Ciencia y Tecnología, 24(1): 71-80, 2006
ISSN: 0378-0524

CURVATURA EN TEORÍAS GENERALIZADAS DE YANG-MILLS

Max Chaves[*]

Escuela de Física. Universidad de Costa Rica
2060 Costa Rica

Aceptado 20 de enero, 2006

Abstract

The curvature in R^{1+3} spaces with a generalized Yang-Mills connection is studied and the results are analyzed. Other options borne by modifications of the base space are also studied and commented. The present situation of the problem is reviewed.

Keywords: Generalized Yang-Mills theories, affine connections, gauge invariance.

Palabras clave: Teorías generalizadas de Yang-Mills, conexiones afines, invariancia *gauge.*

1. Introducción

En una teoría usual de Yang-Mills (TYM) la conexión [1] es un campo vectorial con un número de componentes igual a la dimensionalidad *N* de la representación adjunta del grupo de Lie *G* que se está usando para construir la teoría. En una teoría generalizada de Yang-Mills (TGYM) la conexión contiene tanto campos vectoriales como escalares. [2] El lector interesado en estudiar el tema encontrará que la referencia [3] es particularmente detallada y completa. Vamos a usar la métrica plana

$$(\eta_{\mu\nu}) = diag(1,-1,-1,-1),$$

y las matrices de Dirac $\gamma^u, \mu = 0,1,2,3$ que obedecen a la relación

$$\gamma^u\gamma^v + \gamma^v\gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu} .$$

*email-mchaves@cariari.ucr.ac.cr

Las TGYM son teorías cuánticas con una invariancia *gauge* local basada en una derivada covariante de la forma

$$D \equiv / + \not{A} + \phi \ , \tag{1}$$

donde

$$\begin{aligned} \not{A} &= \gamma^{\mu} A_{\mu} = ig\gamma^{\mu} A^{a} T^{a}, \quad a = 1, \ldots, N_{v}, \\ \Phi &= \gamma^{5}\varphi = -g\gamma^{5}\varphi^{b} T^{b}, \quad b = N_{v} + 1, \ldots, N, \end{aligned} \tag{2}$$

y donde los generadores $T^{a}, a = 1, \ldots, N_{v}$, son los generadores de un subgrupo maximal de G. Como se ve, el número de campos bosónicos escalares más el de vectoriales es igual a N. La estructura quiral del sector fermiónico de la teoría requiere escoger un subgrupo maximal de G, digamos G_M, y este subgrupo es también el que determina cuáles de los campos van a ser escalares y cuáles vectoriales. Los campos asociados con los generadores del subgrupo maximal tienen que ser vectoriales.

Sea U un elemento de la representación fundamental del grupo G. Definimos a la transformación para los campos *gauge* en la forma

$$\not{A} + \Phi \rightarrow U(\not{A} + \Phi)U^{-1} - (/\,U)U^{-1} \ , \tag{3}$$

de donde se puede concluir que

$$D \rightarrow UDU^{-1} \, . \tag{4}$$

Usamos entonces la derivada D para construir una teoría cuántica de campo que sea invariante ante las transformaciones del grupo.

2. La energía cinética de los campos gauge en una teoría generalizada de Yang-Mills

En una TYM la derivada covariante es

$$D_{\mu} = \partial_{\mu} + A_{\mu}.$$

Sea χ un vector que va a ser trasladado por medio de transporte paralelo a lo largo de un lazo C en R^{3+1}. El cambio del vector va a ser

$$\Delta\chi = \circ \frac{dx^{\nu}}{ds} A_{\nu} \chi ds \ ,$$

donde s es una parametrización de la curva [4]. Es posible demostrar que

$$\Delta\chi = \Delta S^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \chi$$

donde *s* es el área encerrada por un lazo infinitesimal y donde

$$F_{\mu\nu} \equiv [D_\mu , D_\nu].$$

En consecuencia se dice que $F_{\mu\nu}$ es el tensor de curvatura de la TYM. En lo que sigue llamaremos al producto $\Delta S^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$ el "transporte paralelo", suprimiendo al símbolo del vector que fue transportado (χ en este ejemplo).

