Ciencia y Tecnología, 26(1 y 2): 19-31, 2010
ISSN: 0378-0524

SOLUCIONES INTERIORES EXACTAS A LAS ECUACIONES DE EINSTEIN PARA UN LÍQUIDO IDEAL CON SIMETRÍA AXIAL

Rodrigo Alvarado[1]

Centro de Investigaciones espaciales (CINESPA)
Universidad de Costa Rica

Abstract

Exact interior solutions of Einstein equations were obtained, using the ideal fluid model with axial symmetry (Weyl-Lewis-Papapetrou or Weyl-Papapetrou). It is considered that u^1 , u^2 (tetra-velocity components) are null and under these terms, the pressure p is null (dust model). The exact solution if $p = 0$ y $d\varphi/dt = 0$ was also obtained. Different relations among Ricci tensor components and the curvature scalar must be fulfilled in the same way for the energy-stress tensor components and trace of this tensor in this symmetry. In this case, the angular velocity $d\varphi/dt$ does not determine completely the form of the function ω appearing in this metric, as it is considered in other related works. Some solutions are analyzed and proposed as simple models for spiral galactic zones.

Palabras clave: Relatividad General, solución interior, simetría axial, fluido perfecto, galaxias espirales.

Key words: General relativity, interior solution, axially-symmetric, perfect fluid, spiral galaxies.

I. Introducción

Las soluciones exactas a las ecuaciones de Einstein son de gran interés por varias razones. Una de éstas, es el poder investigar las posibles características gravitacionales que pueden tener algunos cuerpos en el Universo y otra razón, es que las soluciones exactas forman una parte integral y auto-consistente, en relación con el desarrollo y comprensión de la misma Teoría de la Relatividad. La métrica con simetría axial ha sido utilizada para la obtención de una gran cantidad de soluciones exactas externas de las Ecuaciones de Einstein [1], y muchas de éstas, en modelos de cuerpos celestes en el espacio, fundamentalmente estrellas, ya que con ella se pueden estudiar cuerpos rotantes y no rotantes con distintas características geométricas. Dicha simetría, ha sido útil en la búsqueda de soluciones a las ecuaciones de Einstein-Maxwell (soluciones interiores)

1 rodrigo.alvarado@ucr.ac.cr

considerando el potencial electromagnético, como se puede notar en varios trabajos [1-10], en donde se establecen soluciones asintóticas para potenciales de dipolos magnéticos y monopolos eléctricos y en soluciones interiores donde se utiliza el modelo del fluido o líquido ideal [1].

Las soluciones interiores exactas a las ecuaciones de Einstein, son de gran interés, incluso para los modelos más simples en los que éstas se obtienen. Las más conocidas son las relacionadas con la Cosmología, donde generalmente se tiene la ventaja de contar con una simetría dependiente del parámetro temporal y con características que permiten obtener soluciones de una manera relativamente simple. En Cosmología las distintas etapas del Universo, se estudian, generalmente, suponiendo modelos en las ecuaciones del estado, por ejemplo, el modelo tipo polvo, ultrarelativista, etc [10]. Cada uno de ellos aporta un gran conocimiento a dicha disciplina y en general a la Teoría de la Relatividad. Por lo anterior se entiende el interés que existe por obtener soluciones exactas que sean interiores.

En la Teoría de Partículas, donde se considera el campo gravitacional y la relación auto-consistente con otros campos de las partículas, base de soluciones solitónicas (soluciones similares a partículas) [11,12,13], se han logrado obtener soluciones interiores de las partículas en distintas simetrías. Una característica de las soluciones con simetría esférica es que a éstas se le puede exigir condiciones especiales [11]: a) ser estática o estacionaria, b) en todo lugar regular, c) tener asíntota plana en el infinito, mientras que si la simetría es cilíndrica, la condición c) cambia por ´´ser localizable en el espacio´´. Para algunos otros tipos de simetría, como la planar, hemos considerado condiciones similares a las requeridas para la simetría cilíndrica [14].

