

Visualización de Plasmas Convectivos

Rodrigo Carboni

I-Physikalisches und Astronomisches Institut

Ruhr Universität Bochum

República Federal de Alemania

Jorge Páez

Universidad de Costa Rica

Laboratorio de Investigaciones Astrofísicas

Escuela de Física

San José, Costa Rica

(recibido diciembre 1995, aceptado enero 1996)

Abstract: We present a study of the evolution of magnetic field in plasmas with different conductivities under the influence of a convective movement independent of time, which allows the description of either a single whirlwind, or even a double one, passing through diverse intermediate configurations. Different numerical methods were utilized in order to study the corresponding equations as, i.e., alternate implicit method, method of Crank-Nicholson, weighted ponderer method, and the convective method as well. This last method is used to solve the induction equation of the vector potential as a function of the field directly. Also, we analyzed the stability and consistency of the methods, being the most effective the convective method. The model of a convective cell is described by using current functions. By taking two functions each one of those representing a whirlwind, they can be modified in such a way, that it may represent either a single or a double whirlwind with just the variation of a parameter. The information gained from the evolution of the magnetic field under such conditions can be depicted graphically in a sequential manner (film), thus allowing the visualization of the evolution of the magnetic strength and the density of energy with time within the convective zone. The amplification of the field strength on the periphery of the cell shows the reconnection and disappearance of the magnetic field lines within the cell, with the corresponding decreasing the field strength thereabout until the evolution reach a steady state. When the Reynolds number is large, a single whirlwind can reach the steady state in a direct manner, while the double whirlwind began to oscillate for all Reynolds numbers values.

Subject headings: Reynolds number, plasmas, numerical methods, visualization, optimization

Resumen: Presentamos en este trabajo la evolución del campo magnético en plasmas de diversas conductividades, sometido a un movimiento convectivo independiente del tiempo, que permite describir desde un torbellino simple hasta uno doble, pasando por las diversas configuraciones intermedias. Se utilizan diferentes métodos numéricos (Smith, 1965) para la resolución de la

intermedias. Se utilizan diferentes métodos numéricos (Smith, 1965) para la resolución de la ecuación correspondiente: diferencias finitas centradas de segundo orden, método implícito de dirección alternante, método implícito de Crank- Nicolson, método del promedio ponderado y el método conectivo. Este último se aplica para resolver la ecuación de inducción en función, tanto del potencial vectorial, como en función del campo directamente. Se estudia la estabilidad y consistencia de los métodos, siendo el más efectivo el método convectivo. El modelo de celda convectiva que resolvimos es descrita por medio de funciones corrientes. Tomamos dos funciones que representan torbellinos que pueden modificarse desde uno simple hasta uno doble con la simple variación de un parámetro. La información de la evolución del campo magnético del plasma ganada bajo dichas condiciones, es desplegada en forma gráfica y de manera secuencial, obteniéndose una película que permite visualizar de manera clara, la evolución de la intensidad magnética y la densidad de energía magnética con el tiempo en la zona convectiva. La amplificación del campo en la periferia de la celda permite observar a las líneas de campo reconectarse y desaparecer, disminuyendo la intensidad media del campo hasta que la evolución alcanza un estado estacionario. Para números de Reynolds altos los torbellinos simples llega al estado estacionario de una manera directa, mientras que los torbellinos dobles lo hacen de una manera oscilatoria (para todos los números de Reynolds).

Encabezados de materia: número de Reynolds, plasmas, métodos numéricos, visualización, optimización

1. Introducción

En la última mitad de este siglo se ha producido un gran desarrollo en uno de los aspectos más intrigantes de la dinámica de los campos hidromagnéticos (magnetohidrodinámica o MHD): la generación y persistencia de los campos magnéticos en fuentes cósmicas, como la Tierra, el Sol y demás estrellas, galaxias, etc.

El más antiguo de estos problemas es el del campo magnético terrestre; generado por movimientos convectivos del núcleo metálico de la Tierra. En 1908 Hale† descubre la existencia de campos magnéticos de varios miles de Gauss en las manchas solares; posteriormente se realizaron medidas y análisis de campos magnéticos débiles en el Sol. Actualmente se conocen las intensidades de los campos en la mayoría de los cuerpos celestes cercanos y regiones en el Universo, como por ejemplo el que regula la acreción del plasma en la superficie de una estrella de neutrones ($10^{12} G$) ó el campo intergaláctico ($10^{-9} G$) que determina el comportamiento del plasma intergaláctico (Goldinov, 1988).

† Partiendo de las hipótesis físicas no correctas, determinó que las manchas solares tenían un campo magnético de ~ 4000 Gauss. Es el fundador del observatorio del Monte Wilson

La mayoría de estos campos estelares son dependientes del tiempo y son aproximadamente periódicos (aunque lejos de un comportamiento sinusoidal).

Actualmente se ha estado desarrollando la teoría del dínamo hidromagnético, iniciada un tiempo atrás (Pouquet, 1988). Esta trata de explicar la generación y mantenimiento de campos magnéticos que toman su energía de la energía mecánica del fluido, aquí el carácter no lineal de las ecuaciones es fundamental. La dinámica de los sistemas no lineales todavía no ha alcanzado un gran desarrollo; sin embargo, recientemente se han logrado muchos avances en este campo, especialmente en el problema del dínamo caótico (Fletcher, 1990), particularmente en estudios en los cuales se transforma la ecuación de inducción magnética mediante mapeos sucesivos a estados preturbulentos (Aref et al., 1989; Beloshapkin et al., 1989; Orzag, Paterson, 1972).

El tratamiento en general de esta problemática es el de considerar un plasma cósmico con movimiento estacionario, lo cual conduce a un problema de inducción magnética y de ahí, se tratan de encontrar estados estacionarios como soluciones de la ecuación de inducción.

Las condiciones fundamentales para la existencia de dínamos magnéticos son: un tiempo característico de decaimiento de la corriente en el fluido conductor grande, - comparado con el de movimiento del fluido -, que existan rotaciones con bajo grado de simetría y la presencia de convección, como fuente generadora de movimientos en el plasma (Goldinov, 1988).

Una de las herramientas más poderosas que se ha desarrollado para estas investigaciones es la computadora de alta velocidad. Estas se han utilizado para resolver la ecuación de inducción en forma numérica bajo diversas condiciones y, que ayuda a desplegar los resultados visuales en forma dinámica. De esta manera se analizan las diversas formas en que evoluciona el campo magnético y los parámetros involucrados en esta evolución.

Las primeras simulaciones bidimensionales fueron realizadas por Parker (1963) y Weiss (1966, 1978) utilizando campos de velocidades con simetría; otras simulaciones incluyen efectos dinámicos, llevadas a cabo por Busse (1975), Weiss (1975, 1981), Galloway (1978) y generalizadas para tres dimensiones para el caso cinemático.

Generando campos de velocidades convectivos se pueden simular celdas de convección, que representan muy bien las zonas existentes en la fotosfera, la cromósfera, la zona convectiva de hidrógeno del Sol, así, como en plasmas de laboratorio. En todos estos casos el medio es altamente conductor (con números de Reynolds variando desde 10^3 en experimentos a 10^{17} en Galaxias).

Un estudio detallado de estas zonas aisladas y en conjunto es de gran ayuda para lograr una mejor comprensión de los fenómenos magnetohidrodinámicos.

2. Magnetohidrodinámica del Plasma

Haremos un análisis de las ecuaciones de Maxwell, para encontrar la ecuación de inducción que describe el comportamiento del plasma cósmico. Esta ecuación que describe una competencia constante entre un término convectivo y uno disipativo, se analiza para estudiar la evolución de un plasma electrónico, dependiendo del parámetro que compara las intensidades de dichos términos: el número de Reynolds. La importancia relativa de la convección de líneas de campo magnético por el movimiento del plasma y de la difusión magnética esta determinada por el número magnético de Reynolds R_m , dado por:

$$R_m = \frac{Lv\sigma}{c^2},$$

donde, por ejemplo en la corona solar (Cowling, 1953; Spitzer, 1956; White, 1983) se tiene que,

$$\sigma = 2 \times 10^7 T^{3/2} s^{-1}$$

$$T = 1 - 2 \times 10^6 K$$

$$R_m = 2 \times 10^{11} - 6 \times 10^{12}.$$

A primera vista se nota que la resistividad se desprecia totalmente a escala L muy grande. Cerca de hojuelas de plasma neutral, sin embargo, las longitudes características son mucho menores, por lo que el concepto clásico de conductividad eléctrica puede no aplicarse. Aquí, la mezcla y reconexión del campo magnético ocurre, y consecuentemente la física es diferente. Tanto la reconexión, como la difusión rápida del campo magnético, puede deberse a diferentes causas, tales como, v.g., por ondas estacionarias de Alfvén (Petschek, 1964; Sommerup, 1970), también por inestabilidades, de diferentes tipos: la difusión de Bohm (Bohm, 1949), la inestabilidad de razgado (Furth *et al.*, 1963; Jaggi, 1963; Coppi y Friedland, 1971; Biskamp y Schindler, 1971), la resistividad anómala (Linhart, 1960; Alfvén y Carlqvist, 1967; Hamberger y Friedman, 1968; Sagdeev y Galeev, 1969; Coppi y Mazzucato, 1971; Papadopoulos, 1976) y la inestabilidad de intercambio (Bernstein *et al.*, 1958; Rosenbluth, 1960; Artsimovich, 1964; Boyd y Sanderson, 1969) que pueden reducir considerablemente el número de Reynolds y permiten una reconexión a una razón superior que una fracción de la velocidad de Alfvén, independientemente de la magnitud de la conductividad eléctrica.

2.1. La Ecuación de Inducción

Supongamos la existencia de un fluido cósmico que tiene una conductividad σ , (la cual consideraremos constante en todo el fluido) y lleva a cabo un movimiento que se puede caracterizar con un campo de velocidades \vec{v} . Las ecuaciones de Maxwell son:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon}, \quad (2.2.1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad , \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu \vec{J} + \mu \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (2.2.2)$$

en las cuales no hemos incluido efectos debido a gradientes de temperatura y a variaciones en la densidad de las partículas cargadas (ρ), \vec{J} representa la densidad de corriente.

La forma más general para la densidad de corriente en un medio isotrópico homogéneo es:

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} + \sigma \vec{v} \times \vec{B} + \rho \vec{v}, \quad (2.2.3)$$

donde los términos de la derecha son: la corriente de conducción, la corriente de inducción y, la corriente de convección respectivamente.

En base a lo anterior determinaremos algunos órdenes de magnitud de las cantidades involucradas. En los plasmas cósmicos las velocidades propias de las partículas cargadas (velocidades mecánicas) son mucho menores que las velocidades electromagnéticas (c), entonces, si denotamos por medio de corchetes ([]) a los órdenes de magnitud tendremos que:

$$\left[\frac{v}{c} \right] = [\beta] \ll 1, \quad (2.2.4)$$

lo cual implica que podremos despreciar los órdenes superiores a β , o sea todo su comportamiento no relativista.

De la primera ecuación (2.2.1) se puede obtener una expresión con dimensiones de velocidad, tal que:

$$[E] = [v_{el} B], \quad (2.2.5)$$

donde v_{el} es la velocidad asociada a los procesos electromagnéticos y cumple con:

$$[v_{el}] \leq [v]. \quad (2.2.6)$$

Podemos utilizar ambas expresiones para obtener una estimación de la razón de la energía eléctrica y la magnética:

$$\left[\frac{\epsilon E^2}{\mu^{-1} B^2} \right] = \left[\frac{E^2}{c^2 B^2} \right] \leq [\beta^2]; \quad (2.2.7)$$

si se cumple (2.2.6) la componente eléctrica: $\rho \vec{E}$ de la fuerza que ejerce el campo magnético sobre el plasma es despreciable comparada con la componente magnética $\vec{J} \times \vec{B}$.

