

IDENTIFICACIÓN DE MODELOS DE ORDEN REDUCIDO A PARTIR DE LA CURVA DE REACCIÓN DEL PROCESO

Víctor M. Alfaro*

Departamento de Automática, Escuela de Ingeniería Eléctrica
Universidad de Costa Rica, 2060 Costa Rica

Recibido: 15 de mayo, 2006; aceptado: 21 de septiembre, 2006

Abstract

A general identification procedure is given, for first and second orders plus time delay models, that uses two or three arbitrary points over the process reaction curve. Two simplified versions of the methods are described: the *three points 123c identification method* that uses the times required to arrive to the 25, 50 and 75% of the output total change, and the *symmetrical method* that uses points symmetrically distributed over the reaction curve. It is also described the use of the identification methods to obtain the *optimal times* for the model parameters identification. Using an example, the goodness of the models identified is compared.

Key words: identification, first order plus time delay models, second order plus time delay models.

I. Introducción

Para la sintonización de los controladores de un lazo de control realimentado, es necesario contar con información del comportamiento dinámico del proceso o sistema controlado, normalmente en forma de un modelo de orden reducido (primero o segundo orden, más tiempo muerto).

La identificación de los parámetros de estos modelos (ganancia, tiempo muerto y constantes de tiempo), puede hacerse a partir de la respuesta del proceso a un cambio escalón en la entrada, denominada *curva de reacción del proceso*.

Existen varios métodos para la determinación de estos parámetros, los cuales pueden requerir el trazo de una recta tangente en el punto de inflexión de la curva, la determinación del instante en que este punto ocurre, la determinación de los tiempos para que la respuesta alcance dos o tres porcentajes determinados del cambio total de

*email: valfaro@eie.ucr.ac.cr

la respuesta, o el cálculo de áreas definidas por las curvas de las señales de entrada y salida.

Los métodos que emplean el trazo de una recta tangente en el punto de inflexión de la curva de reacción del proceso, tienen el inconveniente que este punto usualmente es difícil de determinar en forma precisa [6, 9, 11]. Los que utilizan dos o tres puntos sobre la curva de reacción son los de uso más amplio, pero tienen el problema que los puntos utilizados son fijados por su autor, no habiendo garantía que estos provean la mejor identificación para diferentes procesos [1-3, 7-8, 10]. Todos los métodos anteriores pueden aplicarse en forma manual si se cuenta con un registro impreso de la curva de reacción.

Por su parte, los que tienen como base el cálculo de áreas, requieren del almacenamiento de los datos de las señales de entrada y salida del proceso para su procesamiento posterior. Las relaciones para la identificación de un modelo de primer orden o de polo doble más tiempo muerto, a partir de las áreas calculadas son simples, sin embargo, las relaciones para la determinación de los parámetros de un modelo de segundo orden, son un conjunto de ecuaciones algebraicas no lineales que deben resolverse numéricamente [5].

Se desea presentar aquí, las expresiones generales desarrolladas para la identificación de los parámetros de modelos de primer y segundo orden más tiempo muerto, utilizando dos o tres puntos sobre la curva de reacción, en donde estos puntos no son fijados arbitrariamente, si no que se pueden seleccionar de manera de optimizar los modelos identificados.

El artículo está organizado de la siguiente forma: en II. se presentan las ecuaciones de los modelos que se desean identificar, en III. se desarrollan los procedimientos generales de identificación, en IV. se describe el *método 123c* el cual utiliza dos o tres puntos específicos sobre la curva de reacción, en V. se explica el *método simétrico*, en el VI. el *método de los tiempos óptimos*, y en VII. se muestra un ejemplo del uso de los procedimientos de identificación desarrollados.

II. Modelos a identificar

Serán de interés aquellos modelos que pueden ser utilizados en la sintonización de controladores del tipo PID^1 , por lo que se restringirá su orden y en particular se considerarán solamente modelos para sistemas cuya respuesta, a un cambio escalón en la entrada, sea monótona creciente y que alcance un nuevo punto de equilibrio.

Los modelos a considerar son:

- Primer orden

$$G_{p1}(s) = \frac{k_p e^{-t_m s}}{\tau s + 1} \quad (1)$$

1 Proporcional - Integral - Derivativo

- Segundo orden (polo doble)

$$G_{p2}(s) = \frac{k_p e^{-t_m s}}{(\tau' s + 1)^2} \quad (2)$$

- Segundo orden (sobreamortiguado)

$$G_{p3}(s) = \frac{k_p e^{-t_m s}}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} = \frac{k_p e^{-t_m s}}{(\tau'' s + 1)(a\tau'' s + 1)}, \quad 0 < a < 1 \quad (3)$$

III. Métodos de identificación generales

Todos los procedimientos de identificación presentados, emplean la información del proceso obtenida a partir de una prueba de lazo abierto. Se considerará como entrada, una señal escalón $u(t)$ de amplitud Δu y como respuesta del sistema una señal $y(t)$ tal como se muestra en la Figura 1.