En alguna medida, las condiciones requeridas en soluciones solitónicas, han sido reformuladas en otros tipos de soluciones donde intervienen otros campos, o modelos de partículas. Por ejemplo, utilizando el modelo del fluido o líquido ideal, se han formulado condiciones de aceptabilidad física [15,16], siempre y cuando la simetría sea esférica, aunque la presión puede ser isótropa o anisótropa. El interés fundamental es modelar el interior de estrellas de Neutrones y Enanas Blancas, por lo que una de las condiciones importantes es que la densidad energética volumétrica y la presión sean positivas. Para otros tipos de simetría como la de Weyl-Papapetrou, todas las condiciones formuladas para la simetría esférica, no se cumplen para ninguna de las soluciones conocidas. Por ejemplo, para la solución de Neugebauer y Meinel [17] de un disco rotante con presión nula, la densidad energética obtenida no es volumétrica, sino superficial, por lo que ésta decrece sobre el plano $z = 0$, es regular en $\rho = 0$, pero nula si la velocidad angular $\Omega = 0$. Otro ejemplo es la solución del polvo de Wahlquist [18], para la cual la densidad energética volumétrica decrece, pero hacia el interior, o la solución de Van Stockum [19], como caso particular de la simetría de Weyl-Papapetrou, donde la densidad energética volumétrica es regular en $\rho = 0$, pero no decrece con el aumento de ρ, además de presentar curvas cerradas de tipo tiempo (que permiten viajes al pasado), similares a las que se presentan en algunas soluciones como las de agujeros de gusanos, métrica de Kerr, etc.

Problemas como la ley que rige la densidad de los cuerpos celestes, son en gran medida actuales, y basta con percatarse que incluso para la física newtoniana dicho problema no es ni trivial, ni falto de interés [10]. Por lo anterior este trabajo pretende ser parte del esfuerzo por obtener, aunque sea para un modelo muy particular, una solución que pueda servir de base para el análisis de magnitudes como la densidad, como continuación en el desarrollo del estudio de estas magnitudes internas de los cuerpos celestes y de la Teoría de la Relatividad.

II. Métrica de simetría axial y ecuaciones de Einstein

La métrica con simetría axial del tipo de Weyl-Papapetrou, tiene la forma siguiente [20]:

$$ds^2 = g^{\mu\nu}dx_\mu dx_\nu = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = Fdt^2 - 2\omega F dt d\varphi - e^{2\gamma}F^{-1}\left(d\rho^2 + dz^2\right) - \left(\rho^2 F^{-1} - F\omega^2\right) d\varphi^2, \quad (1)$$

en donde $g_{\mu\nu}$, $g^{\mu\nu}$ representan los componentes del tensor métrico covariante y contravariante respectivamente y ω, F, γ, son funciones arbitrarias de ρ y z [21].

Las ecuaciones que resolveremos son las ecuaciones de Einstein:

$$R_{\mu\nu} = \kappa\left(T_{\mu\nu} - \frac{g_{\mu\nu}}{2}T\right),$$

donde $\kappa = 8\pi G/c^4$, G es la constante de gravitación Universal, c la rapidez de la luz en el vacío, $R_{\mu\nu}$ es el tensor de Ricci, $T_{\mu\nu}$ el tensor de Energía Impulso y $T = g^{\mu\nu}T_{\mu\nu}$, la traza del tensor de Energía Impulso.

Los componentes del tensor de Ricci que son distintos de cero, en este trabajo se han obtenido y escrito de la forma siguiente:

$$R_{00} = \frac{e^{-2\gamma}F^2}{2\rho}\left[\frac{F^2}{\rho}(\nabla\cdot\omega)^2 + \nabla\cdot\left(\rho\nabla\ln(F)\right)\right], \quad (2.a)$$

$$R_{03} = -R_{00}\omega - \frac{e^{-2\gamma}\rho}{2}\nabla\cdot\left(\frac{F^2\nabla\omega}{\rho}\right), \quad (2.b)$$

$$R_{11} = \frac{1}{2}\left[\frac{F^2\omega_{,\rho}^2}{\rho^2} - 2\rho\nabla\cdot\left(\frac{1}{\rho}\nabla\gamma\right) + \frac{1}{\rho}\nabla\cdot\left(\rho\nabla\ln(F)\right) - \frac{F_{,\rho}^2}{F^2}\right], \quad (2.c)$$

$$R_{12} = R_{21} = \frac{1}{2}\left(\frac{F^2\omega_{,\rho}\omega_{,z}}{\rho^2} + \frac{2\gamma_{,z}}{\rho} - \frac{F_{,\rho}F_{,z}}{F^2}\right), \quad (2.d)$$

$$R_{22} = \frac{1}{2}\left[\frac{F^2\omega_{,z}^2}{\rho^2} - \frac{2}{\rho}\nabla\cdot\left(\rho\nabla\gamma\right) + \frac{1}{\rho}\nabla\cdot\left(\rho\nabla\ln(F)\right) - \frac{F_{,z}^2}{F^2}\right], \quad (2.e)$$

$$R_{33} = R_{00}\left(\frac{\rho^2}{F^2} - \omega^2\right) - 2R_{03}\omega\ . \quad (2.f)$$