La corriente de desplazamiento en la ecuación (2.2.2) es mucho menor comparada con la corriente de conducción. La razón de ambas denotada por γ es:

$$\gamma = \left[\frac{\omega_{el} \epsilon}{\sigma} \right], \quad (2.2.8)$$

donde ω_{el} es la frecuencia electromagnética. Si L es una longitud característica, suponiendo que es la misma para los fenómenos electromagnéticos y mecánicos (Elsasser, 1956), tenemos:

$$[v] = [L\omega], \quad (2.2.9)$$

y de (2.2.8) :

$$[\omega_{el}] \leq [\omega].$$

Si se toman valores muy conservadores para la Tierra: $\gamma \leq 10^{-18}$ y, en general, para cualquier estrella $\gamma \ll 1$ (Goldinov, 1988).

La razón de la corriente de convección y la corriente de conducción da el mismo valor. Tomando de (2.2.1) , $[\rho] = [\epsilon E/L]$ tenemos:

$$\left[\frac{\rho v}{\sigma E} \right] = \left[\frac{\epsilon v}{\sigma L} \right] = [\gamma],$$

así, la ecuación (2.2.3) queda reducida a:

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} + \sigma \vec{v} \times \vec{B}, \quad (2.2.10)$$

y la (2.2.2) da:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu \vec{J}. \quad (2.2.11)$$

Combinando ambas ecuaciones obtenemos:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu \vec{J} = \mu \sigma \vec{E} + \mu \sigma \vec{v} \times \vec{B}. \quad (2.2.12)$$

Para eliminar \vec{E} calculamos el rotacional de (2.2.12) y, usando (2.2.1), obtenemos:

$$\mu \sigma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \mu \sigma \vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{B}) - \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{B}, \quad (2.2.12 - a)$$

y con ayuda de la primera de (2.2.2) llegamos a la ecuación de inducción:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{B}) + \eta \vec{\nabla}^2 \vec{B}, \quad (2.2.13)$$

donde la cantidad $\eta = 1/\mu\sigma$ se llama la viscosidad magnética.

La forma particular de la ecuación (2.2.13) conlleva a que, los procesos electromagnéticos en plasmas galácticos sean aperiódicos (por la no aparición de la segunda derivada temporal); y esto será así, siempre que despreciemos la corriente de desplazamiento. Sin embargo, se puede argumentar que el ruido de ondas de radio es un fenómeno astrofísico muy común y, precisamente éste se puede tratar en términos de procesos periódicos.

Para que la periodicidad ocurra debido a oscilaciones de plasma en el gas ionizado, se debe tener un valor de $\gamma \sim 1$; si suponemos una conductividad muy baja, las frecuencias electromagnéticas deben corresponder a microondas. Como las dimensiones espaciales deben ser del orden de las longitudes de onda involucradas , todo este proceso debe ocurrir a una escala del orden de centímetros; pero los fenómenos hidromagnéticos típicos en el Sol, Tierra y estrellas en general se llevan a cabo a grandes escalas.

Podría darse el caso que los campos magnéticos tuvieran una estructura muy fina debido a la formación de pequeños torbellinos; pero éstos se amortiguan mucho más rápido que los grandes y, sus efectos no serían apreciables más allá de la escala de los kilómetros. Es de esperar entonces que

los fenómenos hidromagnéticos sean limitados a grandes escalas de longitud, pudiéndose despreciar los campos eléctricos sin ningún problema en plasmas de alta conductividad, debido a este efecto de corto circuito de pequeñas dimensiones. Sin embargo, se ha propuesto la existencia de campos eléctricos alineados al campo magnético, como fuente responsable de la aceleración de los electrones de las auroras boreales, posibilidad que ha tomado gran interés últimamente, debido a mediciones realizadas con satélites que las apoyan. Actualmente esta es un área en la que se realiza aún investigación (Dolginov, 1988 ; Fälthammar, 1992).

Nuevamente se analizan órdenes de magnitud, ahora para los términos de la ecuación (2.2.13). La razón del primer término con el segundo de la derecha es: $R_m = Lv/\eta$; donde la cantidad adimensional R_m se llama el número de Reynolds magnético, debido a su analogía con el número de Reynolds convencional de los fluidos. Para grandes longitudes características R_m tiende a ser grande. La ecuación (2.2.13) se puede por lo tanto, separar en dos ecuaciones, para analizarla:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \eta \vec{\nabla}^2 \vec{B}, \quad (2.2.14)$$

ésta es la ecuación de difusión, la cual describe el decaimiento de campo magnético inicial en un tiempo de difusión característico:

$$\tau_\eta = \frac{L^2}{4\pi^2\eta}, \quad (2.2.15)$$

el cual es 1 segundo para el caso de una esfera de cobre de 1 centímetro de radio, 10^4 años para el núcleo terrestre y 10^{10} años para el Sol. El número de Reynolds magnético también se puede expresar:

$$[R_m] = \left[\frac{\omega}{\omega_{el}} \right] = \left[\frac{\tau_\eta}{\tau_0} \right], \quad (2.2.16)$$

donde τ_0 es el tiempo asociado con el movimiento mecánico. Entonces, para tiempos muy cortos comparados con el tiempo de difusión la ecuación se puede reducir a:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{B}) \quad (2.2.17)$$

esto es equivalente a decir que, el flujo magnético a través de una curva cerrada que se mueve con la velocidad local del fluido es constante en el tiempo. Decimos que las líneas de campo son arrastradas por el fluido (congeladas).

Cuando $R_m \gg 1$, el transporte de las líneas por el fluido domina a la difusión, es decir, el fluido se puede deformar mucho, antes de que cualquier campo electromagnético existente en el plasma haya decaído espontáneamente; mientras que si $R_m \ll 1$, el campo decae muy rápidamente y, no puede presentarse ningún efecto de dínamo. Revisando la expresión (2.2.16) vemos que la condición (2.2.6) se puede escribir como $R_m \gg 1$.

Ahora queremos introducir los potenciales electromagnéticos en la ecuación de inducción. Si se toma una transformación de Galileo (de Lorentz con los primeros órdenes de β):

$$\begin{aligned} \vec{r}' &= \vec{r} - \vec{v}_0 t, \quad t' = t; \\ \vec{\nabla}' &= \vec{\nabla} \frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla}, \end{aligned} \quad (2.2.18)$$

donde, \vec{v}_0 es la velocidad del sistema primado con respecto al no primado, (sólo tomaremos $v_0 \approx v$). Los campos transforman como:

$$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{v}_0 \times \vec{B} \quad y \quad \vec{B}' = \vec{B} - \vec{v}_0 \times \frac{\vec{E}}{c^2}, \quad (2.2.19)$$

utilizando (2.2.7) tenemos que:

$$\left[\frac{v_0 E}{c^2} \right] = \left[\frac{B v v_0}{c^2} \right] = [B \beta^2], \quad (2.2.20)$$

y la transformación (2.2.19) se puede escribir:

$$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{v}_0 \times \vec{B} \quad y \quad \vec{B}' = \vec{B}, \quad (2.2.21)$$

La densidad de corriente se transforma como:

$$\vec{J}' = \vec{J} + \rho \vec{v}_0; \quad (2.2.22)$$

si comparamos ambos términos de la derecha tenemos:

$$\left[\frac{\rho v_0}{J} \right] = \left[\frac{\rho v_0}{\sigma E} \right] \left[\frac{\sigma E}{J} \right] = [\gamma][R_m] = [\gamma R_m], \quad (2.2.23)$$

y para plasmas galácticos se cumple $\gamma \ll 1/R_m$ entonces:

$$\vec{J}' = \vec{J}, \quad (2.2.24)$$

además, de los principios generales de la relatividad (Jackson, 1962; Landau, Lifschitz, 1974a; Landau, Lifschitz, 1974b; Landau, Lifschitz, 1974c):

$$\eta' = \eta \quad y \quad \sigma' = \sigma. \quad (2.2.25)$$

La ecuación de inducción (2.2.13) y la fuerza $\vec{J} \times \vec{B}$ también son invariantes. Se puede demostrar (Elsasser, 1956) que la densidad de carga con el tiempo es:

$$\eta = -\epsilon \vec{\nabla} \cdot (\vec{v} \times \vec{B}), \quad (2.2.26)$$

a medida que la expresión de la derecha varía con el tiempo, η cambia cuasiestáticamente, con variaciones del orden de γ , además, cualquier cambio fuera de este equilibrio desaparece en un tiempo τ . De esta manera se puede ver que los efectos debidos a campos eléctricos son muy pequeños. Los campos en función de los potenciales electromagnéticos son:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad y \quad \vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \phi, \quad (2.2.27)$$

con la condición:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0. \quad (2.2.28)$$

Combinando la ecuación (2.2.1) con la (2.2.27) se tiene que:

$$\frac{\rho}{\epsilon} = -\vec{\nabla}^2 \phi. \quad (2.2.29)$$

La ecuación de inducción se puede escribir en función de los potenciales utilizando la ecuación (2.2.11) de la siguiente manera:

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \vec{\nabla} \phi + \eta \vec{\nabla}^2 \vec{A}, \quad (2.2.30)$$

y calculándole a ésta última la divergencia:

$$-\frac{\rho}{\epsilon} = \vec{\nabla}^2 \phi = \vec{\nabla} \cdot [\vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A})]. \quad (2.2.31)$$

De acuerdo al argumento dado anteriormente este término es cero, obteniéndose para la ecuación anterior:

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = [\vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A})]_{tr} = \eta \vec{\nabla}^2 \vec{A}, \quad (2.2.31 - a)$$

donde $[]_{tr}$ indica sólo la componente transversal (solenoidal) del término. Una manera más sencilla de enfrentarse al problema es tomar el potencial escalar igual a cero ($\phi = 0$) y, eliminar la condición de la divergencia sobre el potencial vectorial (2.2.28); todo esto debido a que los efectos eléctricos son despreciables. Entonces:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad y \quad \vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad (2.2.32)$$

quedando la ecuación de inducción de la siguiente manera:

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) + \eta \vec{\nabla}^2 \vec{A}. \quad (2.2.33)$$

La otra ecuación que completa el comportamiento hidromagnético, es aquella que considera el efecto del campo magnético sobre el fluido. La fuerza por unidad de volumen es:

$$\vec{F} = \vec{J} \times \vec{B} = \frac{1}{\mu} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \times \vec{B}, \quad (2.2.34)$$

esta expresión colocada en la ecuación de Navier - Stokes para la hidrodinámica nos da:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho_m} + \frac{1}{\mu \rho_m} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \times \vec{B} + \vec{\nabla} \xi + \vec{\nabla} \cdot \Pi + \eta_m \vec{\nabla}^2 \vec{v}, \quad (2.2.35)$$

donde ρ_m es la densidad de masa del plasma, p es la presión, η_m es la viscosidad mecánica específica, ξ es el potencial gravitacional y Π el tensor de esfuerzo. Si despreciamos las fuerzas gravitacionales, de Coriolis y los efectos de compresibilidad debido a la disipación por fricción; la ecuación se reduce a:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho_m} + \frac{1}{\mu \rho_m} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \times \vec{B} + \eta_m \vec{\nabla}^2 \vec{v}. \quad (2.2.36)$$

El análisis de esta ecuación hay que hacerlo cuidadosamente, debido a las diferentes contribuciones físicas que cada uno de los términos da. Ese estudio lo presentaremos en alguna oportunidad.

