Ciencia y Tecnología, 24(1): 65-70, 2006
ISSN: 0378-0524

LAS CUERDAS MAGNÉTICAS

*Max Chaves**

Escuela de Física, Universidad de Costa Rica
2060 Costa Rica

Aceptado, 20 de enero 2006

Abstract

The conception of the magnetic string is presented; it is an infinitely thin bundle of magnetic flux lines. They are surrounded by a film of current that rotates around them, and are a solution of Maxwell's equations. Their magnetic potential contains a line singularity, and its stability can be established topologically. A few comments are added on the possibility that they may exist at a cosmological scale as relics of the Big Bang.

Keywords: magnetic strings, magnetic flux, cosmic string, relic.

Palabras clave: cuerda magnética, flujo magnético, cuerda cósmica, reliquia.

1. Introducción

Hace algún tiempo P.A.M. Dirac hizo la observación de que uno podía imaginar que un monopolo magnético era un extremo de un solenoide muy delgado.[1] El otro extremo del solenoide se iba al infinito. Para poder volver experimentalmente invisible al solenoide era necesario asegurarse de que no podía ser observado por medio del efecto Aharonov-Bohm y esto llevó a Dirac a relacionar la carga magnética del monopolo g con la eléctrica del electrón e por medio de la relación $2eg = nch$, donde n es un número entero y h es la constante de Planck. Unos años después se demostró que era posible prescindir totalmente del solenoide y presentar al monopolo en el contexto de la teoría matemática de haces de fibras, siempre obteniéndose la misma relación de antes entre ambas cargas. [2]

En esta presentación vamos a suponer que los monopolos magnéticos no existen y le vamos a dar vuelta al argumento de Dirac. Supongamos que existen estos solenoides; entonces, ¿qué propiedades tienen? ¿Cómo se podrían describir matemáticamente?

*email-mchaves@cariari.ucr.ac.cr

Vamos a llamarlos cuerdas magnéticas, pues, como veremos, se parecen mucho a las cuerdas cósmicas, que son soluciones de campos bosónicos complejos con valores esperados en el vacío diferentes de cero. [3]

2. La cuerda magnética recta

La cuerda cósmica se fundamenta en que la fase de un campo escalar complejo al dar vuelta alrededor de la cuerda no tiene que necesariamente volver a su valor original, sino que puede tomar cualquier otro valor que difiera en $2\pi n$. Debido a la periodicidad de la fase compleja, el valor del campo bosónico es el mismo, pero las configuraciones para diferentes n no son homotópicas, es decir, no son deformables de un modo continuo unas a otras. Se puede demostrar que la cuerda es estable como consecuencia de su topología no trivial, medida por el grupo homotópico fundamental π_1.

Es evidente que para poder definir un objeto físico parecido a una cuerda cósmica es necesario una campo escalar real, tal como lo es la fase del campo cargado (que tiene que ser complejo al ser cargado). Como la teoría electromagnética está compuesta de tan sólo vectores y tensores, parece a primera vista imposible definir un cuerda, pero hay un modo de hacerlo que está inspirado en el concepto de libertad *gauge*. Es bien sabido que las ecuaciones del electromagnetismo son invariantes a la siguiente transformación del potencial electromagnético: $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu$, donde hemos usado el símbolo $\partial_\mu = \partial / \partial x^\mu$. Estamos usando unidades naturales en que $h = c = 1$. Supongamos que el potencial electromagnético sea representable en la forma

$$A_\mu = \partial_\mu \tag{1}$$

Usualmente este potencial no tendría contenido físico. Por ejemplo el tensor de Maxwell está dado por $F_{\mu\nu} \quad \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, y al sustituir el potencial queda $F_{\mu\nu} \quad \partial_{\mu\nu} \quad - \partial_{\nu\mu} \quad = 0$, pues para funciones $\quad (x)$ lo suficientemente bien portadas el orden de las parciales no importa. El teorema de Young del cálculo nos asegura que, si las funciones ∂_μ y ∂_ν existen en el vecindario de un punto P y son diferenciables en ese punto, entonces $\partial_{\mu\nu} \quad = \partial_{\nu\mu}$ en P. Sin embargo si hacemos que la cuerda sea una línea de singularidad de entonces estaríamos precisamente en uno de esos casos en que el orden de las diferenciaciones sí importa y obtendríamos un tensor de Maxwell distinto de cero.