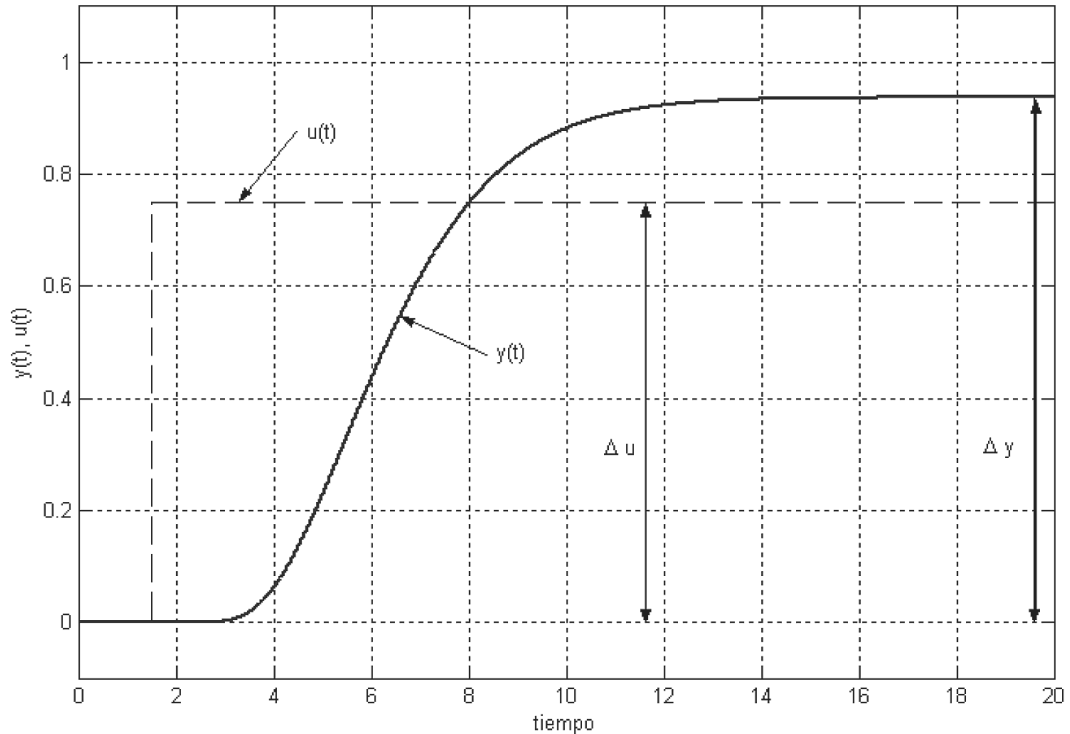


Figura 1. Curva de reacción del proceso

- **Obtención de la ganancia de los modelos**

Si el cambio total de la salida debido al cambio Δu en la entrada es Δy , la ganancia de cualquiera de los modelos se puede determinar como

$$k_p = \frac{\Delta y}{\Delta u} \quad (4)$$

- **Modelos de primer orden más tiempo muerto**

La respuesta del modelo (1) a un cambio escalón Δu en la entrada, está dada por

$$y(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t < t_m \\ k_p [1 - e^{-(t-t_m)/\tau}] \Delta u & t_m \leq t \end{cases} \quad (5)$$

De (5) se puede obtener que el tiempo requerido para alcanzar un valor de la respuesta y_x determinado, está dado por

$$t_x = t_m - \tau \ln \left(1 - \frac{1}{k_p \Delta u} y_x \right) \quad (6)$$

Se considerará en adelante que la respuesta del sistema se ha normalizado respecto a su valor final ($\Delta y = k_p \Delta u$) y se denotará a $y_x / k_p \Delta u$ simplemente como x , donde x es un valor entre cero y uno, el cual denota el punto fraccional que se desea alcanzar en la respuesta, entonces (6) se puede escribir como

$$t_x = t_m + f_1(x) \tau \quad (7)$$

en donde

$$f_1(x) = -\ln(1 - x) \quad (8)$$

Para el modelo (1) deben determinarse dos parámetros (τ , t_m), por lo que es necesario determinar los tiempos (t_1 , t_2) requeridos para alcanzar dos puntos (x_1 , x_2) sobre la curva, entonces

$$\begin{aligned} t_1 &= t_m + f_1(x_1) \tau \\ t_2 &= t_m + f_1(x_2) \tau \end{aligned} \quad (9)$$

Resolviendo (9) para t_m y τ , se obtiene que:

$$\begin{aligned}\tau &= \frac{t_2 - t_1}{f_1(x_2) - f_1(x_1)} \\ t_m &= t_2 - f_1(x_2)\tau\end{aligned}\quad (10)$$

Las ecuaciones (10) se pueden reescribir como

$$\begin{aligned}\tau &= a_1 (t_2 - t_1) \\ t_m &= b_1 t_1 + (1 - b_1) t_2\end{aligned}\quad (11)$$

donde

$$\begin{aligned}a_1 &= \frac{1}{f_1(x_2) - f_1(x_1)} \\ b_1 &= a_1 f_1(x_2)\end{aligned}\quad (12)$$

Las ecuaciones (11) y (12) junto con (8) y (4) son las expresiones generales para identificar un modelo de primer orden más tiempo muerto, utilizando los tiempos requeridos para que la respuesta alcance cualesquiera dos puntos sobre la curva de reacción.

- **Modelo de segundo orden de polo doble**

La respuesta del modelo (2) a un cambio escalón Δu en la entrada, está dada por la ecuación

$$y(t) = \begin{cases} k_p \left\{ 1 - \left[1 + \left(\frac{t - t'_m}{\tau'} \right) \right] e^{-(t - t'_m)/\tau'} \right\} \Delta u & 0 \leq t < t'_m \\ k_p & t'_m \leq t \end{cases}\quad (13)$$

Definiendo el tiempo normalizado $t' = (t - t'_m)/\tau'$, se puede encontrar que la respuesta normalizada del modelo en dos instantes t'_1 y t'_2 está dada por

$$\begin{aligned}x_1 &= 1 - (1 + t'_1) e^{-t'_1} \\ x_2 &= 1 - (1 + t'_2) e^{-t'_2}\end{aligned}\quad (14)$$

Este sistema de ecuaciones debería resolverse para determinar t'_1 y t'_2 en función de x_1 y x_2 , y a partir de ellos obtener t'_m y τ' .