El escalar de la curvatura $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ se puede escribir como

$$R = -Fe^{-2\gamma}\left(R_{11} + R_{22}\right) = -\frac{R_{00}}{F} - \frac{F}{2e^{2\gamma}}\left[-4\nabla\cdot\nabla\gamma + \frac{1}{\rho}\nabla\cdot\left(\rho\nabla\ln(F)\right) - \frac{(\nabla F)\cdot(\nabla F)}{F^2}\right]. \quad (3)$$

En las ecuaciones anteriores, el operador ∇ lo he definido como

$$\nabla = \hat{\rho}_0\partial_\rho + \hat{z}_0\partial_z, \quad (4)$$

donde $\hat{\rho}_0$ y $\hat{z}_0$ son vectores unitarios perpendiculares entre sí y ∂_ρ, ∂_z las derivadas parciales con respecto a ρ y z, respectivamente.

Las ecuaciones de Einstein que no son iguales a cero, se pueden escribir de la forma:

$$R_{00} = \kappa\left(T_{00} - F\,T/2\right), \quad (5.a)$$

$$R_{03} = \kappa\left(T_{03} + F\omega T/2\right), \quad (5.b)$$

$$R_{11} = \kappa\left(T_{11} + e^{-2\gamma}F^{-1}\,T/2\right), \quad (5.c)$$

$$R_{12} = \kappa T_{12}, \quad (5.d)$$

$$R_{22} = \kappa\left(T_{22} + e^{-2\gamma}F^{-1}\,T/2\right), \quad (5.e)$$

$$R_{33} = \kappa\left(T_{33} - \left(\rho^2F^{-1} - F\omega^2\right)T/2\right). \quad (5.f)$$

III. Soluciones a las ecuaciones de Einstein para un Líquido Ideal

El tensor del líquido ideal, tiene la forma:

$$T_{\alpha\beta} = (\mu + p)\; u_\alpha u_\beta - g_{\alpha\beta}\,p, \quad (6)$$

y $u^\alpha u_\alpha = 1$, donde μ, p, u_α y u^α son la densidad de energía, la presión, la velocidad covariante tetradimensional y la velocidad contravariante tetradimensional respectivamente [10].

En este trabajo se considera que el fluido no se mueve en ρ y z, por lo cual los componentes de $u^\alpha = dx^\alpha / ds$ ($u_\mu = g_{\mu\alpha}u^\alpha$) u^1, u^2 son nulos. Los componentes de la velocidad tetradimensional que son distintos de cero son:

$$u^0 = \left(F(1-\omega\,\Omega)^2 - \rho^2\,\Omega^2/F\right)^{-1/2}, \text{ y } u^3 = \Omega\,u^0, \quad (7)$$

donde $\Omega = d\varphi/dt$, es la velocidad angular.

Nótese, que para el modelo de un líquido ideal del tipo (6), se cumple que $R_{12} = 0$, o sea que

$$\gamma_{,z} = \frac{\rho}{2}\left(\frac{F_{,\rho}F_{,z}}{F^2} - \frac{F^2\omega_{,\rho}\omega_{,z}}{\rho^2}\right), \tag{8}$$

De las ecuaciones (2.a)-(2.f) se obtiene

$$g^{00}R_{00} + 2g^{03}R_{03} + g^{33}R_{33} = 0, \tag{9}$$

ó

$$R_0^0 + R_3^3 = 0, \tag{10}$$

y de (9), obtenemos

$$T_0^0 + T_3^3 = T, \tag{11}$$

por lo que

$$T_1^1 + T_2^2 = 0 \rightarrow T_1^1 = -T_2^2. \tag{12}$$

La igualdad (12) es independiente del tipo de problema, en busca de soluciones interiores que se considere, ésta tiene un carácter simétrico intrínseco dentro de la métrica de Weyl-Papapetrou.

Para el caso de un líquido ideal (6), utilizando (12), obtenemos que debe de cumplirse con la igualdad

$$u^1u_1 + u^2u_2 = \frac{2p}{\mu + p}, \tag{13}$$

como u^1 y u^2 son nulos, de la igualdad (13), concluimos que $p = 0$. Notemos además que si restamos $R_{22} - R_{11} = 0$ y despejamos a $\gamma_{,\rho}$ obtenemos la siguiente relación

$$\gamma_{,\rho} = \frac{F^2}{4\rho}\left(\omega_{,z}^2 - \omega_{,\rho}^2\right) - \frac{\rho}{4F^2}\left(F_{,z}^2 - F_{,\rho}^2\right). \tag{14}$$

