Ciencia y Tecnología **20** No.1-2(1996) 127-135

Aproximación de sucesiones definidas por recurrencia

Ana Lía Durán
Universidad de Costa Rica
Escuela de Matemática, San José, Costa Rica
(recibido 17 junio 1995, aceptado setiembre 1995)

Abstract: It is established that recurrent sequences, $x_{n+1} = f(x_n)$, which converge to a fixed point L where the derivative $\alpha = f'(L)$ satisfies $0 < |\alpha| < 1$ and where the rest $r(x) = f(x) - L - \alpha(x - L)$ satisfies $r(x) = O(|x - L|^{1+s})$, for some $s > 0$, can be approximated as $x_n \sim L + c\alpha^n$ for a certain constant c. It is shown that such approximation might fail if only the condition $0 < |\alpha| < 1$ is assumed.

Subject headings: recurrent sequences, convergence, approximation

Resumen: Se establece que sucesiones recurrentes, $x_{n+1} = f(x_n)$, que convergen a un punto fijo L donde la derivada $\alpha = f'(L)$ cumple $0 < |\alpha| < 1$ y donde el resto $r(x) = f(x) - L - \alpha(x - L)$ satisface $r(x) = O(|x - L|^{1+s})$, para algún $s > 0$, pueden ser aproximadas como $x_n \sim L + c\alpha^n$ para alguna constante c Se demuestra que tal aproximación puede no valer si solo se asume que $0 < |\alpha| < 1$.

Encabezados de materia: secuencias recurrentes, convergencia, aproximación

1. Introducción

Las sucesiones numéricas definidas por recurrencia,

$$x_{n+1} = f(x_n), \tag{1.1}$$

donde $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ es una función dada, han sido una rica fuente de ejemplos y contraejemplos en análisis.

Las sucesiones recurrrentes no tienen por qué ser convergentes; de hecho pueden oscilar o tender a infinito. Sin embargo, si f es contínua y si $\{x_n\}$ converge al límite L, entonces L es necesariamente un punto fijo de f, es decir

$$L = f(L). \tag{1.2}$$

Una manera de estudiar la convergencia de sucesiones recurrentes en vecindades de un punto fijo dado L es estudiando el valor de la derivada

$$\alpha = f'(L) = \lim_{x \to L} \frac{f(x) - L}{x - L}. \tag{1.3}$$

En efecto, si $|\alpha| < 1$ existe un vecindario U de L de forma que si $x_0 \in U$ entonces $\{x_n\}$ converge a L. Basta tomar U de forma que

$$\left| \frac{f(x) - L}{x - L} \right| < \gamma,$$

para $x \in U \setminus \{L\}$ donde γ se escoge con $0 < \gamma < 1$. Entonces si $x \in U$, será $|f(x) - L| \leq \gamma |x - L|$ y así $|x_n - L| \leq \gamma |x_{n-1} - L| \leq \cdots \leq \gamma^n |x_0 - L|$ y, como $0 < \gamma < 1$, valdrá que $|x_n - L| \to 0$.

Por otra parte, si $|\alpha| > 1$ las sucesiones recurrentes se alejan de L, pues si x_n está cercano a L pero $x_n \neq L$ entonces $|x_{n+1} - L| \sim \alpha |x_n - L|$ y así $|x_{n+1} - L| > |x_n - L|$.

El caso límite, $|\alpha| = 1$, puede ser muy complejo.

Estos son resultados bien conocidos [1].

Supóngase ahora que se quiere investigar no solo si $\{x_n\}$ converge a L sino que tan rápido lo hace.

El caso más sencillo es cuando

$$f(x) = L + \alpha(x - L), \tag{1.4}$$

donde $0 < |\alpha| < 1$. En este caso la sucesión $\{x_n\}$ se calcula explícitamente como

$$x_n = L + c\alpha^n, \tag{1.5}$$

donde $c = x_0 - L$.