Hay un homomorfismo 2 x 1 entre la representación espinorial de Dirac y las representaciones vectoriales del grupo de Lorentz. Si *S* es una matriz de la representación espinorial, y si ψ es un espinor y *A* un campo vectorial contraído con las matrices de Dirac, entonces estos campos transforman, bajo una transformación de Lorentz, del siguiente modo:

$$\psi \rightarrow S\psi \;, \quad \not{A} \rightarrow S\not{A}S^{-1} .$$

Es posible escribir la expresión usual para la energía cinética de los campos *gauge* en una TYM utilizando la representación espinorial. Omitiremos la demostración que se halla, por ejemplo, en la referencia [3]. La energía cinética puede escribirse en la forma

$$\begin{aligned}\frac{1}{2g^2}\widetilde{\mathrm{Tr}}\left(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right) &= \frac{1}{2g^2}\widetilde{\mathrm{Tr}}\left({}_{[\mu} A_{\nu]} + [A_{\mu}, A_{\nu}]\right)^2 \\ &= \frac{1}{2g^2}\widetilde{\mathrm{Tr}}\left(\frac{1}{8}\mathrm{Tr}^2 \not{D}^2 - \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\not{D}^4\right)\end{aligned} \tag{5}$$

donde la traza con vírgula se toma sobre las matrices *gauge* y la traza sin vírgula sobre las matrices de Dirac. La generalización natural de la energía cinética de los bosones a una TGYM sería

$$L_{GYMT} = \frac{1}{2g^2}\widetilde{\mathrm{Tr}}\left(\frac{1}{8}\mathrm{Tr}^2 D^2 - \frac{1}{2}\mathrm{Tr} D^4\right)$$

donde *D* estaría dada por (1). Este resultado deja abierto el problema de que si existirá un concepto similar en las TGYM al del tensor de curvatura $F_{\mu\nu}$ en las TYM.

3. Generalización del tensor de curvatura

Existe una magnitud en las TGYM que tiene las propiedades que buscamos en la curvatura. Es invariante de *gauge* y de Lorentz, no tiene derivadas que queden actuando indefinidamente hacia la derecha, y se puede relacionar con la energía cinética de los campos *gauge* por medio de su cuadrado. Está constituida solamente de la derivada covariante *D* (en las TGYM no hay mucha elección):

$$F = \frac{1}{4}\mathrm{T}r D^2 - D^2 \,. \tag{6}$$

Si ahora calculamos $-\mathrm{Tr}F^2$ encontramos de nuevo la energía cinética de los campos *gauge*:

$$\begin{aligned} -\mathrm{Tr}F^2 &= \mathrm{Tr}\left((\frac{1}{4}\mathrm{Tr}D^2)^2 - \frac{1}{4}(\mathrm{Tr}D^2)D^2 - \frac{1}{4}D^2(\mathrm{Tr}D^2) + D^4 \right) \\ &= \frac{1}{4}(\mathrm{Tr}D^2)^2 - \mathrm{Tr}D^4 \end{aligned}$$

Es evidente que obtenemos una plena analogía con las TYMs. Así,

$$L_{bosones} = \frac{1}{2g^2}\widetilde{\mathrm{T}}\mathrm{r}\left(\frac{1}{8}(\mathrm{Tr}D^2)^2 - \frac{1}{2}\mathrm{Tr}D^4 \right) = -\frac{1}{4g^2}\widetilde{\mathrm{T}}\mathrm{rTr}(F^2)\,.$$

En forma explícita la curvatura es

$$F = \quad \cdot A - (/ \not{A}) + A \cdot A - \not{A}\not{A} - (\quad \Phi) - \{\not{A}, \phi\} \,. \tag{7}$$