Para el caso analizado se tiene que $T_{12} = 0$, y al derivar (8) con respecto a ρ y derivar (14) con respecto a z y luego compararlos (asumimos que γ es continua), se obtiene que

$$F_{,z}\rho^2 e^{2\gamma} R_{00} = F^3 \omega_{,z} \nabla \cdot \left(\frac{F^2 \nabla \omega}{\rho} \right) , \tag{15}$$

de (15), los componentes del tensor de Ricci R_{03} y R_{33} se puedan rescribir de la siguiente forma:

$$R_{03} = -R_{00} \left(\omega + \frac{\rho^2 F_{,z}}{F^3 \omega_{,z}} \right), \tag{16}$$

$$R_{33} = R_{00} \left(\frac{\rho^2}{F^2} + \omega^2 + \frac{2\omega\rho^2 F_{,z}}{F^3 \omega_{,z}} \right). \tag{17}$$

La divergencia del tensor de energía impulso $T^{\mu}_{\nu;\mu} = 0$, se puede escribir, para nuestro caso, de la forma siguiente:

$$T^{00}\nabla g_{00} + 2T^{03}\nabla g_{03} + T^{33}\nabla g_{33} = 0. \tag{18}$$

De (18), y considerando el tensor energía impulso (6) para el líquido ideal, con las propiedades establecidas anteriormente, y la forma de los componentes de la velocidad tetradimensional (7), podemos obtener la siguiente igualdad

$$\zeta \left(\nabla g_{00} + 2\Omega \nabla g_{03} + \Omega^2 \nabla g_{33} \right) = 0, \tag{19}$$

donde $\zeta = \mu \left(u^0\right)^2$. De (19) tenemos que esto es solamente posible en dos casos: 1. cuando $\mu = 0$ ó, 2. cuando $\nabla g_{00} + 2\Omega \nabla g_{03} + \Omega^2 \nabla g_{33} = 0$. El primer caso significa que no se tiene fluido (solución externa), por lo que analizaremos el segundo caso.

La igualdad a cero de (19), tiene un carácter vectorial, por lo que en realidad están escritas dos ecuaciones, éstas, considerando a $\mu \neq 0$, son:

$$F_{,z} - 2\Omega\left(F_{,z}\omega + \omega_{,z}F\right) - \Omega^2 \left(-\frac{\rho^2 F_{,z}}{F^2} - 2\omega\omega_{,z}F - \omega^2 F_{,z} \right) = 0, \tag{20.a}$$

$$F_{,\rho} - 2\Omega\left(F_{,\rho}\omega + \omega_{,\rho}F\right) - \Omega^2 \left(2\frac{\rho}{F} - \frac{\rho^2 F_{,\rho}}{F^2} - 2\omega\omega_{,\rho}F - \omega^2 F_{,\rho} \right) = 0. \tag{20.b}$$

Con ayuda de las ecuaciones de Einstein (5), de (15) y los componentes del tensor $R_{\mu\nu}$ (2.a) y (2.b), se puede obtener la siguiente igualdad

$$\frac{F^3}{\rho^2}\frac{T_{03}+T_{00}\omega}{\left(T_{00}-g_{00}T/\ 2\right)}=\frac{F_{,z}}{\omega_{,z}}; \tag{21}$$

la cual es equivalente a la (20.a).

De las ecuaciones de Einstein se puede obtener, que la densidad de energía μ para el caso de un líquido ideal, satisface la siguiente relación:

$$\kappa\mu=\frac{2R_{00}}{F}\frac{\left[(1-\omega\Omega)^2-\frac{\rho^2\Omega^2}{F^2}\right]}{\left[(1-\omega\Omega)^2+\frac{\rho^2\Omega^2}{F^2}\right]}. \tag{22}$$

Obtendremos una solución considerando que la velocidad angular es constante y el sistema de referencia se elige de forma que ésta se pueda considerar igual a cero ($\Omega=0$). En dicho caso, de las ecuaciones (20.a) y (20.b) se puede notar que $F=const.$, lo cual nos indica que el valor que puede tener Ω está relacionado con $g_{00}=F$ de la métrica. Otra cosa interesante es que si $\Omega=0$ esto no significa que $\omega=0$. Contrario a lo que algunos autores han considerado en sus análisis a soluciones externas o interiores (por ejemplo [22, 23]), la relación principal de la velocidad angular (en la forma definida anteriormente y relacionada con nuestro sistema de referencia) con la métrica, es con F . A pesar de lo anterior, la situación cambia para un observador muy alejado del sistema de referencia, para el cual la magnitud de la velocidad tridimensional V, se relaciona con ω (siempre y cuando $\rho>\omega$), de la forma $V=\frac{\omega}{\rho}$ (ver [1] ó [24]).