Como no es posible una solución analítica de las ecuaciones (14), se supondrá que existe una función $f_2(x)$, que permite determinar el tiempo requerido t_x para alcanzar el punto x en la curva de respuesta como

$$t_x = t'_m + f_2(x) \tau' \quad (15)$$

Utilizando (15) y dos puntos sobre la curva de reacción, los parámetros del modelo (2) serían

$$\begin{aligned} \tau' &= a_2 (t_2 - t_1) \\ t'_m &= b_2 t_1 + (1 - b_2) t_2 \end{aligned} \quad (16)$$

donde

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{1}{f_2(x_2) - f_2(x_1)} \\ b_2 &= a_2 f_2(x_2) \end{aligned} \quad (17)$$

Las ecuaciones (16) y (17) son similares a las ecuaciones (11) y (12) derivadas para el modelo de primer orden más tiempo muerto.

Para obtener la función $f_2(x)$ buscada, se empleó una ecuación de la forma (14) para determinar los tiempos requeridos para alcanzar puntos en la curva de respuesta desde 0,02 hasta 0,98 (2 por ciento al 98 por ciento), y determinar de éstos, los valores de $f_2(x)$, los cuales se muestran en la Figura 2.

Un ajuste de curvas por cuadrados mínimos permitió determinar las siguientes expresiones para $f_2(x)$

$$f_2(x) = \frac{0,0840 + 3,6888 x - 0,4114 x^2 - 2,8474 x^3}{0,6581 + 2,2713 x - 4,4782 x^2 + 1,6201 x^3}, \text{ para } 0,02 \leq x \leq 0,98 \quad (18)$$

y

$$f_2(x) = \frac{0,3566 + 4,0587 x - 2,6865 x^2}{1,4103 - 0,4542 x - 0,6532 x^2}, \text{ para } 0,10 \leq x \leq 0,90 \quad (19)$$

Como se verá más adelante con un ejemplo, los puntos de interés sobre la curva de reacción estarán normalmente entre $0,10 \leq x \leq 0,90$, por lo que la ecuación más simple (19), se puede utilizar junto con las ecuaciones (16), (17) y (4) para determinar los parámetros de un modelo de segundo orden de polo doble, utilizando los tiempos para alcanzar cualesquiera dos puntos sobre la curva de reacción.

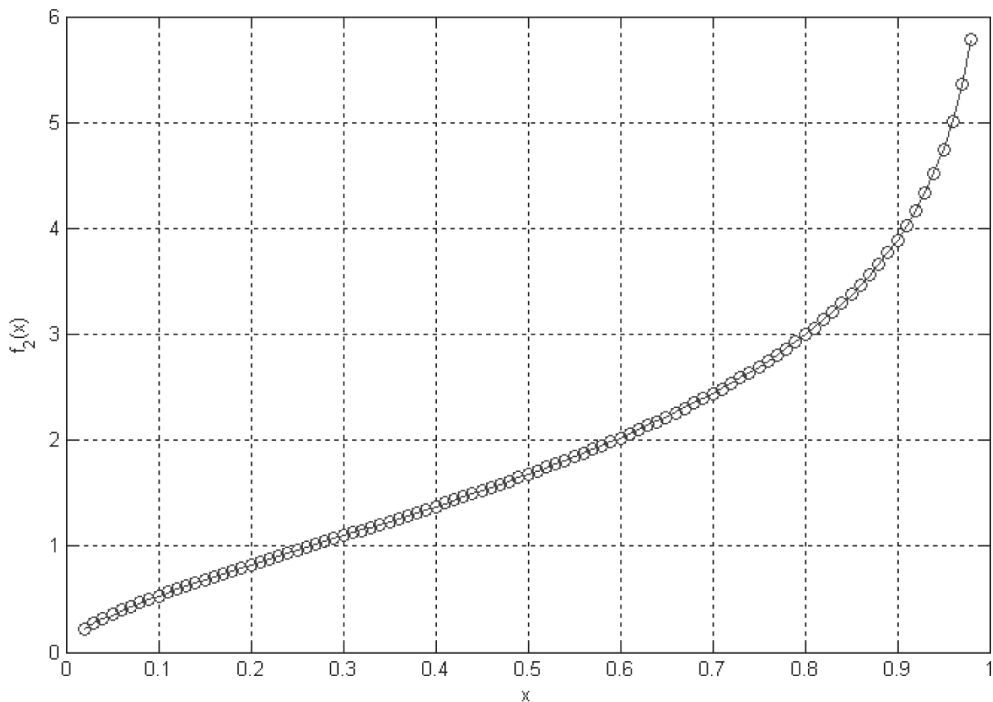


Figura 2. Valores de la función $f_2(x)$ de la ecuación (15)

- **Modelo de segundo orden sobreamortiguado**

La respuesta del modelo (3) a un cambio escalón unitario en la entrada, está dada por la ecuación

$$y(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t < t_m'' \\ k_p \left[1 - \left(\frac{1}{1-a} \right) e^{-(t-t_m'')/\tau''} + \left(\frac{a}{1-a} \right) e^{-(t-t_m'')/a\tau''} \right] \Delta u & t_m'' \leq t, 0 < a < 1 \end{cases} \quad (20)$$

En este caso se debe identificar un parámetro más que en los dos casos anteriores.

Método simplificado

Se supondrá primero que se ha obtenido ya un modelo de polo doble con los parámetros k_p , t_m' y τ' . Se tiene que la suma de todas las constantes de tiempo o *tiempo de residencia*, está dado por

$$\tau_T = t_m' + 2\tau' \quad (21)$$

para el modelo de polo doble, y por

$$\tau_T = t_m'' + (1+a)\tau'' \quad (22)$$

para el modelo de segundo orden sobreamortiguado.