2.2. Esfuerzos producidos por torbellinos.

En plasmas de grandes dimensiones el número de Reynolds magnético y el número de Reynolds mecánico son muy grandes, (Dolginov, 1988), lo que conduce a la existencia de un movimiento turbulento del fluido. El caso más sencillo que se puede considerar sería el de un plasma en reposo; en éste el campo magnético estaría sujeto a una difusión, (disipación) y sólo, podría alcanzar un estado estacionario para el caso de un campo magnético homogéneo, ya que, cualquier inhomogeneidad se atenuaría en un tiempo inverso a η , es decir (τ) proporcional a σ . Mientras que en un fluido turbulento las propiedades de transporte características del fluido (cantidad de movimiento, etc) se verán más afectadas por la difusión de los torbellinos, los cuales ocurren en tiempos más rápidos. Si visualizamos la difusión de los torbellinos como el transporte de parcelas de fluidos macroscópicas en una distancia finita; entonces, el campo magnético al ser arrastrado por el fluido, lo hará en un tiempo mayor que (τ). Esta difusión juega un papel muy importante en el transporte energético que ocurre en los cuerpos estelares.

El campo magnético debe ser estacionario en promedio, tanto en el caso de los planetas, como periódico en las manchas solares; además, la generación del dínamo ocurre debido a la separación y arrollamiento de las líneas de campo, de tal manera que, la energía es suministrada al campo, es decir -en promedio- las líneas deben juntarse. Para que esto sea consistente con el estado estacionario, los dos términos de la ecuación de inducción deben ser de órdenes muy parecidos, en otras palabras, el tiempo de decaimiento debe ser comparable con el tiempo involucrado en los movimientos inductivos.

Cuando el campo magnético es débil, la fuerza que ejerce éste sobre el fluido es pequeña y el producto que surge de $(\vec{v} \times \vec{B}) \times \vec{B}$ puede eliminarse. Así, es de esperarse que se produzca el mismo efecto que ocurre con las líneas de vórtice de un fluido ordinario: cuando el movimiento es turbulento y el término disipativo es pequeño. El valor cuadrático medio del campo magnético aumenta con el tiempo, hasta de una manera exponencial.

3. Métodos Numéricos

La ecuación de interés que resolveremos es

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times (\vec{u} \times \vec{B}) + \eta \vec{\nabla}^2 \vec{B},$$

ésta se puede simplificar para el caso bidimensional, si se escribe en función del potencial vectorial. Tomamos el campo magnético y la velocidad confinados a un plano (xy), entonces, el campo magnético puede ser descrito por el potencial vectorial, que tendría una sola componente: $\vec{A} = A\hat{k}$, de manera que:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \left(\frac{\partial A}{\partial y}, -\frac{\partial A}{\partial x}, 0 \right).$$

Quedando la ecuación (2.2.13) :

$$\frac{\partial A}{\partial t} = -\vec{u} \cdot \vec{\nabla} A + \eta \vec{\nabla}^2 A. \quad (3.1.1)$$

Si se redefinen las variables en función de parámetros característicos, (velocidad máxima U , longitud máxima L), de tal manera que:

$$u = u'U \quad , \quad x = x'L,$$

con su análogo espacial para la coordenada y , se tendrá que

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial x'},$$

y

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{1}{L^2} \frac{\partial^2}{\partial x'^2}.$$

Al sustituir estas expresiones en la ecuación (3.1.1), y definir el tiempo característico $\tau = L/U$ (que sería una medida del tiempo que tarda el plasma en subir del fondo a la parte más alta de la celda), con $t = t' \tau$, ésta queda:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \vec{u} \cdot \vec{\nabla} A + \frac{1}{R_m} \vec{\nabla}^2 A, \quad (3.1.2)$$

donde se han suprimido los apóstrofes para simplificar la notación, siendo R_m el número de Reynolds magnético:

$$R_m = \frac{UL}{\eta},$$

se pueden tomar unidades, tales que, U y L valgan 1, simplificando el número de Reynolds magnético a:

$$R_m = \frac{1}{\eta}.$$

A continuación se presentarán los diferentes métodos empleados para resolver numéricamente la ecuación (3.1.2), siempre bajo un tratamiento cinemático, es decir que no hay reacción del campo magnético sobre el movimiento del plasma, permaneciendo la velocidad independiente del tiempo. Entonces, estos resultados serán válidos sólo si, la energía magnética es muy pequeña comparada con la energía cinética del plasma

$$\frac{B^2}{8\pi\mu} \ll \frac{1}{2}\rho v^2. \quad (3.1.3)$$

3.1. Método Explícito

Para resolver la ecuación (3.1.2), se divide el espacio bidimensional en una rejilla de puntos con un número entero de divisiones, para cada coordenada; de igual manera el tiempo se divide en un número entero de divisiones, pudiendo avanzar en cantidades discretas, como muestra la figura 2.2.1 :

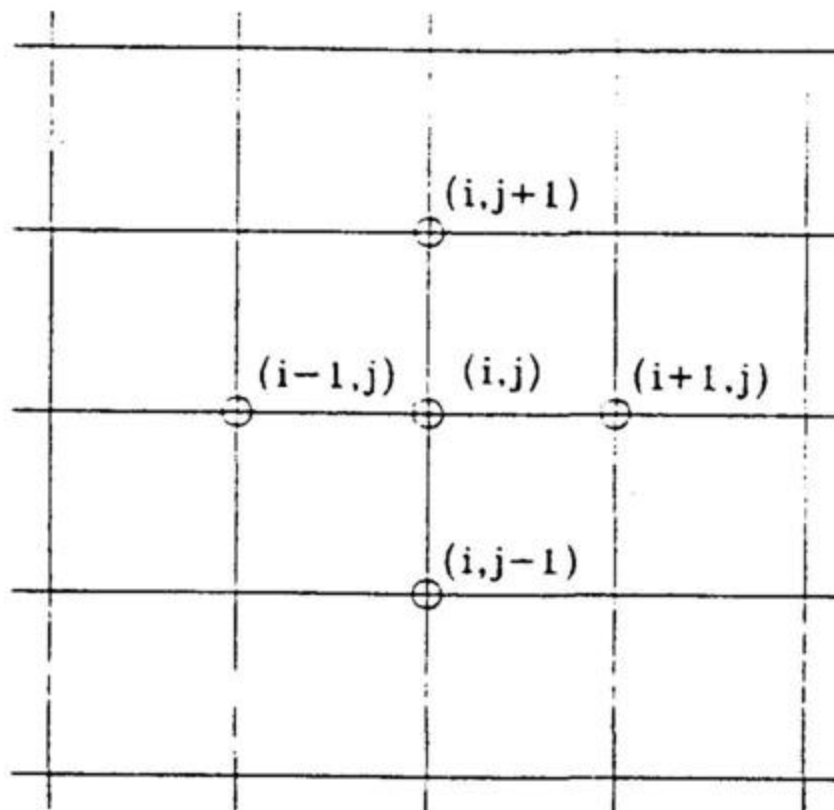


Figura 2.2.1 Rejilla de puntos para un espacio bidimensional.

La separación entre puntos de la rejilla es $\Delta x = 1/NX$, $\Delta y = 1/NY$ y $\Delta t = 1/NT$, donde NX , NY y NT corresponden al número de divisiones de la rejilla en cada una de las direcciones especificadas, v.g., a lo largo del eje X , el eje Y y la coordenada del tiempo T . La variación temporal se puede aproximar por medio de diferencias finitas centradas de segundo orden:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{A_{i,j,n+1} - A_{i,j,n-1}}{2\Delta t} + O[(\Delta t)^2], \quad (3.2.1)$$

donde, $A_{i,j,n}$ es el valor del potencial vectorial en el punto (i, j) de la rejilla para el instante t_n . Cada uno de los términos del gradiente se puede aproximar también de la misma manera. Ambas coordenadas se comportan de la misma manera, por lo que se mostrará de aquí en adelante, únicamente el comportamiento de la variable x , teniendo presente que la coordenada y se comporta en forma análoga:

$$\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{A_{i+1,j,n} - A_{i-1,j,n}}{2\Delta x} + O[(\Delta x)^2]. \quad (3.2.2)$$

El laplaciano también se puede aproximar por medio de diferencias finitas centradas de segundo orden, quedando cada uno de sus términos expresados de la siguiente manera:

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = \frac{A_{i-1,j,n} - 2A_{i,j,n} - A_{i+1,j,n}}{(\Delta x)^2} + O[(\Delta x)^2]. \quad (3.2.3)$$

La Figura 2.2.2 muestra los valores de los que dependen cada uno de los puntos de la rejilla, para cada uno de los casos mencionados, -diagrama conocido como molécula computacional-.

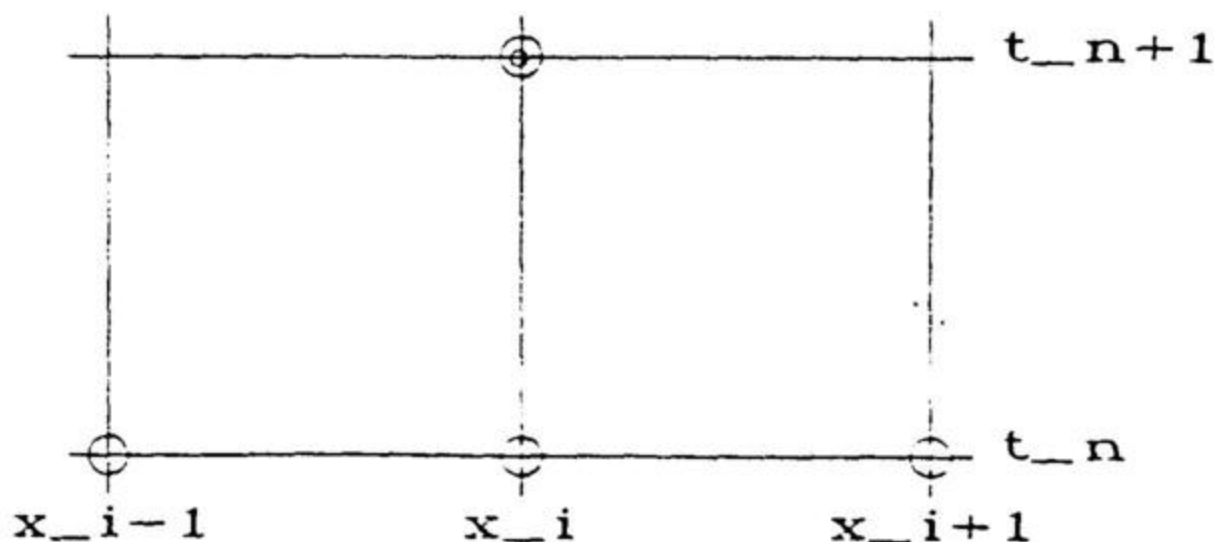


Figura 2.2.2 Molécula computacional para el método explícito.

Sustituyendo las diferencias finitas en la ecuación (3.1.2) y, reacomodando los términos se puede calcular de manera explícita el valor de $A_{i,j,n+1}$ en función de valores de ésta misma cantidad en un tiempo anterior t_n . Esta expresión general se encuentra en el Apéndice 1.