Los componentes del tensor energía impulso que son distintos de cero, al considerar $\Omega\neq 0$, son T^{00}, T^{03} y T^{33}. Entre estos componentes existe la relación siguiente

$$T^{00}=\frac{\mu}{F},\qquad T^{03}=\Omega T^{00},\qquad T^{33}=\Omega^2T^{00}. \tag{23}$$

Como $F=const.$, de (2.b) tenemos que los componentes R_{03} y R_{00}, están relacionados entre sí de la forma siguiente

$$R_{03}=-\omega R_{00}-\rho F^2\frac{e^{-2\gamma}}{2}\nabla\cdot\frac{\nabla\omega}{\rho}. \tag{24}$$

Considerando la igualdad (2.b) ó (24) y (21) se obtiene que

$$\frac{F_{,z}}{\omega_{,z}} = \frac{\left(T_{03} + T_{00}\omega\right)F^3}{\left(\left(T_{00} - 1/2 g_{00} T\right)\rho^2\right)} = 0 \ ; \tag{25}$$

de donde se concluye

$$R_{00}\omega + R_{03} = 0$$

por lo que de la igualdad anterior y (24) se obtiene

$$\nabla \cdot \left(\frac{\nabla\omega}{\rho}\right) = 0 = \omega_{,\rho,\rho} + \omega_{,z,z} - \frac{\omega_{,\rho}}{\rho} = 0 . \tag{26}$$

La ecuación (26), no permite soluciones en el inicio del sistema de referencia, por lo que las soluciones que pueden encontrarse para ella, deben ser consideradas excluyendo dicho punto [26].

La solución encontrada a la ecuación (26) es

$$\omega = A\sqrt{\rho^2 + (z+b)^2} + 1/2\rho^2\left(zc_1 + c_2\right) + c_3 z + c_0 \tag{27}$$

en donde A, b, c_0, c_1, c_2 y c_3 son constantes.

Integrando la ecuación (8) y la (14) se obtiene la función γ de la métrica, la cual tiene la forma

$$\begin{aligned} \gamma = & -1/4\, F^2 \left[\ln\left(\frac{\left(\rho^2 + (z+b)^2\right)^{A^2} \left(z + b + \sqrt{\rho^2 + (z+b)^2}\right)^{2Ac_3}}{\rho^{(A+c_3)^2}\rho_0^{(A-c_3^2)}} \right) \right] + \\ & -1/4\, F^2 \left[A\left(c_1(z-b) + 2c_2\right)\sqrt{\rho^2 + (z+b)^2} \right] + \\ & -1/4\, F^2 \left[1/2\,\rho^2 \left(\left(zc_1 + c_2\right)^2 - c_1c_3 - 1/8\,\rho^2 c_1^2 \right) + 2zc_2c_3 + z^2 c_1 c_3 \right] \end{aligned} \tag{28}$$

donde ρ_0 es una constante con mismas unidades que ρ.

Con (2.a), (27) y (28), encontramos la densidad de energía μ (22) , cuya la forma es:

$$\mu = \frac{F^3}{\kappa\rho^2}\left[A^2 + \frac{2A\left(\rho^2\left(zc_1 + c_2\right) + (z+b)\left(1/2\,\rho^2 c_1 + c_3\right)\right)}{\left(\sqrt{\rho^2 + (z+b)^2}\right)} + \rho^2\left(zc_1 + c_2\right)^2 + \left(1/2\,\rho^2 c_1 + c_3\right)^2 \right] e^{-2\gamma} . \tag{29}$$

La igualdad (29), es la relación buscada que establece la forma en que la densidad μ depende de los factores métricos (R_{00}, F) para el caso analizado. Para la solución obtenida se pueden analizar distintos casos dependiendo del valor de las constantes.

Veamos los siguientes casos.

Caso 1.

Consideremos que $\rho_0 = 1,\ b,\ c_0,\ c_1,\ c_2$ y c_3 son iguales a cero. Para lo cual se obtiene que

$$\gamma = -1/4\,F^3\left(\ln\left[\frac{\left(\rho^2 + z^2\right)^{A^2}}{\rho^{A^2}}\right]\right). \tag{30}$$

De (29), (30) y considerando las condiciones anteriores, encontramos que

$$\mu = \frac{F^3 A^2}{\kappa\rho^2}\left(\rho^2 + z^2\right)^{F^2 A^2/2}. \tag{31}$$

Si A es pequeña, entonces, de (31) se obtiene

$$\mu = \frac{F^3 A^2}{\rho^2\kappa} + \frac{F^5 A^4}{2\rho^2\kappa} + O\left(A^6\right), \tag{31.a}$$

para la cual si $\rho \to \infty$, $\mu \to 0$. La velocidad tridimensional del fluido determinada por un observador en las lejanías, y cercana al plano $z = 0$, es $V = \omega/\rho = A\frac{\sqrt{\rho^2 + z^2}}{\rho}$, la cual es casi constante e igual a A, lo cual nos indica que podría servir como modelo simple para regiones donde se presenta el problema de las curvas planas en las galaxias [26]. La constante A, en general, debe de cumplir con la condición $A < 1$, el caso $A = 1$, representaría que el fluido se mueve a la rapidez de la luz, con respecto a un observador en las lejanías, lo cual asumimos imposible, por lo tanto no existen curvas cerradas de tipo tiempo en dicho caso ($g_{33} < 0$) en las cercanías al plano $z = 0$.