4. Efecto del transporte paralelo con curvatura generalizada

Supongamos que el lazo infinitesimal es un pequeño paralelogramo formado por dos vectores de posición x^μ y y^μ. Entonces el área, una dos-forma, es $\Delta S^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} x^{[\mu} y^{\nu}$. El producto interno de dos vectores del tipo que sea lo definimos como

$$x \cdot y \equiv \frac{1}{4}\mathrm{Tr}\not{x}\not{y} = x^\mu \eta_{\mu\nu} y^\nu \tag{8}$$

donde $\eta_{\mu\nu}$ es la métrica. Pero ahora generalizamos:

$$S\cdot F \equiv \frac{1}{4}\mathrm{Tr}F\not{x}\not{y} \quad . \tag{9}$$

Sustituyendo el valor de *F*, se puede comprobar que

$$\begin{aligned} S\cdot F &= \frac{1}{4}\mathrm{Tr}\left(\ \cdot A - (\ /\!\!\!A) + A\cdot A - \not{A}\not{A} - (\ /\Phi) - \{\not{A},\Phi\}\right)\not{x}\not{y} \\ &= \left(x\cdot(\ A)\cdot y - y\cdot(\ A)\cdot x + x\cdot AA\cdot y - y\cdot AA\cdot x\right) \\ &= x^{\mu} y^{\nu}\left(\ _{[\mu}A_{\nu\,]} + A_{[\mu}A_{\nu\,]}\right) = s^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \end{aligned}$$

exactamente el resultado usual de una TYM.

Aunque este último resultado es el usual en una TYM, tiene el defecto de que no incluye a los campos bosónicos escalares que existen en las TGYMs. Esta situación no es muy satisfactoria puesto que la experiencia demuestra que nuestras teorías físicas siempre reflejan estructuras matemáticas plenas de sentido. En lo que resta del trabajo veremos dos modos de tratar de solventar este problema.

5. Un acto atrevido: agregamos una nueva dimensión

Pareciera que el origen del problema radica en que hay cinco tipos de campos $\left(A_{\mu}, \mu = 0,1,2,3 \text{ y} \varphi\right)$ y cuatro coordenadas ($x^{\mu)}$. En ese caso es lógico agregar una nueva coordenada más del mismo modo que se procedió con los campos: usando la matriz quiral γ^5. La llamaremos x^5 y en la representación espinorial la incluiremos como $\hat{x} = \not{x} + ix^5\gamma^5$. La *i* hay que agregarla para que el operador sea hermítico. La presencia de la *i* implica inmediatamente que la métrica va a ser de la forma (1,-1,-1,-1,-1). De hecho si tomamos

$$\hat{x} \equiv \not{x} + ix^5\gamma^5, \qquad \hat{y} \equiv \not{y} + iy^5\gamma^5 \quad , \tag{10}$$

entonces

$$\frac{1}{4}\mathrm{Tr}\hat{x}\hat{y} = x\cdot y - x^5 y^5 \quad . \tag{11}$$

Si ahora calculamos el transporte paralelo para una superficie pequeña cinco-dimensional en forma de paralelogramo constituido por los dos vectores (10), magnitud que llamaremos $S_5\cdot F = \frac{1}{4}\mathrm{Tr}F\hat{x}\hat{y}$, obtendremos un término adicional *con respecto a nuestro cálculo similar cuatridimensional*:

$$
\begin{aligned}
(S_5 - S)\cdot F &= \frac{1}{4}\mathrm{Tr}F(\not{x}y^5\gamma + x^5\gamma^5\not{y} + x^5 y)\\
&= \frac{1}{4}\mathrm{Tr}\Big((\ /\Phi)\not{x}y^5\gamma(\ /\Phi)x^5\gamma^5\not{y} + \{\not{A},\Phi\}\not{x}y^5\gamma^5 + \{\not{A},\Phi\}x^5\gamma^5\not{y}\Big)\\
&= \frac{1}{4}\mathrm{Tr}\Big((\ /\Phi)\not{x}y^5 - (\ /\Phi)x^5\not{y} + [\not{A},\varphi]\not{x}y^5 - [\not{A},\varphi]x^5\not{y}\Big)\\
&= x\cdot(\ \ \varphi)y^5 - y\cdot(\ \ \varphi)x^5 + x\cdot[A,\varphi]y^5 - y\cdot[A,\varphi]x^5\\
&= (x^\mu y^5 - x^5 y^\mu)\big((\ \ {}_\mu\varphi) + [A,\varphi]\big).
\end{aligned}
$$

Este resultado utiliza plenamente los campos bosónicos escalares, y, especialmente en el contexto de la modificación prácticamente inevitable que hay que hacerles a la derivada covariante y a la curvatura, y que veremos a continuación, adquiere un claro sentido matemático.