3.2. Método Implícito de Dirección Alternante

Este método se basa, en aproximar uno de los términos del laplaciano (i.e. $\partial^2 A / \partial x^2$) por esquemas de diferencias implícitas, en términos de un valor intermedio calculado en un tiempo posterior $A_{i,j,n+\frac{1}{2}}$, y el otro término ($\partial^2 A / \partial y^2$) se remplace por una aproximación de diferencias explícitas, de esta manera tenemos :

$$\bar{\nabla}^2 A = \frac{A_{i-1,j,n+\frac{1}{2}} - 2A_{i,j,n+\frac{1}{2}} + A_{i+1,j,n+\frac{1}{2}}}{(\Delta x)^2} + \frac{A_{i,j-1,n} - 2A_{i,j,n} + A_{i,j+1,n}}{(\Delta y)^2}. \quad (3.3.1)$$

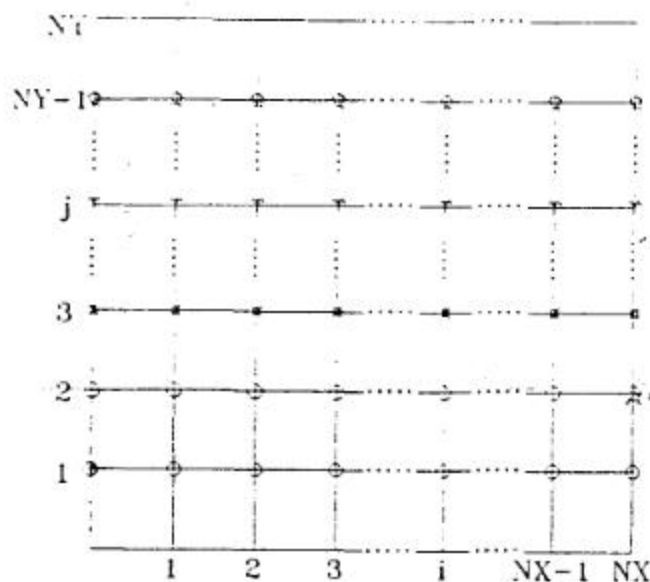


Figura 2.3.1 Rejilla que muestra las $NY - 1$ ecuaciones de NX incógnitas (cada ecuación representada por un símbolo diferente)

con

$$\alpha_0 = b_0,$$

y

$$S_i = d_i - \frac{a_i}{\alpha_{i-1} S_{i-1}}, \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, NX, \quad (3.3.5)$$

con

$$S_0 = d_0.$$

Los demás valores de las incógnitas se pueden obtener haciendo sustituciones hacia atrás en cada una de las ecuaciones inmediatamente anteriores. Esto está resumido en la siguiente relación de recurrencia:

$$A_i = \frac{S_i + c_i A_{i+1}}{\alpha_i}, \quad \text{para } i = NX - 1, NX - 2, \dots, 0. \quad (3.3.6)$$

Los valores específicos de cada una de las cantidades que aparecen en estas relaciones de recurrencia, para el de la aproximación de la ecuación (3.1.2), se encuentran en el Apéndice 2.

3.3. Método Implícito de Crank-Nicolson

El método que se describe a continuación propuesto por Crank y Nicolson, (Ames, 1971 ; Fletcher, 1990) tiene la ventaja que no requiere un intervalo temporal (Δt) muy pequeño para que se logre su convergencia (ver Sección 4.1). Reduce la dependencia del intervalo temporal de $O(\Delta t)$ a $O[(\Delta t)^2]$.

La derivada temporal se puede aproximar, por medio de diferencias centradas alrededor de un punto intermedio en un instante $t_{n+\frac{1}{2}}$, de la siguiente manera:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{A_{i,j,n+1} - A_{i,j,n}}{\Delta t} + O[(\Delta t)^2]. \quad (3.4.1)$$

Las derivadas espaciales de primer orden se sustituyen por esquemas de segundo orden similares a (3.4.1).

Las derivadas de segundo orden se remplazan por el promedio de dos esquemas de diferencias finitas: uno en un instante dado (t_n) y otro en un instante posterior (t_{n+1}) :

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{A_{i+1,j,n} - 2A_{i,j,n} + A_{i-1,j,n}}{(\Delta x)^2} + \frac{A_{i,j,n+1} - 2A_{i,j,n+1} + A_{i-1,j,n+1}}{(\Delta x)^2} \right\}. \quad (3.4.2)$$

La molécula computacional se puede ver en la Figura 2.4.1.

El sistema de ecuaciones que se obtiene se puede resolver también por el método de eliminación de Gauss, y el esquema final se describe en el Apéndice 3.

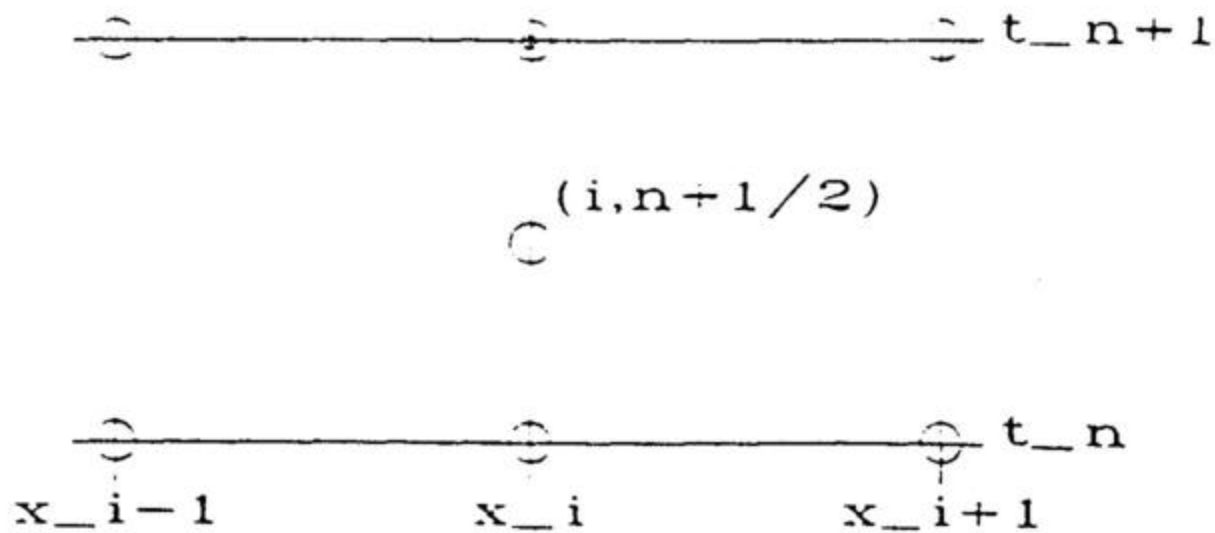


Figura 2.4.1 Molécula computacional para el Método de Crank-Nicolson.

3.4. Método del Promedio Ponderado

Aún, se puede obtener una aproximación más general a la ecuación (3.1.2), si en lugar de promediar las contribuciones de cada una de las diferencias en tiempos subsiguientes, se les da la libertad de variar el peso de sus contribuciones por medio de un parámetro (θ), de la siguiente manera:

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = \theta \left(\frac{A_{i+1,j,n} - 2A_{i,j,n} + A_{i-1,j,n}}{(\Delta x)^2} \right) + (1 - \theta) \left(\frac{A_{i+1,j,n+1} - 2A_{i,j,n+1} + A_{i,j,n+1}}{(\Delta x)^2} \right). \quad (3.5.1)$$

Donde $0 \leq \theta \leq 1$. Como casos particulares tendríamos $\theta = 0$ (esquema explícito), $\theta = \frac{1}{2}$ (método de Crank-Nicolson) y $\theta = 1$ (diferencias centradas hacia atrás en el tiempo). La molécula computacional es similar a la de la figura (2.4.1).

3.5. Esquema Convectivo

Cuando el número de Reynolds magnético es muy grande, es necesario trabajar con esquemas de cuarto orden, porque el término convectivo empieza a dominar en la ecuación.

La ecuación (3.1.2) se puede escribir:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot (A\vec{u} - \eta\vec{\nabla}A), \quad (3.6.1)$$

si se considera que el plasma se comporta como un fluido incompresible ($\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$).

Obtendremos un esquema de diferencias para la ecuación (3.6.1), únicamente considerando el término convectivo ($A\vec{u}$) que denotaremos como el flujo (F), y después haremos una aproximación para el término difusivo ($\eta\vec{\nabla}A$) (Roberts, 1966 ; Weiss, 1966).

Esta ecuación representa una ley de conservación; similar a la ecuación de continuidad que establece que el aumento de la cantidad (A) es igual al flujo total de ésta, en todo el volumen ocupado.

Para obtener el esquema de diferencias es más conveniente trabajar con la formulación integral de la ecuación (3.6.1):

$$\Delta \int A d\tau = \int \int \vec{F} \cdot d\vec{S} dt. \quad (3.6.2)$$

Esta ecuación la integraremos sobre elementos de área definidos por los puntos de la rejilla, de tal manera que, el valor del potencial A en un punto dado es el promedio calculado en una caja que rodea al punto.

F se obtiene a partir de promedios dobles, calculados sobre elementos de superficie y sobre intervalos de tiempo Δt .

La ecuación (3.6.2) se puede escribir:

$$\Delta \left[\int_S A dS \right] = - \int \oint A U_n dl dt, \quad (3.6.3)$$

donde U_n es la componente de la velocidad normal al elemento de línea dl que rodea a la superficie S .

Denotaremos el valor $A_{i,j,n}$ como el promedio de A en una caja de lado $2\Delta x$, $2\Delta y$, y centrada en el punto espacial (i, j) en el instante t_n ; es decir, en el punto (i, j, n) de la rejilla tridimensional, de tal manera que:

$$A_{i,j,n} = \frac{1}{4\Delta x \Delta y} \int_{j-1}^{j+1} \int_{i-1}^{i+1} A(x, y, t_n) dx dy. \quad (3.6.4)$$

De la misma manera, si la velocidad \vec{u} es estacionaria sus componentes (u, v) en un punto dado: $u_{i,j}$, $v_{i,j}$, se pueden definir como los flujos promedio a través de líneas de longitud $2\Delta x$ y $2\Delta y$ respectivamente, centradas en el punto (i, j) :

$$u_{i,j} = \frac{1}{2\Delta y} \int_{j-1}^{j+1} u(x_i, y) dy,$$

$$v_{i,j} = \frac{1}{2\Delta x} \int_{i_1}^{i+1} v(x, y_j) dx. \quad (3.6.5)$$

La velocidad deberá cumplir con la condición de flujo incompresible, $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$, que de forma integral es:

$$\oint U_n dl = 0, \quad (3.6.6)$$

y escrito en diferencias finitas:

$$2\Delta y (u_{i+1,j} - u_{i-1,j}) + 2\Delta x (v_{i,j+1} - v_{i,j-1}) = 0, \quad (3.6.7)$$

esto hace que el flujo neto fuera de cada caja de la rejilla sea cero.