El punto $z = 0$ y $\rho = 0$ es un punto indeterminado para μ lo cual se aprecia en (31), y que era de esperarse [25], al igual que la línea $\rho = 0$, la cual representa una línea ajena a un espacio real, lo cual se nota de $\sqrt{-g} = \frac{\rho\exp(2\gamma)}{F}$, el cual es nulo en $\rho = 0$ (ver en [11], Cap. X, condición (82.3)). A pesar de esto, el valor de la masa cuando $z \to 0$ y $\rho \to 0$, puede existir, una opción discutida en [25] da una masa de Komar [27] negativa.

En general, de (31), la densidad resulta ser singular en la línea $\rho = 0$, por lo que sobre esta línea no se debería de contar con la estabilidad e inmovilidad de las partículas del fluido, en semejanza con lo que se presenta en la singularidad cosmológica, en la cual la regularidad de las soluciones, por ejemplo de campos escalares, se logra a través de interacciones con el campo espinorial del tipo Yukawa o de mayor no linealidad [28].

La existencia de puntos singulares se justifica, en parte, por el hecho que la Teoría de la Relatividad General es una teoría clásica del campo y no cuántica, por lo que a distancias muy reducidas los procesos cuánticos de los campos deben de tomarse en cuenta, al respecto se han hecho esfuerzos utilizando Gravedad Cuántica de Bucles [29].

Por lo anterior, sobre la línea en $z \neq 0$ y $\rho = 0$, no se deben encontrar partículas que formen parte del sistema del fluido, fuente generadora del campo gravitacional interior. Aunque lo anterior es hipotético, no deja de ser interesante por su importancia en la Astrofísica en relación con algunos núcleos activos de galaxias. Un ejemplo son las galaxias Seyfert, que suelen presentar débiles jets de partículas subatómicas (se cree son electrones y positrones, o electrones protones [30]), salientes del centro del núcleo, cuyos núcleos son modelados, hasta ahora, con ayuda de soluciones externas, y no interiores, a las ecuaciones de Einstein de agujeros negros con discos de acreción, del tipo Kerr, para los cuales también surgen masas negativas de Komar [31], y polvo y gas molecular aglomerados en forma de toroide alrededor del agujero negro [32], [30], lo cual deja una zona del espacio tiempo sin análisis desde el punto de vista de solución exacta interior relativista con el modelo del fluido o líquido ideal.

Caso 2.

Supongamos que A, c_0, c_1 y c_3, son nulas en (27). En dicho caso, la solución dada es la de Van Stockum [24], considerada no física por presentar curvas cerradas del tipo tiempo.

Caso 3.

Si A, c_0, c_2 y c_3, son nulas en (27), se presenta una solución similar a la de Van Stockum, la cual presenta curvas cerradas del tipo tiempo.

Caso 4.

Si A, c_0, c_1 y c_2, son nulas en (27), se presenta una solución similar a la de Van Stockum, la cual presenta curvas cerradas del tipo tiempo para valores de $z > \dfrac{\rho}{c_3}$.

Caso 5.

Si A, c_1, c_2 y c_3, son nulas en (27), la métrica es la del mundo plano de Minskowski [10].

Otras opciones se pueden analizar, veamos la siguiente

$$\omega = A\sqrt{\rho^2 + |z|^2} - A|z|. \tag{32}$$

Esta solución pierde sentido en $z = 0$, ya que en (26) surge el término $2\delta(z)$, el cual se indefine en $z = 0$, y representa que la solución (32) no puede ser considerada en el plano $z = 0$. Por lo establecido antes, tampoco puede ser considerada válida en la línea $\rho = 0$. Con estas restricciones en cuenta, se tiene que (28) y (29), se pueden rescribir, haciendo el cambio $z \to |z|$, igualando a cero c_0, c_1, c_2 y b, y considerando que $c_3 = -A$, $A < 1$ (por lo establecido en el caso 1), y $F = 1$, de donde obtendremos que (29), toma la forma

$$\mu = \frac{\left(\dfrac{\sqrt{\rho^2+|z|^2}}{|z|+\sqrt{\rho^2+|z|^2}}\right)^{A^2} A^2\left(2|z|\left(|z|-\sqrt{\rho^2+|z|^2}\right)+2\rho^2\right)}{\rho^2\left(\rho^2+|z|^2\right)}, \quad z,\rho \neq 0. \tag{33}$$