Ahora se presenta un problema nuevo, y es que una nueva dimensión implica una nueva energía cinética. La nueva derivada covariante tiene la forma

$$
\hat{D} = D + i\gamma^5\ \ {}_5 = \ / + i\gamma^5\ \ {}_5 + \not{A} + \Phi, \tag{12}
$$

donde $\ {}_5 = \ \ /\ x^5$. Este cambio a su vez implica que la curvatura va a cambiar. Luego de un poco de álgebra se obtiene

$$
\hat{F} = \ \ \cdot A - (\ /\not{A}) + A\cdot A - \not{A}\not{A} - (\ /\Phi) - \{\not{A},\Phi\} - i\gamma^5(\ \ {}_5\not{A}). \tag{13}
$$

Como fruto de nuestras investigaciones vemos que el factor para transporte paralelo que se había calculado antes $S_5\cdot\hat{F}$ no es realmente el correcto, pues la curvatura también cambia. Lo correcto es calcular con base a $\hat{F}$. Obtenemos:

$$
\begin{aligned}
S_5\cdot\hat{F} &\equiv \frac{1}{4}\mathrm{Tr}\hat{F}\hat{x}\hat{y}\\
&= \frac{1}{4}\mathrm{Tr}\hat{F}\hat{x}\hat{y} + \frac{1}{4}\mathrm{Tr}\,i\gamma^5(\ \ {}_5A)(\not{x}y^5\gamma^5 + x^5\gamma^5\not{y})\\
&= S^{\mu\nu}(\ \ {}_{[\mu}A_{\nu\ ]} + A_{[\mu}A_{\nu\ ]}) + S^{\mu 5}\big((\ \ {}_\mu\varphi) - i(\ \ {}_5A_\mu) + [A,\varphi]\big)
\end{aligned}
$$

donde $S^{\mu 5} = (x^\mu y^5 - x^5 y^\mu)$. Este resultado se parece mucho a la curvatura de una TYM en cinco dimensiones, con el campo φ jugando el papel de un A_5. Sin embargo el parecido es solamente superficial, puesto que en una TYM los cinco componentes de un campo toman el mismo generador del grupo de Lie, mientras que en este caso el quinto campo toma su propio generador. Con todo, le da un claro sentido matemático al campo bosónico escalar: en cinco dimensiones el campo escalar es la quinta componente de una conexión similar a la de Yang-Mills.

6. Las consecuencias de nuestro acto

Si agregamos una nueva dimensión ésta tiene que ser muy pequeña, pues de otro modo habría conflicto con nuestra experiencia cuatridimensional. Si se restringe una partícula representada por la función de onda ψ a un pequeño intervalo $0 < x < L$, y suponemos que la función de onda tiene que ser la solución de una ecuación armónica $(\partial_t^2 - \partial_x^2)\Psi = 0$, resulta que el estado fundamental de la partícula tiene muy alta energía. Como las condiciones de frontera son $\psi(0) = \psi(L) = 0$, la solución de mínima energía es

$$\psi \propto \sin\frac{\pi x}{L},$$

lo que arroja un momentum $k = \pi/L$ que tiene que ser muy grande, ya que el ancho L del intervalo es muy pequeño.

En el caso que nos ocupa, la partícula estaría en $R^{3+1} \times S^1$, y nos interesa conocer su energía si el radio del círculo es muy pequeño. Suponemos que la función de onda tiene que ser la solución de una ecuación armónica

$$(\partial_t^2 - \nabla^2 - R^{-2}\partial_\theta^2)\ \Psi = 0$$

donde R es el pequeño radio del círculo. Existe ahora una condición de continuidad para la función de onda y para su derivada en la dirección θ. Sin embargo, además de la solución

$$\psi \propto \sin\theta,$$

que correspondería un momentum $k_\theta = 1/R$ y sería en consecuencia de muy alta energía, existe también otra muy sencilla y de menor energía: $\psi = \psi_0$, una constante. De hecho, si la partícula no tiene masa, la energía para este estado sería cero.