Si se toma el tiempo muerto del modelo sobreamortiguado igual al tiempo muerto del modelo de polo doble ($t_m'' = t_m'$), de (21) y (22) se obtiene que

$$2\tau' = (1+a)\tau'' \quad (23)$$

Resolver (23) para τ'' requiere del conocimiento de un punto adicional sobre la curva de respuesta del sistema, el cual se tomará arbitrariamente como $x = 0,5$ (50%). Se encontró que el tiempo requerido para que la respuesta del sistema de segundo orden sobreamortiguado alcance el 50% de su valor final, se puede estimar con la expresión

$$t_{50} = t_m' + (0,7181 + 0,9922 a)\tau'' \quad (24)$$

Utilizando (23) y (24) se puede determinar que a está dada por

$$a = \frac{t_{50} - t_m' - 1,4362\tau'}{1,9844\tau' - t_{50} + t_m'} \quad (25)$$

Entonces

$$\tau'' = \frac{2\tau'}{1+a} \quad (26)$$

y las constantes de tiempo del modelo sobreamortiguado serían

$$\tau_1 = \tau'' \quad , \quad \tau_2 = a\tau'' \quad (27)$$

Método general

Para la obtención de expresiones generales para la identificación de un modelo de segundo orden sobreamortiguado, se requieren tres puntos sobre la curva de reacción.

Supóngase que se puede encontrar una función $f_3(a,x)$, tal que el tiempo requerido para alcanzar un punto x en la curva de la respuesta, está dado por

$$t_x = t_m'' + f_3(a,x)\tau'' \quad (28)$$

Seleccionando tres puntos arbitrarios sobre la curva de reacción, se tiene

$$t_{x_i} = t_m'' + f_3(a, x_i) \tau'', \quad i = 1, 2, 3 \quad (29)$$

Definiendo

$$\begin{aligned} \Delta t_3 &= t_{x_3} - t_{x_1} \\ \Delta t_2 &= t_{x_2} - t_{x_1} \end{aligned} \quad (30)$$

se puede determinar que estos tres tiempos están relacionados por la ecuación

$$\frac{\Delta t_{31}}{\Delta t_{21}} = \frac{f_3(a, x_3) - f_3(a, x_1)}{f_3(a, x_2) - f_3(a, x_1)} \quad (31)$$

Para determinar a se supondrá que f_3 es una función lineal de la forma

$$f_3(a, x) = K_1(x) + K_2(x) a \quad (32)$$

cuyos coeficientes se determinarán más adelante.
Utilizando (32) y (31) y despejando a se obtiene que

$$\tau'' = \frac{\Delta t_{31}}{K_1(x_3) - K_1(x_1) + [K_2(x_3) - K_2(x_1)]a} \quad (33)$$

y los parámetros del modelo serían

$$\begin{aligned} \tau'' &= \frac{\Delta t_{31}}{K_1(x_3) - K_1(x_1) + [K_2(x_3) - K_2(x_1)]a} \\ t_m'' &= t_{x_3} - [K_1(x_3) + K_2(x_3) a] \tau'' \\ \tau_1 &= \tau'', \quad \tau_2 = a \tau'' \end{aligned} \quad (34)$$

Para determinar $f_3(a, x)$ se obtuvieron los tiempos requeridos para alcanzar puntos sobre la curva de reacción entre 0,1 y 0,9 (10 al 90%) con valores de a desde 0,1 hasta 0,9. Estos valores se muestran en la Figura 3.

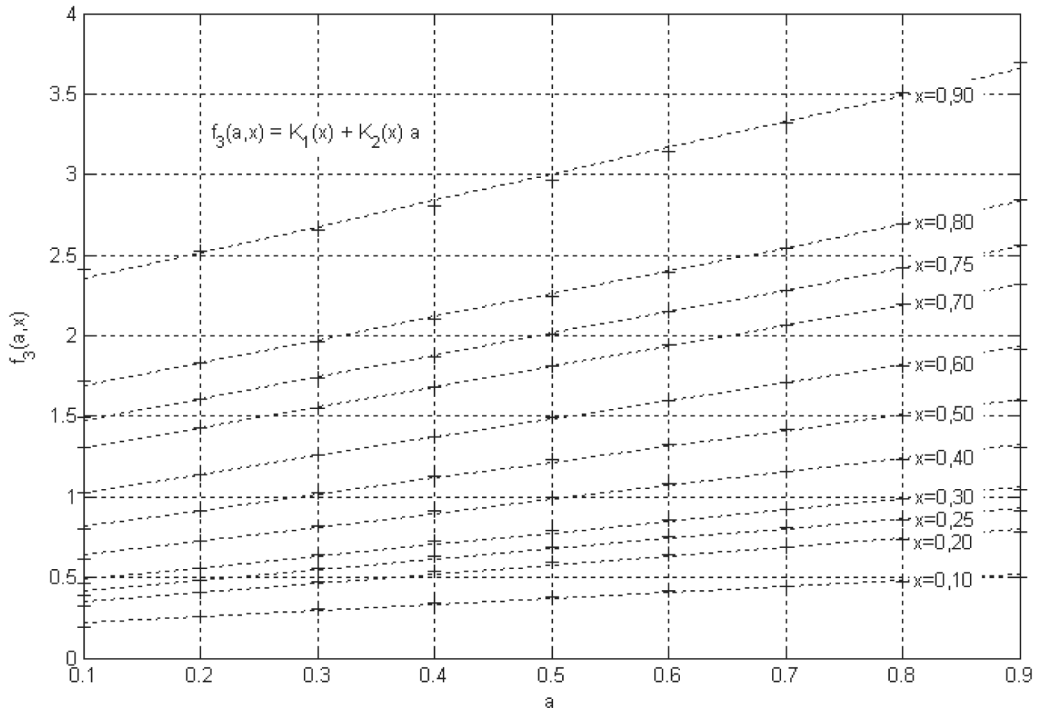


Figura 3. Valores de $f_3(a, x)$ de la ecuación (32)