De las soluciones (32) y (33), se tiene que: 1. La métrica (1), no presenta curvas cerradas del tipo tiempo, 2. La densidad (33) es nula en las lejanías cuando $\rho \to \infty$ y cuando $z \to \infty$, en forma separada ó en conjunto, 3. La densidad (33), en su dependencia con z, tiene la forma aparente solicitada para la Vía Láctea en [33] (ver figura 1), 4. La velocidad tridimensional determinada por un observador en las lejanías $V = \omega / \rho$, es aproximadamente igual a A, en las cercanías con el plano $z = 0$, pero nula si $|z| >> \rho$.

IV. Resultados y discusión

De la simetría axial de Weyl-Papapetrou, se obtuvo un conjunto de igualdades, a través de las ecuaciones de Einstein, que relacionan una serie de estructuras métricas entre sí ((2.b), (2.f), (3) y (12)), las cuales se cumplen en general. Para algunos modelos de fluido ideal con presión nula, se obtuvieron soluciones interiores exactas, las cuales si bien es cierto limitadas en cuanto a su aplicación, permiten hacer modelos de las densidades de cuerpos celestes o sistemas de estos como las galaxias.

Del trabajo se obtiene que para el modelo del líquido ideal con $p = 0$ y $u^1 = u^2 = 0$, la relación mayor entre los términos geométricos, o funciones, de la simetría utilizada, con la densidad energética, se presenta fundamentalmente por la función ω. Esto se nota si consideramos que $\omega = const.$ y derivamos (8) con respecto a ρ y (14) con respecto a z y se comparan ambos resultados, la comparación lleva a dos posibles igualdades: **a.** $\nabla \cdot (\rho \nabla \ln(F)) = 0$ ó **b.** $F = F(\rho)$, asumiendo que **a.** es válida se tendría que $R_{00} = 0$, pero de (22) tenemos que entonces $\mu = 0$; por lo tanto la densidad de energía μ, está intrínsicamente determinada por la forma en que ω dependa de ρ y z. Asumiendo **b.** la simetría cambiaría a la cilíndrica, lo cual demuestra la importancia de la función ω en la simetría axial.

Cuando $\Omega = d\varphi / dt$ es constante y $u^1 = u^2 = 0$, entonces podemos seleccionar el sistema de manera que éste rote con el fluido rígido, de manera que $\Omega = 0$ de donde $\mu \propto R_{00}$ únicamente, lo cual significa que dicha ecuación es similar a la ecuación $\Delta\Psi = 4\pi\mu$ G y basta con conocer la forma en que depende Ψ de ρ y z para encontrar la forma en que μ depende también de ellos. En este trabajo uno de los objetivos fue encontrar esta dependencia en la forma anteriormente mencionada, para lo cual fue necesario encontrar F, ω y γ.

Ejemplos simples, permitieron encontrar μ en la forma (31) ó (33), y analizar las distintas fases que puede tener la densidad para dicho modelo y sus singularidades. La solución (31) ó (33) pueden proponerse como modelos simples de densidad volumétrica energética, para algunas zonas específicas de galaxias.

V. Referencias

[1] Stephani, H.; Kramer, D.; Maccallum, M.; Hoenselares, C.; Herlt, E., *Exact Solutions to Einstein's Field Equations*, Ts.; I., Manko, V. S., Gen. Rel. Gav., **1988**, V. 20, P. 327.

[2] Gutsunaev, Ts., I., Manko, V. S., *Phys. Lett. A.*, **1988** V.132, P.85.

[3] Hoenselaers, C., *Progr. Theor. Phys.*, **1982**, V. 67, P.697.

[4] Abramyan , C. M.; Gutsunaev, Ts., *I. Cb. Nauch. Trud. UDN,* BBK 22.31, **1991**, A44, P.62.

[5] Borzov, V. B.; Chernyaev, V. A.; Elsgolts, S. L., *Cb. Nauch. Trud. UDN*, BBK 22.31, **1991**, A44, P. 71.

[6] Chernyaev, V. A.; Elsgolts, S. L., *Cb. Nauch. Trud. UDN*, BBK 22.31, 1991, A44, P. 78.

[7] Gutsunaev, Ts. I.; Manko, V. S.; Elsgolts, S. L., *Class. Quant. Grav.*, **1989**, V.6, 41.