Esta no es una partícula en el sentido usual pero si es un estado cuántico aceptable.

Vemos pues que, aún manteniendo una dimensión compactificada muy pequeña (en forma de círculo en este caso), no es necesario que todos los campos tengan necesariamente energías muy altas y en consecuencia que invaliden nuestro modelo fenológicamente. No discutiremos aquí las ecuaciones de movimiento de una TGYM en cinco dimensiones, tema un tanto complicado.

7. Otro modo de ver tratar de hallar el sentido matemático de estas teorías

En la sección anterior hicimos un intento para darle un sentido matemático a los campos escalares agregando una nueva dimensión.

Claro, agregar una dimensión adicional es asunto delicado. Los argumentos de la sección anterior muestran que no se puede desechar esta solución *a priori*, en cuanto que es consistente con las ideas físicas tradicionales. Pero nos impone la penosa tarea de tratar de resolver un conjunto complejo de ecuaciones de movimiento. Además, agregar otra dimensión es un paso muy fuerte y es algo que uno preferiría evitar en lo posible. ¿No habrá algún otro modo más sencillo de encontrar un sentido matemático a estas teorías?

Volvamos ahora a las ecuaciones (7) y (9), y estudiemos la magnitud

$$\frac{1}{4}\mathrm{Tr}FO \,. \qquad (14)$$

La pregunta es qué valor obtiene esta expresión si le damos a O los valores de todos los covariantes bilineales. Estos son 16: $1, \gamma^\mu, i[\gamma^\mu, \gamma^\nu], \gamma^5, \gamma^5\gamma^\mu$. Si sustituimos 1, γ^μ o γ^5, es inmediato de las leyes para las trazas de las matrices de Dirac que la expresión da cero. Si sustituimos el producto antisimético $i[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$, eso nos da seis grados de libertad, que son exactamente el mismo número de grados de libertad del elemento de área en cuatro dimensiones. Esto nos lleva a la idea de utilizar la magnitud $i\not{x}\gamma^5$ como ``sonda'' para obtener las magnitudes matemáticas que nos falta identificar. El resultado es (usando el símbolo ∘ en lugar del · para denotar que es un esquema diferente al de transporte paralelo):

$$x \circ F \equiv \frac{1}{4}\mathrm{Tr}Fi\not{x}\gamma^5 = ix^\mu \left({}_\mu\varphi + [A_\mu, \varphi] \right) . \qquad (15)$$

Este resultado es sumamente interesante por varios motivos. El factor ${}_\mu\varphi + [A_\mu, \varphi]$ es la energía cinética de campo φ en una TYM en la que este campo se halle en la representación adjunta. Además, obsérvese que si hacemos a este campo cero, la magnitud $F \circ x$ es también cero, es decir, el campo escalar es fundamental para esta magnitud. Así, si estuviéramos trabajando en el contexto de una TYM con una derivada covariante $D_{YM} = / + \not{A}$, y con ella construyéramos una curvatura F_{YM}, entonces $x \circ F_{YM} = 0$. Finalmente, otro motivo de interés es que el resultado (15) nos dice que el transporte paralelo de un vector a lo largo de una pequeña recta va a modificar al vector, y que la modificación depende de la dirección del transporte, consistiendo en un factor ${}_\mu\varphi + [A_\mu, \varphi]$ para la dirección μ-ésima. Vamos a llamar a esta propiedad matemática con el nombre de ``dilatación''.

8. Observaciones finales

En este trabajo hemos presentado el concepto de curvatura generalizada que aparece en las TGYM y hemos tratado de hallarle una interpretación matemática. Llevamos a cabo dos intentos. El primero utilizando una dimensión adicional, y el segundo definiendo una nueva propiedad matemática que hemos llamado la dilatación y que está relacionada no con un elemento de área sino más bien con una línea.