Como se puede apreciar, para cada valor de x , la relación entre f_3 y a es lineal y se puede aproximar por una línea recta tal como se supuso en (32). Los valores de los coeficientes K_1 y K_2 de estas rectas se muestran en el Cuadro 1. A su vez, mediante un ajuste de cuadrados mínimos, se determinaron las siguientes ecuaciones para K_1 y K_2

$$\begin{aligned} K_1(x) &= 0,2745 + 2,4241 x^{2,6502} \\ K_2(x) &= 0,2558 + 1,4785 x \end{aligned} \quad (35)$$

Las ecuaciones (34) y (4) junto con (33) y (35) permiten identificar los parámetros de un modelo de segundo orden sobreamortiguado, utilizando los tiempos requeridos para alcanzar cualesquiera tres puntos sobre la curva de reacción del proceso.

CUADRO 1
CONSTANTES DE LA ECUACIÓN (32), $f_3(a, x)$

X	0,10	0,20	0,25	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,75	0,80	0,90
K_1	0,1781	0,2956	0,3555	0,4183	0,5560	0,7181	0,9173	1,1764	1,3421	1,5466	2,1904
K_2	0,3797	0,5626	0,6419	0,7162	0,8570	0,9922	1,1274	1,2692	1,3455	1,4275	1,6270

IV. Método 123c

El primer método de identificación de un modelo de primer orden más tiempo muerto, que utiliza dos puntos sobre la curva de reacción, fue propuesto por Smith [7]. Este seleccionó los tiempos para la identificación como los necesarios para alcanzar el 28,4 y el 63,2 por ciento del cambio total en la respuesta a una entrada escalón. Normalmente la respuesta del modelo identificado con estos puntos muestra las mayores diferencias con respecto a la respuesta del proceso real, al inicio y entre el 70 y 80% de la respuesta. Para disminuir este error, Alfaro [1] separó los dos puntos y los seleccionó arbitrariamente como los correspondientes al 25 y el 75 por ciento de la respuesta, por lo que el método se denominó originalmente "1/4 - 3/4".

- **Modelo de primer orden más tiempo muerto**

Utilizando $x_1 = 0,25$ y $x_2 = 0,75$ en (8) y (12) se obtiene que $a_1 = 0,9102$ y $b_1 = 1,2620$, pudiéndose calcular entonces los parámetros del modelo (1) con las ecuaciones

$$\begin{aligned}
 k_p &= \frac{\Delta y}{\Delta u} \\
 \tau &= 0,9102 (t_{75} - t_{25}) \\
 t_m &= 1,2620 t_{25} - 0,2620 t_{75}
 \end{aligned} \tag{36}$$

donde t_{25} y t_{75} son los tiempos requeridos para que la respuesta del sistema alcance el 25 y el 75 por ciento de su valor final.

- **Modelo de polo doble más tiempo muerto**

Los tiempos requeridos para alcanzar el 25 y el 75 por ciento de la respuesta, en el caso del modelo de polo doble, son

$$\begin{aligned}
 t_{25} &= t'_m + 0,9613\tau' \\
 t_{75} &= t'_m + 2,6926\tau'
 \end{aligned} \tag{37}$$

Resolviendo (37) para t_m' y τ' se obtiene que $a_2 = 0,5776$ y $b_2 = 1,5552$. Los parámetros del modelo se obtienen entonces con las ecuaciones

$$\begin{aligned}k_p &= \frac{\Delta y}{\Delta u} \\ \tau' &= 0,5776 (t_{75} - t_{25}) \\ t_m' &= 1,5552 t_{25} - 0,5552 t_{75}\end{aligned}\quad (38)$$

- **Modelo de segundo orden sobreamortiguado**

Procedimiento simplificado

La extensión del método "1/4 -3/4" para identificar un modelo de segundo orden sobreamortiguado, parte del modelo de polo doble obtenido en el punto anterior. Los parámetros del modelo se identifican con

$$\begin{aligned}k_p &= \frac{\Delta y}{\Delta u} \\ \tau'' &= \frac{2\tau'}{1+a} \\ \tau_1 = \tau'', \quad \tau_2 &= a\tau'', \quad t_m'' = t_m'\end{aligned}\quad (39)$$

donde a está dada por

$$a = \frac{t_{50} - t_m' - 1,4362\tau'}{1,9844\tau' - t_{50} + t_m'}\quad (40)$$

Procedimiento general

Si se han determinado los tiempos para alcanzar el 25 (t_{25}), el 50 (t_{50}) y el 75% (t_{75}) del cambio de la respuesta, utilizando las ecuaciones determinadas en III., el modelo de segundo orden se puede identificar utilizando

$$\begin{aligned}k_p &= \frac{\Delta y}{\Delta u} \\ \tau'' &= \frac{t_{75} - t_{25}}{0,9866 + 0,7036 a} \\ \tau_1 = \tau'', \quad \tau_2 &= a\tau'' \\ t_m'' &= t_{75} - (1,3421 + 1,3455 a)\tau''\end{aligned}\quad (41)$$

donde a está dada por

$$a = \frac{-0,6240 t_{25} + 0,9866 t_{50} - 0,3626 t_{75}}{0,3533 t_{25} - 0,7036 t_{50} + 0,3503 t_{75}} \quad (42)$$

Por utilizar el procedimiento de identificación anterior, los tiempos requeridos para alcanzar una, dos y tres cuartas partes del cambio total en la respuesta, este se denomina en general como *método de identificación de tres puntos 123c*. Este permite identificar los parámetros de cuatro modelos: uno de primer orden, uno de polo doble y dos de segundo orden sobreamortiguado, todos con tiempo muerto.