La expresión en diferencias finitas para (3.6.3) es:

$$(A_{i,j,n+1} - A_{i,j,n}) 4\Delta x \Delta y = - [(F_{i+1,j}^x - F_{i-1,j}^x) 2\Delta y + (F_{i,j+1}^y - F_{i,j-1}^y) 2\Delta x] \Delta t. \quad (3.6.8)$$

$F_{i,j}^x$ y $F_{i,j}^y$ representan el flujo total (en la dirección positiva de cada coordenada) a través de las líneas centradas en (i, j) en el intervalo de tiempo $\Delta t = t_{n+1} - t_n$. Entonces, los flujos son promedios en el tiempo y en el espacio:

$$F_{i,j}^x = \frac{1}{2\Delta t \Delta y} \int_n^{n+1} \int_{j-1}^{j+1} A(x_i, y, t) u(x_i, y) dy dt$$

$$F_{i,j}^y = \frac{1}{2\Delta t \Delta x} \int_n^{n+1} \int_{i-1}^{i+1} A(x, y_j, t) v(x, y_j) dx dt. \quad (3.6.9)$$

Estos flujos se pueden expresar como productos de promedios:

$$F_{i,j}^x = A_{i,j}^x u_{i,j} + \frac{1}{3} (\Delta y)^2 \frac{\partial A}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} + O[(\Delta y)^4], \quad F_{i,j}^y = A_{i,j}^y v_{i,j} + \frac{1}{3} (\Delta x)^2 \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + O[(\Delta x)^4], \quad (3.6.10)$$

donde, $A_{i,j}^x$ y $A_{i,j}^y$ son promedios unidimensionales, contraídos con respecto a $A_{i,j,n+\frac{1}{2}}$ en la dirección x y y respectivamente:

$$A_{i,j}^x = \frac{1}{2\Delta t \Delta y} \int_n^{n+1} \int_{j-1}^{j+1} A(x_i, y, t) dy dt, \quad A_{i,j}^y = \frac{1}{2\Delta t \Delta x} \int_n^{n+1} \int_{i-1}^{i+1} A(x, y_j, t) dx dt. \quad (3.6.11)$$

Los valores de $A_{i,j}^x$ y $A_{i,j}^y$ se pueden expresar de la manera siguiente:

si realizamos una expansión de Taylor en el tiempo y el espacio de (3.6.11):

$$A_{i,j}^x = \frac{1}{3} \left[4A_{i,j,n+1/2} - \frac{1}{2}(A_{i+1,j,n} + A_{i-1,j,n+1}) \right] - \frac{1}{6} \Delta t \left(\Delta x \frac{\partial^2 A}{\partial t \partial x} - \frac{1}{2} \Delta t \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} \right) + O[(\Delta x)^4]. \quad (3.6.12)$$

con su análogo respectivo para $A_{i,j}^y$.

Si la dirección de integración se alterna en cada avance temporal, el término de orden $\Delta x \Delta t$ se cancela, obtenemos un esquema de cuarto orden:

$$A_{i,j}^x = \frac{1}{6} \left[8A_{i,j,n+1/2} - (A_{i-1,j,n+1} + A_{i+1,j,n}) \right],$$

$$A_{i,j}^y = \frac{1}{6} \left[8A_{i,j,n+1/2} - (A_{i,j-1,n+1} + A_{i,j+1,n}) \right]. \quad (3.6.13)$$

Además, podemos aproximar las primeras derivadas por diferencias sencillas centradas en $(i, j, n + \frac{1}{2})$ con intervalos $2\Delta x$ y $2\Delta y$:

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{A_{i,j+2,n+1/2} - A_{i,j-2,n+1/2}}{4\Delta y}; \quad \frac{\partial A}{\partial x} = \frac{A_{i+1,j,n+1/2} - A_{i-2,j,n+1/2}}{4\Delta x},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{u_{i,j+2} - u_{i,j-2}}{4\Delta y}; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{v_{i+2,j} - v_{i-2,j}}{4\Delta x}. \quad (3.6.14)$$

Sustituyendo las expresiones en (3.6.10) obtenemos para los flujos:

$$F_{i,j}^x = \frac{1}{6} \left[u_{i,j} \left\{ 8A_{i,j,n+1/2} - (A_{i-1,j,n+1} + A_{i+1,j,n}) \right\} \right] + \frac{1}{8} (A_{i,j+2,n+1/2} - A_{i,j-2,n+1/2}) (u_{i,j+2} - u_{i,j-2})$$

$$F_{i,j}^y = \frac{1}{6} \left[v_{i,j} \left\{ 8A_{i,j,n+1/2} - (A_{i,j-1,n+1} + A_{i,j+1,n}) \right\} \right] + \frac{1}{8} (A_{i+2,j,n+1/2} - A_{i-2,j,n+1/2}) (v_{i+2,j} - v_{i-2,j}). \quad (3.6.15)$$

Para tratar el término difusivo podemos utilizar el Método de DuFort- Frankel (Carnahan, 1969); el cual utiliza 3 intervalos temporales $(t_n, t_{n+1/2}, t_{n+1})$, con la molécula computacional que muestra la figura (2.6.1). Entonces, al esquema obtenido con la aproximaciones anteriores, le agregamos el término:

$$\frac{\eta \Delta t}{(\Delta x)^2} \left[(A_{i+1,j,n+1/2} + A_{i-1,j,n+1/2}) - (A_{i,j,n} + A_{i,j,n+1}) \right] + \frac{\eta \Delta t}{(\Delta y)^2} \left[(A_{i,j+1,n+1/2} + A_{i,j-1,n+1/2}) - (A_{i,j,n} + A_{i,j,n+1}) \right]. \quad (3.6.16)$$

Al sustituir los esquemas (3.6.15) y (3.6.16) en (3.6.8) se obtiene el esquema definitivo; el cual se puede ver en el Apéndice 4.

A continuación discutiremos la manera en que se debe recorrer la rejilla para lograr avances temporales correctos. Para calcular el valor de $A_{i,j,n+1}$, es necesario conocer los siguientes valores de A en $t_{n+\frac{1}{2}}$: $A_{i+1,j}$, $A_{i-1,j}$, $A_{i,j+1}$, $A_{i,j-1}$; cada uno de estos requiere también de sus vecinos más cercanos en t_n , por ejemplo: para obtener $A_{i+1,j,n+\frac{1}{2}}$ se necesita $A_{i+2,j}$, $A_{i,j}$, $A_{i+1,j+1}$ y $A_{i,j-1}$ (todos en t_n). La figura (2.6.2) muestra en detalle la rejilla que debe considerarse para avanzar la iteración. Para obtener los valores de los puntos B en t_{n+1} , se deben conocer los puntos C y D en $t_{n+\frac{1}{2}}$ y los valores de los puntos A en t_n . Esto genera una rejilla con puntos alternantes en diferentes niveles temporales constituida por cuatro rejillas independientes, con espaciamiento entre puntos de $2\Delta x$ y $2\Delta y$.

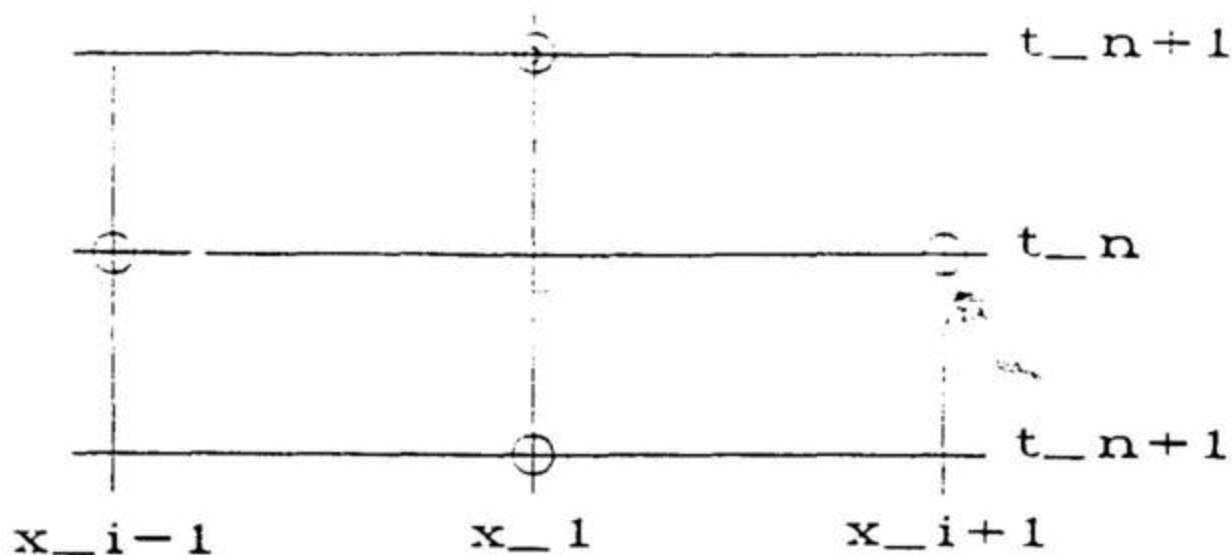


Figura 2.6.1 Molécula computacional para el método de Dufort Frankel.

El esquema se puede aplicar en cada una de estas rejillas y se debe recordar que, se debe invertir la dirección de integración en cada avance temporal.

La ecuación (3.1.1) también se puede resolver directamente utilizando un esquema para las dos componentes del campo y, para extender el estudio a tres dimensiones no se puede utilizar la simplificación del potencial vectorial unidimensional, es útil tener el esquema apropiado para la obtención directa del campo magnético.

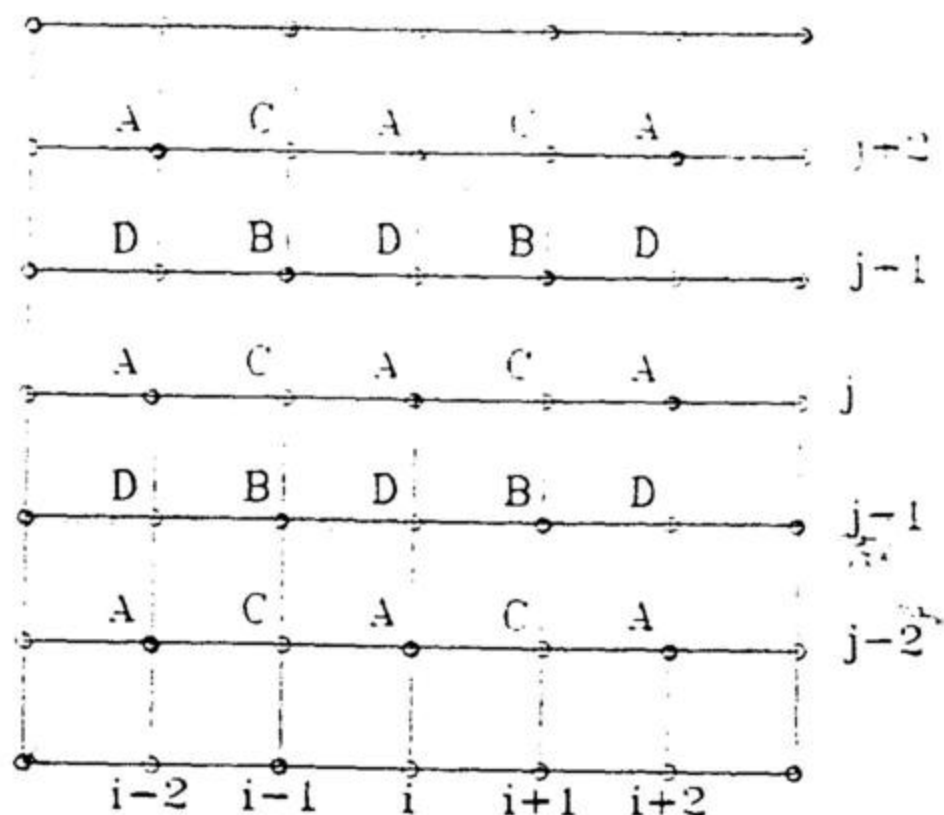


Figura 2.6.2 Rejilla para el método convectivo.

