Omega^X$ se factoriza a través de $k(X)$, de donde que X es k-finito

($\Rightarrow$) Si X es k-finito , entonces $\ulcorner X\urcorner$ se factoriza a través de $k(X)$, pero todo objeto k-finito es internamente el cociente de algún cardinal finito, es decir se tiene que
$\models \exists_{R\in M(X)}\psi(R) = \ulcorner X\urcorner$. Considere el subojeto A definido por:
$A = \{n \in \mathbb{N}/\exists_{R\in M(X)} domR = [n] \wedge \psi(R) = \ulcorner X\urcorner\}$.
Sabemos que $\models domR = [l(R)]$ de donde que
$\models \exists_{R\in M(X)}\psi(R) = \ulcorner X\urcorner \wedge dom(R) = [l(R)]$.
Por otro lado
$\models \exists_{R\in M(X)}\psi(R) = \ulcorner X\urcorner \wedge domR = [l(R)]$
$\Rightarrow \exists_{n\in\mathbb{N}}\exists_{R\in M(X)}\psi(R) = \ulcorner X\urcorner \wedge domR = [n]$
$\Rightarrow \exists_{n\in\mathbb{N}} n \in A$.

En consecuencia $\models \exists_{n\in\mathbb{N}} n \in A$, entonces $\ulcorner A\urcorner$ se factoriza a través de $p^+\mathbb{N}$, donde $p^+\mathbb{N} = \{B \in \Omega^{\mathbb{N}}/\exists_{n\in\mathbb{N}} n \in B\}$. Como E es booleano por (3) existe una fecha de elección $\mu : p^+\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ tal que $q = \ulcorner A\urcorner \circ \mu : 1 \longrightarrow \mathbb{N}$ se factoriza a través de A, lo que significa que
$\models \exists_{R\in M(X)} domR = [q] \wedge \psi(R) = \ulcorner X\urcorner$ y por la proposición 3 tenemos que
$\models \exists_{R\in X^{[q]}}\psi(R) = \ulcorner X\urcorner$, lo que es equivalente a
$[\![\exists_{R\in X^{[q]}}\psi(R) = \ulcorner X\urcorner]\!] = 1$.

Por otro lado epic$(X^{[q]}) = [\![codom R = \ulcorner X \urcorner]\!] = [\![\psi(R) = \ulcorner X \urcorner]\!]$ y claramente

$$\begin{array}{ccc} epic(X^{[p]}) & \longrightarrow & X^{[q]} \\ \downarrow & & \downarrow \\ [\![\exists_{R \in X^{[q]}} \psi(R) = \ulcorner X \urcorner]\!] & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

commuta, donde que $epic(X^{[p]}) \to 1$ es un epimorfismo. ■

Referencias

[1] Acuña-Ortega, O. (1977) *Finiteness in Topoi*, Ph. D. Dissertation, Wesleyan University, Middletown, CT.

[2] Acuña-Ortega, O.; Linton, F.E.J. (1979) "Finiteness and decidability I", in: *Applications of Sheaves*, Lecture Notes in Mathematics 753, Springer–Verlag, New York: 80–100.

[3] Sols, I.M. (1975) "Bon ordre dans des nombres naturels dans un topos booléan", *C.R. Acad. Sc. Paris* **281**: 601–603.