V. Método "simétrico"

En el desarrollo general de los métodos de identificación presentados en III., se supuso que los dos o tres puntos requeridos sobre la curva de respuesta, podían ser cualquiera. A continuación se presenta una simplificación del método general, que a diferencia del *método 123c* descrito en IV., en el cual estos puntos están fijos, estos se pueden seleccionar arbitrariamente pero ubicados simétricamente sobre la curva de respuesta.

Uno de los dos puntos se denotará como x siendo entonces el otro $1-x$. Esto hace que los tiempos que se deben determinar serán ahora $t_1 = t_x$ y $t_2 = t_{1-x} = t'_x$, con $0 < x < 0,5$. Cuando se requiera un tercer punto este corresponderá al tiempo para alcanzar el 50 por ciento del valor final de la respuesta, t_{50} .

- **Modelo de primer orden más tiempo muerto**

En este caso las ecuaciones (12) se reducen a

$$a_{1x} = \frac{1}{\ln(1-x) - \ln(x)} \quad (43)$$

$$b_{1x} = a_{1x} \ln(x)$$

y los parámetros del modelo se obtienen como

$$k_p = \frac{\Delta y}{\Delta u}$$

$$\tau = a_{1x} (t_2 - t_1) \quad (44)$$

$$t_m = b_{1x} t_1 + (1 - b_{1x}) t_2$$

Utilizando como índice de desempeño del modelo la sumatoria del error de predicción cuadrático, dada por

$$S_2 = \sum_{k=1}^n [y(k) - y_m(k)]^2 \quad (45)$$

donde $\{y(k)\}$ es el conjunto de los valores de la respuesta del proceso y $\{y_m(k)\}$ el de la del modelo, se puede determinar el valor óptimo de x . El modelo obtenido será entonces óptimo en el sentido de los mínimos cuadrados.

- **Modelo de polo doble más tiempo muerto**

En este caso las ecuaciones presentadas en III. se reducen a

$$\begin{aligned} k_p &= \frac{\Delta y}{\Delta u} \\ \tau' &= a_{2x} (t_2 - t_1) \\ t_m' &= b_{2x} t_1 + (1 - b_{2x}) t_2 \end{aligned} \quad (46)$$

con

$$\begin{aligned} a_{2x} &= \frac{1}{f_2(1-x) - f_2(x)} \\ b_{2x} &= a_{2x} f_2(1-x) \end{aligned} \quad (47)$$

donde $f_2(x)$ está dado por (18) o (19).

En la misma forma que en el caso anterior, el valor de x se puede seleccionar de manera que (45) sea mínima.

- **Modelo de segundo orden sobreamortiguado**

Procedimiento simplificado

En este caso se emplean las relaciones obtenidas en el punto III. Entonces a partir del modelo de polo doble obtenido en el punto anterior, el nuevo modelo se obtiene con

$$\begin{aligned} k_p &= \frac{\Delta y}{\Delta u} \\ \tau'' &= \frac{2\tau'}{1+a} \\ \tau_1 &= \tau'', \quad \tau_2 = a\tau'', \quad t_m'' = t_m' \end{aligned} \quad (48)$$

donde a está dada por

$$a = \frac{t_{50} - t'_m - 1,4362\tau'}{1,9844\tau' - t_{50} + t'_m} \quad (49)$$

Procedimiento general

Utilizando los puntos t_x , t'_x y t_{50} las ecuaciones (41) y (42) se convierten en

$$\begin{aligned} k_p &= \frac{\Delta y}{\Delta u} \\ \tau'' &= \frac{t'_x - t_x}{0,9866 + 0,7036 a} \\ \tau_1 &= \tau'', \quad \tau_2 = a\tau'' \\ t''_m &= t'_x - (1,3421 + 1,3455 a)\tau'' \\ a &= \frac{-0,6240 t_x + 0,9866 t_{50} - 0,3626 t'_x}{0,3533 t_x - 0,7036 t_{50} + 0,3503 t'_x} \end{aligned} \quad (50)$$

donde el valor x se deberá seleccionar de manera que (45) sea mínima.

VI. Método de los "tiempos óptimos"

Las ecuaciones generales derivadas en III. para cada uno de los modelos, se pueden utilizar para obtener sus parámetros óptimos. La optimización deberá determinar el par de puntos (x_1, x_2) sobre la curva de reacción, que producen los parámetros del modelo que minimice la sumatoria de error de predicción cuadrático (45). Los tiempos correspondientes a estos puntos, serán los *tiempos óptimos*.

Si $\bar{\theta}$ es el vector de parámetros del modelo, entonces (45) se puede expresar como

$$S_2(\bar{\theta}) = \sum_{k=1}^n e_p^2(k, \bar{\theta}) = \sum_{k=1}^n [y(k) - y_m(k, \bar{\theta})]^2 \quad (51)$$

El conjunto de parámetros óptimos $\bar{\theta}_o$ será aquel que de

$$S_{2o} = S_2(\bar{\theta}_o) = \min_{\bar{\theta}} S_2(\bar{\theta}) \quad (52)$$

VII. Prueba comparativa

Utilizando la planta

$$G_{po}(s) = \frac{e^{-0,5s}}{(2s+1)(s+1)(0,5s+1)}$$

se comparó la bondad de los modelos identificados mediante los procedimientos desarrollados, con la del modelo de segundo orden sobreamortiguado identificado por Johnson y Moradi [4] para esta misma planta. El método de Johnson y Moradi es de cuatro puntos y utiliza los tiempos para alcanzar el 30, 50, 70 y 90% del cambio total en la respuesta (ver el Apéndice).