Si no consideramos el término difusivo (nuevamente se tratará al final), podemos escribir (3.1.1) en forma integral:

$$\Delta \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = - \int \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} dt. \quad (3.6.17)$$

Donde \vec{B} debe cumplir en cualquier superficie cerrada la siguiente condición:

$$\int \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0. \quad (3.6.18)$$

Esto es equivalente a la condición $\nabla \cdot \vec{B} = 0$. Denotaremos las componentes de \vec{B} de la siguiente manera:

$$\vec{B} = (K, L). \quad (3.6.19)$$

Entonces, si consideramos el flujo a través de una caja centrada en (x_i, y_j) , tendremos una aproximación para (3.6.17) :

$$(K_{i,j+1,n} - K_{i,j-1,n}) 2\Delta x + (L_{i+1,j,n} - L_{i-1,j,n}) 2\Delta y = 0. \quad (3.6.20)$$

Aquí, los valores de K y L están definidos como flujos promedios a través de superficies de una caja de espesor unitario en la dirección z :

$$K_{i,j,n} = \frac{1}{2\Delta y} \int_{j-1}^{j+1} K(x_i, y, t_n) dy,$$

$$L_{i,j,n} = \frac{1}{2\Delta x} \int_{i-1}^{i+1} L(x, y_j, t_n) dx. \quad (3.6.21)$$

La aproximación en diferencias finitas para (3.6.17) quedaría así:

$$\begin{aligned} (K_{i,j,n+1} - K_{i,j,n}) 2\Delta y &= - (E_{i,j+1}^z - E_{i,j-1}^z) \Delta t, \\ (L_{i,j,n+1} - L_{i,j,n}) 2\Delta x &= (E_{i+1,j}^z - E_{i-1,j}^z) \Delta t, \end{aligned} \quad (3.6.22)$$

donde $E_{i,j}^z$ es el valor promedio en un intervalo de tiempo de la componente z del campo eléctrico en el punto (x_i, y_j) que corresponde a la componente z del producto $-(\vec{u} \times \vec{B})$:

$$E_{i,j}^z = (u_{i,j}^y L_{i,j}^x - v_{i,j}^x K_{i,j}^y), \quad (3.6.23)$$

aquí, $L_{i,j}^x$ y $K_{i,j}^y$ son los valores de las componentes del campo magnético contraídas en las direcciones x y y , y están dadas por los promedios en un intervalo de tiempo:

$$\begin{aligned} K_{i,j}^y &= \frac{1}{\Delta t} \int_n^{n+1} K(x_i, y, t) dt, \\ L_{i,j}^x &= \frac{1}{\Delta t} \int_n^{n+1} L(x, y_j, t) dt. \end{aligned} \quad (3.6.24)$$

La velocidad la podemos considerar como estacionaria, entonces, $u_{i,j}^y$ y $v_{i,j}^x$ son directamente los valores en el punto (x_i, y_j) . Podemos aproximar las componentes del campo magnético contraídas; de manera análoga al caso del potencial vectorial, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} K_{i,j}^y &= \frac{1}{6} \left[8K_{i,j,n+\frac{1}{2}} - (K_{i,j-1,n+1} + K_{i,j+1,n}) \right], \\ L_{i,j}^x &= \frac{1}{6} \left[8L_{i,j,n+\frac{1}{2}} - (L_{i-1,j,n+1} + L_{i+1,j,n}) \right]. \end{aligned} \quad (3.6.25)$$

Éstas expresiones se pueden sustituir en (3.6.23), y ésta a su vez en (3.6.22), para obtener el esquema definitivo para estas dos ecuaciones. Para que la relación final quede expresada en función de términos conocidos, de acuerdo a la forma en que se recorre la malla, es necesario utilizar (3.6.20) para sustituir algunos valores de las componentes de campo magnético (por ejemplo: $K_{i-1,j+1}^n$ y $K_{i+1,j}^{n+1}$). No es necesario resolver las dos ecuaciones (3.6.20), porque se puede utilizar (3.6.22) para calcular una de las componentes, una vez encontrado el valor de la otra, garantizándose así, el cumplimiento de dicha ecuación fundamental para el campo magnético.

4. Condiciones de Frontera

Para la tarea de establecer las condiciones de fronteras, se considerarán los extremos superior e inferior como paredes rígidas perfectamente conductoras, de tal manera que, las líneas de campo permanecen unidas siempre a ellas. Los extremos laterales se tomaron como periódicos, es decir, cada celda está rodeada a ambos lados por otras celdas similares, aunque el considerar que las líneas de campo externas a la celda permanecen rígidas, no produce diferencia apreciable alguna, ya que los efectos en los extremos son muy débiles. La manera de relacionar cada uno de los valores internos (dentro de la rejilla) de las cantidades (A, v, L, K) con los valores externos es por medio de las condiciones antes mencionadas. La primera sería equivalente para el caso del potencial a

$$A_{i,NY,n} = A_{i,NY,0} \text{ y } A_{i,0,n} = A_{i,0,0}, \quad (4.7.1)$$

y para el caso del campo magnético

$$K_{i,NY,n} = K_{i,0,n} = 0. \quad (4.7.2)$$

La relación fundamental que permite relacionar las componentes del campo de velocidades es (4.7.1).

La segunda condición se obtiene, asignándole valores fijos a cada una de las componentes externas.

El detalle de las condiciones de frontera usadas para cada uno de los casos aplicados a los diferentes esquemas, se puede ver en cada uno de los listados que detalla cada programa de ordenador (solicitarlo a los autores del artículo).

4.1. Estabilidad y Consistencia

La estabilidad mide la capacidad de una determinada ecuación en diferencias finitas de no crecer indefinidamente, a medida que el intervalo temporal se hace muy pequeño ($\Delta t \rightarrow 0$). Es decir, existe un tope para el cual, cualquier información (ya sea de las condiciones iniciales, condiciones de frontera, o de errores en los cálculos) se puede amplificar a medida que se itera. La consistencia verifica si la solución de una ecuación en diferencias finitas se aproxima a la solución de la ecuación deseada, o a alguna otra. Para el método explícito verificamos la estabilidad numéricamente, y se obtuvo la siguiente condición:

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq \eta \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \leq 0.2, \quad (4.8.1)$$

esto para el caso de $\Delta x = \Delta y$. Ese criterio hace este método útil para números de Reynolds no mayores de 100, utilizando intervalos de tiempo óptimos de 0.001 en una rejilla de 100 X 100.

Para el método del promedio ponderado obtuvimos en el mejor de los casos, cuando ($\theta = \frac{1}{2}$, lo que corresponde a Crank- Nicolson), la siguiente condición:

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq \eta \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \leq 1 \quad (4.8.2)$$

bajo la misma condición anterior, se obtiene un aumento en el intervalo temporal de $\Delta t = 0.01$. La condición de estabilidad obtenida numéricamente para el método de direcciones alternantes es

$$10 \geq \frac{\Delta t}{\Delta x} \geq 2\eta \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \geq 1, \quad (4.8.3)$$

esto da como resultado una ganancia en el intervalo de tiempo, con un límite superior de $\Delta t = 0.1$, y un aumento permitido en el número de Reynolds a 200.

Cuando se utilizan los esquemas convectivos, la condición que obtenemos es:

$$\frac{1}{\Delta x} \geq \frac{\eta}{(\Delta x)^2} \geq 1. \quad (4.8.4)$$

Los efectos de la resistividad en el intervalo temporal son muy pequeños, y se puede trabajar con números de Reynolds de 1000 en una rejilla de 50 X 50. La consistencia de todos estos métodos numéricos la verificamos, y concuerda con la ecuación a resolver.

5. Simulaciones

Aquí discutiremos las simulaciones ejecutadas con cada uno de los métodos numéricos descritos en el apartado anterior. Para este estudio escogimos campos de velocidades representados por funciones de corriente muy versátiles que pueden representar, desde un vórtice simple, hasta uno doble con sólo ajustar un parámetro.

Se realizaron una gran cantidad de iteraciones para cada campo de velocidades con diferentes números de Reynolds, y se presentan los resultados más representativos.

Para la investigación del comportamiento del plasma analizamos las simulaciones, observando la evolución directa del campo magnético, así como también, calculamos y estudiamos la densidad de energía magnética media en la región; describimos todo esto, considerando el tipo de torbellino que estamos representando y el número de Reynolds que tenga.

Finalmente hacemos una interpretación física de los resultados obtenidos en las simulaciones, de acuerdo a lo discutido en el párrafo 1. Explicamos el comportamiento del campo magnético en función de las contribuciones que da cada uno de los términos de la ecuación de inducción magnética, y los intervalos temporales involucrados en los procesos en función de los tiempos característicos del plasma.

5.1. Modelo Físico

Resolvimos la ecuación de inducción magnética por medio de los métodos descritos en el párrafo 3; suponiendo las condiciones de periodicidad en las fronteras laterales y tomando las fronteras superior e inferior como perfectamente conductoras, es decir, las líneas de campo magnético estarán

fijas en dichos puntos. Esto lo hicimos para dos campos de velocidades específicos y para números de Reynolds en un rango entre 100 y 1000. Tomamos como campo magnético inicial uno uniforme.

A continuación describiremos las funciones corrientes asociadas a los campos de velocidades: Torbellino intenso:

$$\psi = -\frac{1}{4\pi} (4(1-m) \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - m) (1 - 4 \left(y - \frac{1}{2}\right)^2)^4 \cos \pi \left(x - \frac{1}{2}\right)$$

$$(0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1),$$

donde m es un parámetro ajustable ($0 \leq m \leq 1$), que permite representar diferentes campos de velocidades. Cuando $m = 1$ representa el campo estudiado por (Weiss, 1966) denotado por él como torbellino simple; a medida que reducimos el valor de m , las líneas de corriente comienzan a comprimirse en el centro, ya para el valor de $m = 0,4$ se puede apreciar la formación de dos torbellinos que circulan en el mismo sentido (horario en este caso), y para valores menores del parámetro la existencia de dos torbellinos es clara.

Es decir, con la variación de m podemos estudiar desde un torbellino simple hasta un sistema de dos torbellinos, además, el parámetro m es una medida de la localización de éstos, como muestra la siguiente tabla:

Tabla 5.1

Relación del parámetro m
con la distancia entre torbellinos

m	separación entre torbellinos ($\times L$)
0,40	0,32
0,30	0,50
0,20	0,59
0,10	0,66
0,05	0,68
0,01	0,69

Torbellino débil:

$$\psi = -\frac{1}{\pi} 4(1-m) \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 - m) \cos \pi \left(x - \frac{1}{2} \right) \cos \pi \left(y - \frac{1}{2} \right)$$

$$(0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1).$$

Esta función corriente está relacionada a un campo de velocidades muy similar al anterior sólo que, la velocidad no decae tan fuertemente en las fronteras horizontales, sino que mantiene una simetría con las fronteras verticales.

5.2. Visualización

La resolución de la ecuación de inducción magnética se hizo utilizando el *cluster* de ordenadores VAX – workstation 3100 M38 de Digital perteneciente al Laboratorio de Investigaciones Astrofísicas de la Escuela de Física. En la mayoría de los casos se utilizó una rejilla espacial de 100×100 . Los resultados obtenidos para el potencial en cada intervalo de tiempo fueron procesados con el paquete *PICASSO* para representar gráficamente las líneas de contorno equipotenciales, las cuales constituyen las líneas de campo magnético. Cada una de las gráficas fue grabada en una cinta de VHS por medio de un procesador Pro PC/TV plus de AlTech que transfiere la imagen generada por el ordenador como entrada a un grabador de video Panasonic U-Vision.

La reproducción en forma continua de las imágenes genera una película que muestra la evolución del campo magnético en la región.

Con los mismos archivos del potencial vectorial se puede calcular la densidad de energía magnética en cada punto y la densidad de energía media de la región; y por un procedimiento análogo al del campo magnético, se puede generar una película que muestra la evolución de dicha densidad.

Aquí mostraremos imágenes fijas relevantes para la discusión de los resultados.

5.3. Resultados

Los resultados directos de algunas de las simulaciones para el caso del torbellino fuerte se pueden observar desde la figura 3.4.1 hasta la figura 3.4.15.

El primer estudio que realizamos es el variación de la densidad de energía magnética media (que es también una medida del campo magnético medio) en la región para un número de Reynolds dado en un torbellino intenso; y variando el parámetro m pudimos estudiar desde un vórtice simple hasta uno doble.