Veamos primero un ejemplo concreto usando coordenadas cilíndricas (r, ϕ, z). Escogemos como línea de singularidades al eje z. La función $\quad (r, \phi, z)$ tiene que tener la forma

$$= R(r) \cdot \phi^n \cdot Z(z), \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{2}$$

donde R y Z son funciones en principio arbitrarias. Esta función puede ser multivalorada debido al factor ϕ^n. El ángulo azimutal se puede escribir en coordenadas rectangulares:

$$\phi = \arctan(y/x) \tag{3}$$

Esta función es multivalorada pues va tomando diferentes valores conforme se va rotando alrededor de la cuerda. Sin embargo su naturaleza multivalorada como veremos no se transmite a ningún observable físico. En este artículo vamos a tratar exclusivamente el caso estacionario, de tal modo que ninguna de las magnitudes que usemos va a depender del tiempo. Usando la métrica $(g_{\mu\nu}) = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$ la condición *gauge* de Lorentz nos dice que $\partial \cdot A = -\nabla \cdot A = -\nabla^2 \quad = 0$, es decir, que el Laplaciano aplicado a la (2) debe dar cero. Como

$$\nabla^2 = \frac{1}{r}\partial_r(r\partial_r \,\cdot) + \frac{1}{r}\partial_\phi^2 + \partial_z^2$$

se concluye tras hacer el desarrollo algebraico, que, $R = 1$, y $n = 1$, o bien $Z = 1$, o bien $Z = z$. Es posible discernir entre estas dos últimas posibilidades usando $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$. Veamos:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot \nabla \times \nabla(\phi Z) = \nabla(Z\nabla \times \nabla\phi) = \nabla Z \cdot \nabla \times \nabla\phi = 0 \tag{4}$$

En estas derivaciones hay que tener presente que el operador $\nabla \times \nabla$ solamente podría no dar cero cuando se aplica a funciones si existen singularidades en sus dominios. Obsérvese también que $\nabla \times \nabla_\phi$ sólo puede tener a su tercera componente distinta de cero, por lo que la (4) se convierte en

$$(\partial_3 Z)(\partial_{12} - \partial_{21})\phi = 0 \;, \tag{5}$$

de donde concluimos que $Z = 1$. Llegamos así a la conclusión de que

$$= \phi \;, \tag{6}$$

y, por consiguiente, el potencial electromagnético va a estar dado por

$$\mathbf{A} = \nabla\phi = \mathbf{e}_\theta / r \;, \tag{7}$$

donde e_θ es un vector unitario en la dirección tangencial dada por la regla de la mano derecha alrededor de la cuerda. Nótese que este potencial no es una función multivalorada.

Hallemos ahora el campo magnético de la cuerda. Tomemos la integral sobre un disco S con dirección z, es decir, que yace en el plano xy, y que tiene a la cuerda atravesándolo perpendicularmente por el centro. Entonces:

$$_S\mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = {}_S\nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \circ\, \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi \tag{8}$$

donde C es el círculo que rodea al disco, $d\mathbf{l} = \mathbf{e}_\theta \, r d\theta$ es el diferencial de trayectoria y hemos utilizado al teorema de Stokes. Si uno recuerda que

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \times \nabla \quad = 0$$

en todo punto de S que no sea la singularidad del centro, se llega a la conclusión de que

$$\mathbf{B} = \mathbf{e}_z \, 2\pi \delta(x)\delta(y), \tag{9}$$

donde e_z es un vector unitario en la dirección z. Es decir, el campo magnético está restringido a un solenoide infinitamente delgado que, o bien es de largo infinito en ambas direcciones, o bien está cerrado sobre sí mismo.

La cuerda está rodeada de una capita infinitamente delgada de corriente que rota alrededor de la cuerda en la dirección positiva, según se desprende de $\nabla \times \mathbf{B} = \partial \mathbf{E}/\partial t + \mathbf{J}$. En efecto, tomando el rotor del campo magnético y recordando que el sistema es estacionario se obtiene fácilmente que

$$\mathbf{J} = 2\pi \left(\delta(x)\delta'(y), -\delta'(x)\delta(y), 0 \right) \tag{10}$$

En la Fig. 1 se ha ilustrado la configuración de la cuerda magnética y la corriente que gira a su alrededor. Es fácil demostrar además que (10) es consistente con la ecuación de continuidad $\partial \cdot J = \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$.

$$\begin{array}{ccccc} & \leftarrow & & & \\ \downarrow & \bullet & \uparrow & & \mathbf{J}(x,y) \\ & \rightarrow & & & \end{array}$$

Figura 1. Alrededor de la cuerda gira la corriente eléctrica.

El potencial cumple con la ecuación de movimiento $\nabla^2 \mathbf{A} = -\mathbf{J}$ de un modo redundante. Para demostrar esto observemos que

$$\nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \nabla \cdot \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A} \tag{11}$$

El primer término de la derecha es el mismo que aparece en la condición de Lorentz y es cero en consecuencia. Como $\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{J}$ la ecuación (11) se convierte en la ecuación de movimiento.

3. La cuerda magnética general

Estudiaremos a continuación el caso más general de una cuerda que no tiene que ser recta, y cuyos extremos se van al infinito o se juntan.