Los parámetros de los modelos identificados se muestran en el Cuadro 2. Como era de esperarse, la exactitud de los modelos aumenta a medida que su complejidad y flexibilidad para la selección de los tiempos utilizados en el mismo crece (*método 123c*, *método simétrico*, *método de tiempos óptimos*). Sin embargo, en este caso esta diferencia no fue significativa. Por ejemplo, el índice S_2 del modelo de primer orden más tiempo muerto identificado con el método *123c*, es apenas un 3,7 por ciento mayor que el del identificado con el método óptimo. Por otra parte, aunque el índice S_2 del modelo de segundo orden sobre amortiguado identificado con el método *123c* es un 21 por ciento mayor que el del identificado con el método óptimo, la diferencia entre sus curvas de respuesta es prácticamente indistinguible.

CUADRO 2
PARÁMETROS DE LOS MODELOS DE LA PLANTA DE PRUEBA

<i>Modelo</i>	k_p	t_m	τ, τ', τ_1	τ', τ_2	$x_1 x_2 x_3 \%$	S_2 [1]
<i>Método de Johnson y Moradi</i>						
2° orden + t_m	1,0	0,86	1,80	1,33	30 50 70 90	0,0216
<i>Método 123c</i>						
1^{er} orden + t_m	1,0	1,640	2,477	-	25 75	1,1057
<i>polo doble</i> + t_m	1,0	0,844	1,572	1,572	25 75	0,0215
2° orden + t_m (<i>simpl.</i>)	1,0	0,844	1,758	1,386	25 50 75	0,0173
2° orden + t_m (<i>gen.</i>)	1,0	0,840	1,777	1,375	25 50 75	0,0143
<i>Método simétrico</i>						
1^{er} orden + t_m	1,0	1,620	2,474	-	23 77	1,0839
<i>polo doble</i> + t_m	1,0	0,827	1,582	1,582	16 84	0,0142
2° orden + t_m (<i>simplif.</i>)	1,0	0,827	1,771	1,394	16 50 84	0,0121
<i>Método de tiempos óptimos</i>						
1^{er} orden + t_m	1,0	1,590	2,517	-	21 75	1,0666
<i>polo doble</i> + t_m	1,0	0,810	1,591	1,591	12,5 88,5	0,0118

[1] evaluado en el intervalo de tiempo de 0 a 20, con $t = 0,005$

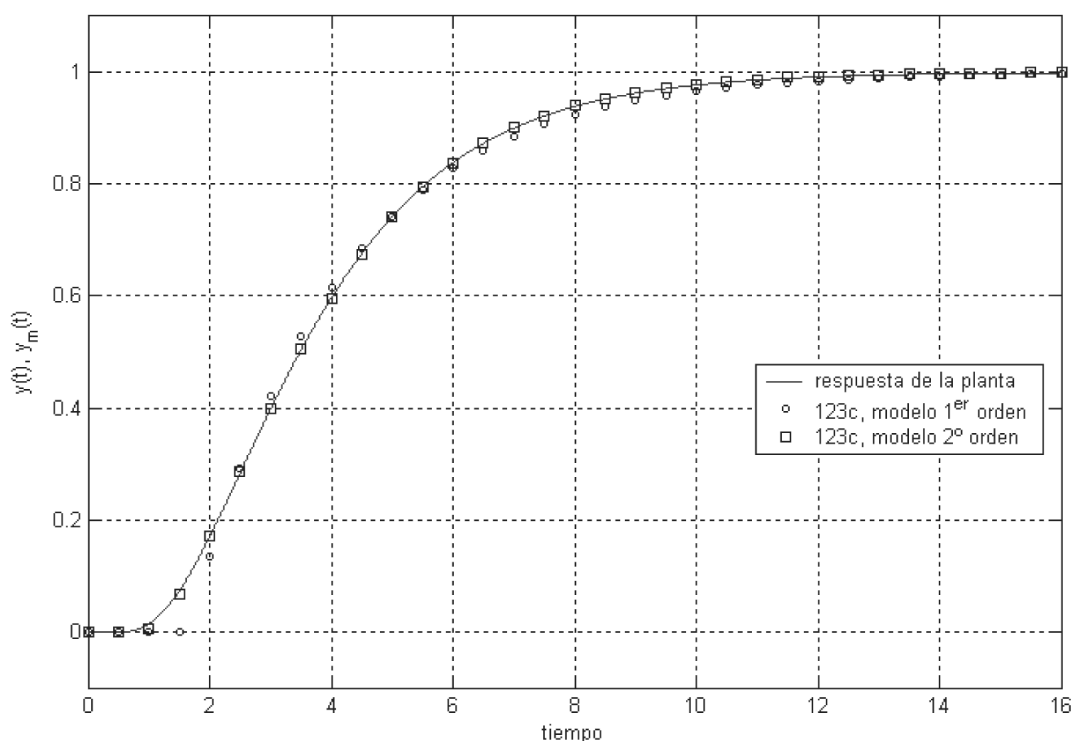


Figura 4. Respuesta de la planta y los modelos (*método 123c*).

El método de cuatro puntos de Johnson y Moradi, a pesar de ser numéricamente más elaborado que el *método 123c* y el *método simétrico*, no proveyó un modelo significativamente mejor. Su exactitud fue equivalente a la del modelo de polo doble obtenido utilizando solo dos puntos mediante el *método 123c*.

En la Figura 4 se muestra la curva de respuesta de la planta de prueba y la de dos modelos obtenidos con el *método 123c*, en la cual se aprecia como los mismos reproducen la curva de respuesta de la planta de prueba. La diferencia entre la respuesta de estos modelos y las de los otros de orden equivalente, solo puede ser medida con un índice como el S_2 ya que gráficamente son prácticamente “idénticas”.

Conclusiones

Se ha presentado el desarrollo de un método general, para la identificación de los parámetros de modelos de primer y segundo orden más tiempo muerto, que utilizan dos o tres puntos sobre la curva de reacción del proceso. Estos puntos pueden corresponder a porcentajes específicos de la respuesta como en el *método 123c*, o seleccionarse de manera de optimizar el modelo.