Nuestras investigaciones hasta el momento no permiten discriminar de un modo estrictamente lógico entre ambos enfoques, y de hecho, desde un punto de vista matemático, ambos están correctos. De un punto de vista físico ambos son suficientemente disímiles que creo que no es arriesgado decir que solamente uno (si siquiera alguno) podría ser el correcto, el que utiliza la naturaleza.

Sin embargo, al margen de la lógica estricta, no es posible menos que enfatizar la unidad interna que trae consigo la introducción de la dilatación. No es solamente la claridad del sentido que tiene la expresión $x \circ F$, estudiada en la sección anterior, sino la economía conceptual. En una TYM, el transporte paralelo $S \cdot F_{YM}$ consiste en la contracción del elemento de área en cuatro dimensiones, que tiene seis componentes, con la curvatura de Yang-Mills que en ese mismo número de dimensiones también tiene seis componentes. Si pasamos a una TGYM, entonces $S \circ F$ de nuevo nos da seis componentes de área y seis de curvatura (donde estas seis vienen de los covariantes bilineales antisimétricos) para contraerlos entre ellos, y $x \circ F$ nos da cuatro componentes del vector de posición y cuatro de la dilatación para contraerlos entre ellos. Las magnitudes de curvatura y dilatación son las que aparecen cuando uno expande el sector bosónico de una TGYM, y constan de precisamente 6+4=10 grados de libertad. Físicamente estos grados de libertad son factores de los términos de energía cinética de los campos vectoriales y de los campos escalares. En el lagrangiano de la parte bosónica de una TGYM,

$$L_{TGYM} = \frac{1}{2g^2}\widetilde{\mathrm{Tr}}\Big(\big(\ {}_{[\mu}A_{\nu]} + [A_\mu, A_\nu]\big)^2\Big) + \frac{1}{g^2}\widetilde{\mathrm{Tr}}\Big(\big(\ {}_{\mu}\varphi + i[A_\mu, \varphi]\big)^2\Big),$$

la curvatura aparece en el primer término de la derecha, y la dilatación en el segundo. Finalmente, si uno utiliza cualquier otro covariante bilineal para *O* en la expresión (14) que no sea uno de las dos que acabamos de mencionar, la expresión se vuelve cero. El sistema matemático suministra la información de un modo muy económico. De hecho inmediatamente se plantea la interrogante si será posible agregar otros nuevos tipos de campos, además de los vectoriales y los escalares, que a su vez den origen a otras generalizaciones de la curvatura, pero nosotros terminaremos aquí, sin entrar en ese tema.

9. Referencias

[1] Por ejemplo: Misner, C. W.; Thorne, K. S.; Wheeler, J. A. *Gravitation*, W. H. Freeman and Co.: Reading, 1973; Eguchi, T.; Gilkey, P. B.; Hanson, A. J. *Phys. Rep.***1980**, *66*, 214.

[2] Chaves, M.; Morales, H. *Mod. Phys. Lett.* **1998,** *A13*, 2021; Chaves, M. *Some Mathematical Considerations about Generalized Yang-Mills Theories*, in *Photon and Poincaré Group*, Dvoeglazov, V. V. (Ed.), Nova Science Publishers: Nueva York, 1998, p. 326; Chaves, M.; Morales, H. *The Standard Model and the Generalized Covariant Derivative*, in *Proceedings of the International Workshop Lorentz Group,*

CPT, and Neutrinos'', Universidad Autónoma de Zacatecas, México, June 23-26, 1999, (World Scientific) 188; Chaves, M.; Morales, H. *Mod. Phys. Lett.* **2000**, *A15*, 197.

[3] Chaves, M. *Introduction to Generalized Yang-Mills Theories*, para ser publicado en *Lectures, Summer School in Theoretical Physics*, Universidad Autónoma de Zacatecas, México, hep-th/0102055.

[4] Weinberg, S. *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*, Wiley: Nueva York, 1973, p.133.