Dentro del comportamiento general se puede encontrar lo siguiente:

en todos los casos la densidad de energía magnética media aumenta hasta alcanzar un valor máximo al acercarse su estado estacionario. Este valor es menor mientras menor sea el valor de m . Durante el ascenso tiene un crecimiento continuo, pero para valores de $m \geq 0,2$ aparece un intervalo donde el ritmo de crecimiento disminuye, (inclusive decae un poco para valores muy bajos de m), para luego continuar creciendo hasta el máximo; el tiempo que transcurre para llegar a ese intervalo es constante y la duración aumenta ligeramente a medida que los torbellinos se separan.

Una vez que se ha alcanzado la máxima densidad de energía media, esta comienza a decrecer hasta alcanzar un estado estacionario. La manera en que alcanza este estado difiere dependiendo del tipo de torbellino.

Para valores de m mayores de 0,6 el decrecimiento ocurre de una manera continua hasta llegar a una densidad de energía ligeramente menor de la estacionaria, para luego alcanzarla. El tiempo que tarda en alcanzar el estado estacionario es mayor mientras menor sea el valor de m .

A medida que decrece el valor de m la densidad de energía media comienza a oscilar en forma amortiguada hasta alcanzar el estado estacionario, (cabe notar que esa oscilación la tiene para valores mayores de m , pero éstas son demasiado pequeñas). La amplitud de la oscilación amortiguada, así como, el período de esa oscilación aumentan a medida que el valor de m va disminuyendo. Este comportamiento es similar a un subamortiguamiento.

Cuando el valor de m es menor que 0,2 (en el mismo caso que la amortiguación en el crecimiento es notoria) la oscilación prácticamente ha desaparecido y, la densidad de energía media va directamente hasta el estado estacionario; en el caso de valores muy pequeños de m la máxima densidad de energía media ocurre en el estado estacionario. Este comportamiento es similar a un sobreamortiguamiento.

En las tablas siguientes podemos observar estos comportamientos de una manera cuantitativa:

Tiempo necesario para alcanzar la densidad de
energía magnética media máxima

Tabla 5.3.1

Número de Reynolds magnético

$$R_m = 1000$$

m	tiempo $\times 0,65\tau_0$
1,00	3,0
0,90	3,3
0,70	3,7
0,50	4,5
0,40	4,9
0,30	5,1
0,20	5,8
0,15	7,2
0,10	8,8
0,07	11,7

Tabla 5.3.2

Número de Reynolds magnético
 $R_m = 800$

m	tiempo $\times 0,65\tau_0$
1,00	2,8
0,70	3,6
0,30	4,9
0,10	9,0

Tabla 5.3.3

Número de Reynolds magnético
 $R_m = 500$

m	tiempo $\times 0,65\tau_0$
1,00	2,5
0,70	3,3
0,30	4,8
0,10	10,0

Tabla 5.3.4
Número de Reynolds magnético
 $R_m = 200$

m	tiempo $\times 0,65\tau_0$
1,00	2,0
0,70	2,9
0,40	4,0
0,30	4,5
0,10	10,0

En las figuras 3.4.16 y 3.4.17 se puede observar en detalle el comportamiento del tiempo necesario para alcanzar la densidad de energía media máxima, de acuerdo a los diferentes tipos de torbellino con distintos números de Reynolds magnéticos.

Se puede notar que en forma general, dentro del aumento de este tiempo, a medida que el torbellino se va bifurcando, ocurre un aumento mucho mayor justo en el rango donde el torbellino pasa de ser uno simple, a uno doble bien definido; además, el ritmo de aumento es mayor, mientras menor es el número de Reynolds y, es mucho más apreciable para un torbellino doble que para uno simple.

Tabla 5.3.5
Densidad de energía magnética media
estacionaria para diferentes Números de Reynolds
magnéticos y diferentes tipos de torbellinos

R_m	$m = 1,00$	$m = 0,70$	$m = 0,30$	$m = 0,10$
1000	10,60	10,60	10,60	10,60
800	9,80	9,80	9,80	9,80
500	8,25	8,25	8,25	8,20
200	5,40	5,38	5,34	4,91

En la figura 3.4.18 se puede apreciar la dependencia de la densidad de energía media estacionaria, en función del número de Reynolds para los diferentes tipos de torbellino. Cabe destacar, el hecho de que ésta alcanza el mismo valor independiente del tipo de torbellino, salvo para para R_m muy bajos.

En la siguiente tabla se presentan los ajustes para dichas dependencias de la forma potencial $B_{est}^2 = kR_m^n$, con sus respectivos coeficientes de correlación r .

Tabla 5.3.6

Coeficientes del ajuste potencial
de la densidad de energía magnética media
estacionaria y el Número de Reynolds magnético

Coeficientes	$m = 1,00$	$m = 0,70$	$m = 0,30$	$m = 0,10$
k	0,59	0,58	0,56	0,39
n	0,42	0,42	0,43	0,48
r	0,998	0,998	0,998	0,995

Tabla 5.3.7

Densidad de energía magnética media
máxima para diferentes Números de Reynolds
magnéticos y diferentes tipos de torbellinos

R_m	$m = 1,00$	$m = 0,70$	$m = 0,30$	$m = 0,10$
1000	27,60	24,20	19,40	14,60
800	24,10	21,33	17,50	12,70
500	18,32	16,40	13,80	12,70
200	10,69	10,00	8,20	5,00

En la figura 3.4.19 se puede ver la variación de la densidad de energía máxima para los diferentes números de Reynolds; en todos los casos ocurre una disminución en ese valor máximo, pero este es más acentuado para R_m altos, además, es muy notorio el aumento en el ritmo de la disminución

para el caso de un torbellino doble, así como también, una zona de estabilización cuando ocurre la transición de un torbellino simple a uno doble.

La relación directa entre la densidad de energía máxima y el Número de Reynolds se puede observar en la figura 3.4.20, y en la tabla 3.4.8 el ajuste a una relación potencial entre ambos, $B_{max}^2 = kR_m^n$

Tabla 5.3.8

Coefficientes del ajuste potencial
de la densidad de energía magnética media
máxima y el Número de Reynolds magnético

Coefficientes	$m = 1,00$	$m = 0,70$	$m = 0,30$	$m = 0,10$
k	0,47	0,55	0,48	0,15
n	0,59	0,55	0,54	0,67
r	0,99999	0,99995	0,99929	0,99978

Tabla 5.3.9

Tiempo necesario para alcanzar
la densidad de energía media estacionaria
para $R_m = 1000$

m	tiempo $\times 0,65\tau_0$
1,00	7,20
0,9	8,20
0,7	10,00

En esta tabla hemos presentado los torbellinos para los cuales la densidad decae directamente a un valor estacionario. En los casos en que ella oscila, podemos describir ese período de oscilación con (T) y, es una medida del amortiguamiento; así, podemos calcular la razón de dos máximos consecutivos, la cual denotaremos RMC , (el decaimiento es tan rápido que la razón es apreciable a lo sumo hasta un tercer máximo).

Tabla 5.3.10

Período de oscilación en el amortiguamiento
de la densidad de energía magnética media y
Razón de dos máximos consecutivos

R_m	m	$T(\times \tau_0)$	RMC_1	RMC_2
200	0,30	8,80	0,72	~ 100
500	0,30	8,50	0,68	0,92
800	0,30	8,30	0,64	0,91
1000	0,30	8,20	0,63	0,90
1000	0,50	4,90	0,55	0,95
200	0,70	3,50	0,62	0,94
500	0,70	2,50	0,53	0,98

Para el caso del torbellino débil, podemos notar aspectos relevantes en las simulaciones ejecutadas, desde la figura 3.4.21 hasta la 3.4.22.

No ocurre una atenuación directa de la densidad de energía para torbellinos simples, sino que tiene un carácter oscilatorio, todo lo demás guarda un comportamiento similar al torbellino fuerte.

Cuando investigamos la evolución del campo dependiendo del estado inicial de este, estudiamos la diferencia que se genera cuando iniciábamos con un campo uniforme vertical y, cuando lo hacíamos con uno horizontal, (realmente lo que se hizo fue dejar el campo magnético inicial vertical, y se rotó el campo de velocidades, lo que es equivalente a girar el campo). Se puede notar comportamientos similares, con la salvedad de que los campos magnéticos medio máximo y estacionario son menores para el campo magnético inicial vertical, (62% y 43% respectivamente).

5.4. Interpretación Física

Para números de Reynolds altos observamos una fuerte distorsión de las líneas de campo magnético. Debido a la fuerte convección, se empieza a generar una componente de campo paralela a la dirección del movimiento del plasma, proveniente de la interacción de la velocidad con la componente perpendicular del campo, entonces, el ritmo de aumento del campo debe ser constante, y del orden de:

$$\frac{UB_0}{L} = \frac{B_0}{\tau_0}. \quad (5.5.1)$$

Así, el campo comienza a amplificarse, haciéndose más intenso en las regiones fronterizas laterales de la celda, para el caso de un torbellino simple, mientras que en el torbellino doble lo hace, tanto en esas zonas, como en la región comprendida entre los torbellinos. A la vez que esto ocurre, la escala de variación espacial de la componente paralela va decreciendo linealmente:

$$l \sim \frac{B_0}{B}L \sim \frac{L^2}{Ut} = \frac{\tau_0}{t}L. \quad (5.5.2)$$

Esto conduce a un aumento en la difusión que es del orden de:

$$\frac{\eta B}{l^2} \sim \frac{B_0}{\tau_0} \frac{1}{R_m} \left(\frac{B}{B_0} \right)^3. \quad (5.5.3)$$

En el momento en que el término resistivo es comparable con el convectivo, la amplificación del campo cesa, esto ocurre cuando:

$$\frac{UB_0}{L} \sim \frac{\eta B}{l^2}, \quad (5.5.4)$$

si usamos (5.5.1) y (5.5.3) tenemos:

$$B \sim R_m^{\frac{1}{3}} B_0, \quad (5.5.5)$$

que en función de la densidad de energía magnética media (\bar{B}^2) es :

$$B_{max}^2 \sim R_m^{\frac{2}{3}} B_0^2. \quad (5.5.6)$$

Nótese en la ecuación (5.5.3) que el término difusivo varía como el inverso de R_m , entonces, para números de Reynolds bajos la difusión llegará más pronto a nivelar a la convección, por lo que, el campo no sufrirá una distorsión tan grande, antes de que se detenga su amplificación.

Cuando revisamos la tabla 3.4.8 notamos una muy buena concordancia con este resultado, además, podemos ver que para los torbellinos dobles la concentración del campo no es tan fuerte como en el simple, esto es debido, entre otras cosas, a que la velocidad media en los torbellinos dobles es menor.

El tiempo necesario para alcanzar dicho máximo de la relación (5.5.2) es:

$$t \sim R_m^{\frac{1}{3}} \tau_0. \quad (5.5.7)$$

Revisando desde las tablas 3.4.1 hasta la 3.4.4 y las figuras 3.4.23 y 3.4.24 podemos notar que el plasma cumple con ese comportamiento fielmente para valores del número de Reynolds altos y torbellinos simples; a medida que R_m disminuye el tiempo, este tiende apenas ligeramente a ser mayor; en todos los casos, para torbellinos dobles, la duración es mucho mayor. De las definiciones de τ_0 , τ_η y R_m y la escogencia de $U = 1$ y $L = 1$ tenemos que dichos tiempos característicos guardan la siguiente relación:

$$\tau_\eta = 0,02533\tau_0,$$

así, para los $R_m = 1000, 800, 500, 200$ tenemos: $\tau_\eta = 25,33; 20,26; 12,67; 5,07$ respectivamente.