El *método simétrico* provee una forma eficiente de obtener los parámetros del modelo, al requerir seleccionar la ubicación óptima de solo uno de los puntos (x), ya que el otro queda inmediatamente establecido por el requisito de simetría.

La flexibilidad del *método de los tiempos óptimos* permite la identificación del mejor modelo, de primer o segundo orden, sin embargo a costa de un mayor tiempo para la obtención de los puntos óptimos.

Todos los métodos desarrollados pueden programarse para identificar los modelos a partir de la información (entrada, salida) colectada de una prueba experimental con el proceso a modelar. Sin embargo, la simplicidad del *método 123c* lo hace apto para una "identificación manual" de los modelos, utilizando una copia impresa de la curva de reacción del proceso.

Simbología

a	cociente de constantes de tiempo del modelo ($a = \tau_2 / \tau_1$)
$G(s)$	función de transferencia del modelo
k^p	ganancia estática del modelo
s^p	variable compleja
τ	constante de tiempo del modelo
t_m	tiempo muerto aparente del modelo
$u(t)$	señal de entrada
$y(t)$	señal de salida

Referencias

1. Alfaro, V.M. - *IE-431 Laboratorio de Control Automático – Notas de clase*, Escuela de Ingeniería Eléctrica, Universidad de Costa Rica, 1999.
2. Ho, W.K.; Hang, C.C.; Cao, L.S. - Tuning of PID Controllers Base don Gain and Phase Margin Specifications, *Automatica* **1995**, 31 (3), 497-502.
3. Jahanmiri, A.; Fallahi, H.R. - New Methods for Process Identification and Design of Feedback Controllers, *Trans. Of The Institute of Chemical Engineers* **1997**, 75(Part A), julio.
4. Johnson, M.A.; Moradi, M. (Editores) - *PID Control – New Identification and Design Methods*, Springer-Verlag London Ltd., 2005.
5. Nishikawa, Y.; Sannomiya, N.; Ohta, T.; Tanaka, H. - A Method for Auto-Tuning PID Controller Parameters, *Automatica* **1984**, 20 (3), 321-332.

6. Miller, J. - *Department of Chemical Engineering Report*, Louisiana State University, Baton Rouge, Louisiana, EUA, 1967.
7. Smith, C.L. - *Digital Computer Process Control*, International Textbook, Co., EUA, 1972.
8. Stark, D.M., en Mollenkamp, R.A. - *Introduction to Automatic Process Control*, Instrumentation Society of America, EUA, 1984.
9. Strejc, V. - Näherungsverfahren für aperiodische Übergangscharakteristiken, *Regelungstechnik* **1959**, 7, 124-128.
10. Viterková, M.; Vitecek, A.; Smutny, L. - Simple PI and PID Controllers tuning for monotone self regulation plant, *IFAC Workshop on Digital Control*, Terrasa, España, 2000.
11. Ziegler J.G.; Nichols, N.B - Optimum Settings for Automatic Controllers, *ASME Transactions* **1942**, 64, 759-768.

Apéndice

- **Método de identificación de Johnson y Moradi [4]**

Para identificar un modelo de segundo orden más tiempo muerto dado por (3):

1. Obtener la curva de reacción a un cambio Δu en la entrada. Determinar Δy .
2. Calcular la ganancia

$$k_p = \frac{\Delta y}{\Delta u}$$

3. Determinar los tiempos requeridos para alcanzar el 30 (t_{30}), 50 (t_{50}), 70 (t_{70}) y 90 por ciento (t_{90}) del cambio total en la respuesta.
4. Calcular

$$M_\infty = \int_0^\infty (\Delta y - y(t)) dt$$

$$R(0,5) = \frac{M_\infty - t_{30}}{t_{50} - t_{30}}, R(0,9) = \frac{M_\infty - t_{70}}{t_{90} - t_{70}}$$

5. Resolver para a_{50} y a_{90}

$$R(0,5) = 1,9108 + 0,2275a_{50} - 5,5504a_{50}^2 + 12,8123a_{50}^3 - 11,8164a_{50}^4 + 3,9735a_{50}^5$$

$$R(0,9) = -0,1871 + 0,0736a_{90} - 1,2329a_{90}^2 + 2,1814a_{90}^3 - 1,5317a_{90}^4 + 0,3937a_{90}^5$$

6. Estimar a como

$$a = \frac{a_{50} + a_{90}}{2}$$

7. Usar a para estimar los tiempos

$$\bar{t}_{30} = 0,3548 + 1,1211a - 0,5914a^2 + 0,2145a^3$$

$$\bar{t}_{50} = 0,6862 + 1,1682a - 0,1704a^2 - 0,0079a^3$$

$$\bar{t}_{70} = 1,1988 + 1,0818a + 0,4043a^2 - 0,2501a^3$$

$$\bar{t}_{90} = 2,3063 + 0,9017a + 1,0214a^2 + 0,3401a^3$$

8. Calcular la constante de tiempo

$$\tau'' = \frac{1}{3} \left[\frac{t_{90} - t_{70}}{\bar{t}_{90} - \bar{t}_{70}} + \frac{t_{70} - t_{50}}{\bar{t}_{70} - \bar{t}_{50}} + \frac{t_{50} - t_{30}}{\bar{t}_{50} - \bar{t}_{30}} \right]$$

9. Calcular el tiempo muerto

$$t_m'' = \frac{t_{90} + t_{70} + t_{50} + t_{30}}{4} - \left(\frac{\bar{t}_{90} + \bar{t}_{70} + \bar{t}_{50} + \bar{t}_{30}}{4} \right) \tau$$