[8] Abramyan, C. M.; Gutsunaev, Ts. I., *Phys. Lett. A.*, **1990**, V.144, 437.

[9] Gutsunaev, Ts. I.; Elsgolts, S. L., *Vest. RUDN*, **1994**, 2, 94.

[10] Landau, L.D; Lifshitz, E.M., Teoría Clásica de los Campos V.2, Nauka, Moscú, 1988.

[11] Shikin, G. N., Osnovy Teorii Solitonov v Obshei Teorii Otnositelnosti. URSS, Moskva 1995.

[12] Bronnikov, K. A. ; Lapchinsky, V. G.; Shikin, G. N., Induced nonlinearities of sine-Gordon and polynomial types: self-gravitating solitons, M., 1983, P. 22, Preprint In-te for Nucl. Research: P-0293.

[13] Rybakov, Yu. P., O gravitatsionnom defecte massy solitonov. _V Kn.: Tezisy dokladov VI vsesoyuznoi konferentzii "Sovremennye teoreticheskie i eksperimentanie problemy teorii otnositelnostn I gravitazii" , M., iz-vo UDN, **1984**, pp 118-119.

[14] Adomu, A.; Alvarado, R.; Shikin, G.N., *Izvestia Vusov.* Fizika, **1995**, 8, 63-75.

[15] Delgaty, M. S. R.; Lake, K., *Computer Phys. Commun*. **1998**, 2-3, 395-415.

[16] Mak, M. K.; Harko, T., Anisotropic Stars in General Relativity. A459, Proceedings of Royal Society London A: Math., Phys. and Eng. Sciences, **2003**, pp 393-408.

[17] Neugebauer, G. ; Meinel R., *Phys. Rev. Let.* **1994**, 16, 2166-2168.

[18] Wahlquist, H. D., *Phys. Rev.*, **1968**, 5, 1291-1296.

[19] Stockum, W. J. Van., *Proc. Roy. Soc. Edinburgh*, **1937**, V. **57**, 135.

[20] Pappas, G.; Apostolatos, T. A., *Class. and Quant. Grav*. **2008**, 22, 228002.

[21] Chandrasekhar, S. *The mathematical theory of black holes*, ed. Oxford University Press: New York, 1992, p 273.

[22] Lobo, F.; Grawford P., Time, Closed Timelike Curves and Causality. arXiv: qr-qc/0206078, 2002.

[23] Sharif, M., Energy-momentum distribution of the Weyl-Lewis-Papapetrou and the Levi-Civita metrics. Brazilian Journal of Physics, S. Paulo, **2007**, 4, 1292-1300.

[24] Balasin, H.; Grumiller, D., Non-Newtonian behavior in weak field General Relativity for extended rotating sources. Intern. J. of Mod. Phys. D, **2008**, 3 y 4, 475-488.

[25] Bratek, L.; Jalocha, J.; Kutschera, M., Van Stockum-Bonnor spacetimes of rigidly rotating dust. Phys. Rev. D 75, **2007**, 107502.

[26] Rubin, V. C,; Ford, W. K. Jr.; Thonnard, N., Rotational properties of 21 SC galaxies with a large range of luminosities and radii, from NGC 4605 /R = 4kpc/ to UGC 2885 /R = 122 kpc/. Astrophys. Journal, Part 1, **1980**, V. 238, pp 471-487.

[27] Komar, A. Covariant conservation laws in general relativity, Phys. Rev. Let., **1959**, V. 113, P. 934-936.

[28] Alvarado, R.; Saha, B.; Shikin G. N., On Interaction of the Spinor and the Scalar Fields in the External Cosmological Gravitational Field of the Bianchi-I Type. Bulletin of RUPF, 1996, pp 38-51.

[29] Bojowald, M., Singularities and Quantum Gravity. Lecture course at the XIIth Brazilian School on Cosmology and Gravitation o qr-qc/0702144, September 2006.

[30] Andrew C. F., Active galactic nuclei, Proc. Natl. Acad. Sci U.S.A. **1999**, 96(9), 4749-4751.

[31] Ansorg, M.; Petroff, D., Negative Komar mass of single objects in regular, asymptotically flat spacetimes, Class. and Quant. Grav., **2006**, 23, L81–L87.

[32] Antonucci, R., Unified models for active galactic nuclei and quasars. Annual review of astronomy and astrophysics. **1993**, V.31 (A94-12726 02-09), 473-521.

[33] Burkhard, F.; Stefanie, P., Comment on "General Relativity Resolves Galactic Rotation Without Exotic Dark Matter" by F.I. Cooperstock & S. Tieu. New Astronomy, **2006**, 8, 608-610.