Los tiempos en alcanzar los máximos son muy bajos comparados con los tiempos característicos de decaimiento resistivo, como es de esperar.

Recordemos que en los casos de torbellinos dobles, ocurre un lapso de tiempo en el que la densidad de energía magnética tiende a mantenerse estable, esto sucede aproximadamente a $t = 3,00\tau_0$, independiente del número de Reynolds magnético. Este efecto empieza a aparecer cuando simulamos torbellinos que se mantienen en la frontera, entre un torbellino simple y uno doble; y es precisamente aquí, cuando la alta densidad de campo magnético se empieza a acumular en otra región, además, de las fronteras de la celda; lo hace que en la zona existan dos torbellinos. Estas dos regiones alcanzan estados estacionarios en diferentes escalas de tiempo, la zona central de la celda se estabiliza primero; esto ocurre a un mismo tiempo independiente del número de Reynolds. De aquí en adelante el aumento se debe a las zonas periféricas, lo que produce un retardo en el tiempo para llegar al máximo. El proceso de reconexión (unión de las líneas de campo) comienza a ser importante en este momento; el campo en las zonas centrales de los torbellinos empieza a decrecer debido a la difusión (las líneas de campo reconectadas comienzan a desaparecer).

Para el caso de torbellinos simples la convección es tan fuerte que el campo magnético almacenado en las zonas externas, es muy intenso, entonces, las fluctuaciones que ocurren en la zona central son muy pequeñas comparadas con éste, de tal manera que el campo se atenúa de una forma directa. En los torbellinos dobles este comportamiento ocurre a menor escala, si es comparable con las densidades magnéticas que logra almacenar en tiempos cortos. En cada uno de los pequeños torbellinos el campo es capaz de amplificarse a mayor grado comparativo antes que los efectos resistivos sean apreciables, disminuyendo de una forma oscilatoria.

El hecho de que el período oscilatorio de estas fluctuaciones disminuya a medida que aumenta el número de Reynolds, se debe a la misma razón por la cual disminuye el tiempo necesario para alcanzar el máximo y el estado estacionario.

Cuando los torbellinos se encuentran muy separados, la zona de acumulación del campo entre ellos es muy grande, tal que deja dimensiones muy pequeñas para la región en que el campo continúa fluctuando, es por esto que la disminución, luego de llegar al máximo, no es muy grande, y ocurre lenta y directamente hasta el estado estacionario.

El valor del campo magnético estacionario coincide con resultados anteriores (Weiss, 1966): $B_{est} \sim R_m^{\frac{1}{4}} B_0$, en función de la densidad magnética: $B_{est}^2 \sim R_m^{\frac{1}{2}} B_0^2$ (vease la figura 3.2.25 y la

tabla 3.4.6). La independencia de este campo con el tipo de torbellino es debida a que la región en donde está concentrado es muy estrecha, entonces, las variaciones de la velocidad son lineales con la posición. El campo estacionario que se obtiene en una región con dichas características, tiene un estado estacionario de forma gaussiano que en valor medio cumple con esa ley potencial.

La forma general en que evoluciona el campo magnético es independiente de la orientación relativa del campo inicial con el torbellino. Siempre se dará la compresión del campo en las zonas limítrofes, y la eliminación del campo en las centrales, debido a los procesos explicados anteriormente. La diferencia fundamental es la forma en que se va almacenar el campo en las zonas de alta densidad. En aquellos torbellinos donde las líneas de corriente más densas estén lo más alineadas posible con el campo inicial, se obtendrá el mayor estado estacionario.

5.5. Conclusiones

Los resultados obtenidos aquí son de gran utilidad para mejorar la comprensión del comportamiento de los campos magnéticos en cuerpos celestes. El conocer la interacción detallada entre el plasma y el campo magnético nos permite relacionar dichos resultados con aplicaciones directas en la astrofísica.

Entre los fenómenos importantes que ocurren, podemos destacar: la amplificación del campo y su disminución hasta un estado estacionario; la dependencia potencial de estos con el número de Reynolds magnético y con los tiempos característicos de convección y difusión; la localización de las zonas de alto acumulamiento de campo, y las de muy baja densidad donde ocurre la expulsión de las líneas de campo; las diferencias que existe en la evolución del campo para el caso de un torbellino simple y uno doble entre torbellinos, entre las que podemos incluir el retardo que ocurre en los tiempos necesarios para alcanzar los máximos y la estabilidad magnética; la aparición de un período estacionario en el aumento del campo para el torbellino doble y las diferentes formas de alcanzar el estado final (directa y oscilatoria).

El Sol tiene una región convectiva en su superficie con una alta turbulencia, esto produce números de Reynolds magnéticos del orden de 10^6 a 10^{10} , teniendo estos influencia sobre el movimiento del plasma; estos dos factores hacen que los resultados obtenidos no se apliquen directamente a la búsqueda de explicaciones de los fenómenos solares; sin embargo, se conoce la existencia de períodos en las fluctuaciones del campo magnético solar, así como, la concentración del campo en las fronteras de supergránulos en la cromósfera. Es ahí donde podríamos hacer uso de las técnicas aquí desarrolladas a esos fenómenos solares.

De los métodos numéricos utilizados aquí, el de mayor alcance (números de Reynolds más altos y factor de convergencia más eficiente), es el esquema convectivo; el cual es generalizable a tres dimensiones (estudio ya iniciado por los autores) y a otros tipos de condiciones de contorno, como puede ser la simetría esférica, condiciones muy importante para su aplicación a los problemas astrofísicos; también la extensión del trabajo en el estudio de los filamentos solares y *solar flares*. La necesidad de desarrollo de nuevos métodos numéricos para tratar los fenómenos de alta turbulencia es esencial. El estudio que hemos realizado nos da mucha información sobre la interacción de torbellinos, además, de los efectos que producen la bifurcación de torbellinos o la unión de estos.

Entre los métodos que en un futuro podemos tratar están los espectrales, desarrollados unos veinte años atrás (Drobot, 1991) . En estos métodos las ecuaciones se expanden en series de polinomios ortogonales o de exponentes complejos. También están los métodos de diferencias híbridas y los espectrales de elementos y de partículas (Fletcher, 1990).

Otro aspecto importante es la necesidad de realizar estudios de la dinámica no lineal, que ha tenido un gran desarrollo en los últimos quince años, ésta es la una nueva vía de estudiar plasmas turbulentos, v.g., como los que se producen en el Sol. La ecuación de inducción también se puede tratar en forma directa, o, con un mapeo asociado a los campos de velocidades que describan un plasma turbulento. Además, debemos incluir la evolución de dicho campo de velocidades en el tiempo a medida que interacciona con el campo.

6. Bibliografía

- (1) Ames, W., **Numerical Methods for Partial Differential Equations.** , Barnes and Noble, Inc., New York, 1971.
- (2) Aref, H., Jones, S.W., Mofina, S. and Zawadzki, I., **Vortices, Kinematics and Chaos., Physica D** , (37), 1989.
- (3) Beloshapkin, V.V, Chernikov, A.A, Natenzon, M.Ya., Petrovichev, B.A., Sadgeev, R.Z, Zaslavsky, G.M, **Chaotic streamlines in preturbulent states, Nature** , (337), 1989.
- (4) Carnahan, B., Lutler, H.A. and Wilken, J., **Applied Numerical Methods**, John Wiley and sons, Inc., New York, 1969.
- (5) Dolginov, A.Z., **Magnetic Field Generation in Celestial Bodies, Physics Reports**, 162, (2), 1988.
- (6) Drobot, A., **Computer Applications in Plasma Science and Engineering**, Springer Verlag, New York, 1991.
- (7) Elsasser, W.M., **Hydromagnetic Field Theory, Reviews of Modern Physics.**, 28, (2), 1956.
- (8) Fälthammar, C.G., **Magnetospheric Plasma Interactions, Invited lecture at the Second United Nations / European Space Agency Workshop on Basic Space Science for the Benefit of Developing Countries.**, San José, Costa Rica, Oct. 1992.
- (9) Fletcher, C.A., **Computational Technics for Fluid Dynamics**, Springer Verlag, Berlín, 1990.
- (10) Galloway, P.A. and Weiss, N.O., **Convection and Magnetic Fields in Stars, Astrophys. J.**, 243, 1981.
- (11) Jackson, J.D., **Classical Electrodynamics**, John Wiley and Sons, New York, 1962.
- (12) Landau, L.D. und Lifschitz, E.M, **Lehrbuch der Theoretischen Physik, VI, Hydrodynamik**, Akademie-Verlag, Berlín, 1974.

- (13) Landau, L.D. und Lifschitz, E.M, **Lehrbuch der Theoretischen Physik, VIII, Elektrodynamik der Kontinua**, Akademie-Verlag, Berlín, 1974.
- (14) Landau, L.D. und Lifschitz, E.M, **Lehrbuch der Theoretischen Physik, X, Physikalische Kinetic**, Akademie-Verlag, Berlín, 1974.
- (15) Orzag, S. and Patterson Jr., G.S., **Numerical Simulations of Three Dimensional Homogeneous Isotropic Turbulence**, *Phys. Rev. Letters*, 28, (2), 1972.
- (16) Pouquet, A., **Numerical Simulation of MHD Turbulence**, *Computer Physics Communications*, 49, 1988.
- (17) Roberts, K,V and Weiss, N.O., **Convective Difference Schemes**, *Math. Comp.*, 20, 1966.
- (18) Smith, G.D., **Numerical Solutions of Partial Differential Equations**, Oxford University, New York, 1965.
- (19) Weiss, N.O., **Magnetic Fields and Convection**, *Adv. Chem. Phys.*, 32, 1975.
- (20) Weiss, N.O., **The expulsion of magnetic flux by eddies**, *Proc. Roy. Soc.*, 293, 1966.
- (21) White, F., **Mecánica de Fluidos**, McGraw-Hill México, 1983.
- (22) Cowling, T.G., **The Sun**, ed. C.P.Kuiper, Univ. of Chicago Press, 1953.
- (23) Spitzer, L., **The Physics of Ionized Gases**, Interscience, New York, 1956.
- (24) Petschek, H.E., **AAS-NASA Symp. on Physics of Solar Flares**, NASA SP-50, Washington, D.C., p.425, 1964.
- (25) Sommerup, B.U.O., **Plasma Physics** 14 -283, 1970.
- (26) Bohm, D., **The Caharacteristics of Electrical Discharges in Magnetic Fields**, McGraw-Hill, New York, 1949.
- (27) Furth,H.P., Killien, J., Rosenbluth,M.N., **Phys.Fluids** 6-459, 1963.
- (28) Jaggi, R.K., **j.Geophys.Res.**68-4429, 1963.
- (29) Coppi,B., Friedland, A.B., **Astrophys. J.**169-379, 1971.
- (30) Biskamp, D., Schindler, K., **Plasma Phys.**13-161, 1971.
- (31) Linhart, J.G., **Plasma Physics**, North Holland, Amsterdam, 1960.
- (32) Alfvén, H., Carlqvist,P., **Solar Phys.**1-20, 1967.
- (33) Hamberger, S.M., Freidman, M., **Phys.Rev. Lett.**21-674, 1968.
- (34) Sagdeev, ¡R.Z., Galeev, A.A., **Nonlinear Plasma Theory** Benjamin, New York, 1969.
- (35) Coppi, B., Mazzucato, E., **Phys. Fluids**64-134, 1971.
- (36) Papadopoulos, K., **NRL Memo, Rept. 3275, Naval Research Laboratories, Washington, D.C.**, 1976.
- (37) Bernstein, I.B., Friedman, E.A., Kruskal, M.D., Kulsrud, R.M., **Proc. Roy. Soc.** A244-17, 1958.