Supóngase que es posible realizar un cubrimiento de la cuerda por medio de un número contable de conjuntos abiertos tridimensionales (que llamaremos bolas), de tal modo que todos los puntos de la cuerda estén en uno de estos abiertos, y solamente haya un fragmento conectado de cuerda en cada bola. Entonces en cada uno de las bolas realizaremos una parametrización con coordenadas locales (r, ϕ, z) donde la coordenada z será el largo de la cuerda a partir de algún punto fijo, la ϕ un ángulo con respecto a una dirección original azimutal, y la r se medirá desde la cuerda radialmente. Con respecto a estas coordenadas todos los argumentos anteriores siguen siendo válidos, excepto que tendremos que modificar los que involucran al teorema de Stokes. En efecto, en ese caso la superficie S y su perímetro la trayectoria C tienen que estar contenidos ambos de la bola (vease Fig. 2).

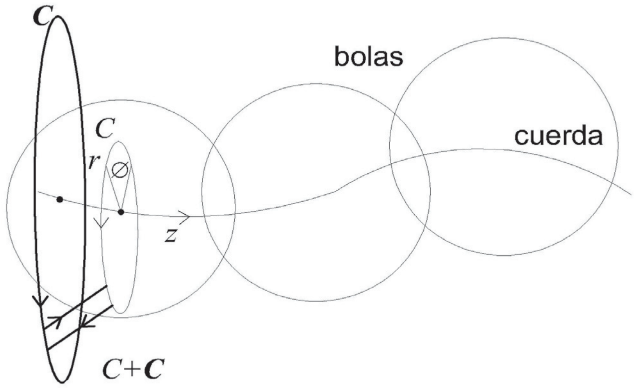

Figura 2. Las coordenadas locales y las diferentes trayectorias.

Llevamos entonces a cabo la demostración de la (8) y llegamos al mismo resultado de cuantización de flujo (9). Ahora bien, una vez hecho esto podemos tomar una nueva trayectoria C. Utilizando el teorema de Stokes para una trayectoria conjunta C + C, se puede demostrar sin mucha dificultad que la circulación del potencial electromagnético alrededor de C es igual a

$$\oint_{\mathbf{C}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi \left(n_+ - n_-\right) , \tag{12}$$

donde n_+ es el número de veces que la cuerda atraviesa cualquiera de las superficies limitadas por C en la dirección positiva y n_- en la dirección negativa. Esto nos da una imagen muy simple de la cuerda como un solenoide muy delgadito doblable pero no cortable. Si la cuerda tuviera un largo finito, es decir, si terminara, entonces para una trayectoria C fija podríamos escoger dos superficies S y S', una que esté atravesada por la cuerda y otra que no, y así obtener una contradicción, ya que el valor de la circulación del potencial alrededor de la trayectoria sólo es uno mismo.

4. Comentarios finales

La energía asociada al campo electromagnético de una cuerda magnética es infinita. Es difícil creer que pueda ser realmente infinita, del mismo modo que uno no cree realmente que la energía de un electrón es infinita, a pesar de que la integración de su densidad de energía también diverge para radios muy pequeños. Más probablemente el espacio-tiempo se comporta a escales muy pequeñas de un modo diferente a nuestra comprensión actual y este tipo de integrales no divergen realmente.

Las cuerdas magnéticas tendrían necesariamente que haberse creado durante el período de recalentamiento del universo temprano al final del período inflacionario. Muchas de ellas tendrían hoy en día un tamaño cósmico debido a la expansión del *big bang*. Emitirían radiación electromagnética pues inducirían campos eléctricos (nótese que $\nabla\times\mathbf{E} = -\partial\mathbf{B}/\partial t$) al trasladarse o al vibrar debido a sus modos normales.

Debido a su energía electromagnética por unidad de longitud, la cuerda tiene una tensión bastante alta. Eso quiere decir que las que eran chicas y en consecuencia no fueron agrandadas por el *big bang* rápidamente colapsaron. Sin embargo las grandes llegaron a tener tamaño cósmico y al irse achicando van a despedir intensa radiación electromagnética debido al efecto látigo. Este efecto se da cuando dos segmentos de una cuerda inestirable no se mueven en la misma dirección. Eventualmente todo el momentum se transmite al segmento corto de la cuerda.

Las cuerdas cósmicas producen una corriente rotatoria alrededor de la singularidad que es básicamente constante con respecto a r. Las cuerdas magnéticas por el contrario tienen una corriente que es cero para $r > 0$. Son diferentes objetos aunque ambos se parecen en cuanto a que son generados por un parámetro que usualmente es una libertad *gauge* pero que por algún motivo está actuando como un campo potencial multivalorado.

5. Referencias

[1] Dirac, P. A. M. *Roy. Soc. Proc.* **1931** *A133*, *60*; Dirac, P. A. M. *Phys. Rev.* **1948,** *74*, 883.

[2] Wu, T. T. ; Yang, C. N. *Phys. Rev.* **1975**, *D12*, 3845; Trautman, A. *Int. J. Theo. Phys.* **1977**, *16*, 561.

[3] Vilenkin, A. *Phys. Rep*. **1985**, *121*, 263; Chaves, M. *Phys. Lett*. **1997**, *B415*, 175.