Ahora bien, en el caso general, si $0 < |f'(L)| = |\alpha| < 1$, la aproximación

$$f(x) \sim L + \alpha(x - L), \tag{1.6}$$

para x cercano a L, hace suponer que también valdrá que

$$x_n \sim L + c\alpha^n, \tag{1.7}$$

para alguna constante c.

El propósito de este artículo es establecer que la aproximación (1.7) es válida bajo una condición adicional, a saber, cuando el resto

$$r(x) = f(x) - L - \alpha(x - L), \tag{1.8}$$

satisface

$$r(x) = O(|x - L|^{1+s}) \quad , \quad \textit{cuando } x \to L \tag{1.9}$$

para algún $s > 0$. Asimismo, damos un contraejemplo que muestra que la sola existencia de $f'(L)$, es decir, la condición

$$r(x) = o(|x - L|) \quad , \quad x \to L, \tag{1.10}$$

no es suficiente, en general, para obtener (1.7).

2. La Aproximación cuando los Restos son Pequeños

En esta sección establecemos que si la función $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ es contínua, si L es un punto fijo de la función f, si f es derivable en L con $0 < |f'(L)| = |\alpha| < 1$ y el resto $r(x) = f(x) - L - \alpha(x - L)$ satisface

$$r(x) = O(|x - L|^{1+s}) \ , \quad \textit{cuando } x \to L \tag{2.1}$$

entonces las sucesiones recurrentes dadas por

$$x_{n+1} = f(x_n), \tag{2.2}$$

y que convergen a L, satisfacen la aproximación

$$x_n = L + c\alpha^n + o(\alpha^n) \ , \quad \textit{cuando } n \to \infty \tag{2.3}$$

donde c es una cierta constante, que depende del valor inicial x_0.

Nótese, primero que nada, que el cambio $y = x - L$ lleva al punto fijo L al origen y así, se puede suponer que $L = 0$. Estudiamos de esta manera el caso de una función contínua $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tal que

$$f(x) = \alpha x + r(x), \tag{2.4}$$

donde $0 < \alpha < 1$ y donde el resto satisface

$$|r(x)| \leq M|x|^{1+s} \ , \quad |x| < a, \tag{2.5}$$

para algunas constantes $M, a > 0$.

Sea ahora γ un número que satisface $\gamma > |\alpha|$. Dado que

$$\left| \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} \right| < \gamma, \tag{2.6}$$

existirá $\delta > 0$ tal que

$$|f(x)| \leq \gamma |x|, \tag{2.7}$$

para $0 \leq |x| \leq \delta$.

Si $\{x_n\}$ es una sucesión recurrente, definida por (2.2), que cumple

$$\lim_{n \to \infty} x_n = 0, \tag{2.8}$$

entonces existe n_0 tal que $|x_n| \leq \delta$ para $n \geq n_0$ y, por lo tanto,

$$|x_{n+1}| \leq \gamma |x_n|, \qquad n \geq n_0, \tag{2.9}$$

de donde se deduce que existe una constante K tal que

$$|x_n| \leq K\gamma^n, \tag{2.10}$$

para todo n.

Escójase ahora γ de forma que $\gamma^{1+s} < |\alpha|$.

Si vale (2.8), entonces existirá n_1 tal que $|x_n| \leq \min\{\delta, a\}$ para $n \geq n_1$. Luego, se tendrá la cota

$$\begin{aligned}\left|\frac{x_{n+1}}{\alpha^{n+1}} - \frac{x_n}{\alpha^n}\right| &= \left|\frac{f(x_n)}{\alpha^{n+1}} - \frac{x_n}{\alpha^n}\right| \\ &= \left|\frac{r(x_n)}{\alpha^{n+1}}\right| \\ &\leq \frac{M|x_n|^{1+s}}{|\alpha|^{n+1}} \\ &\leq \frac{MK^{1+s}}{|\alpha|}\left(\frac{\gamma^{1+s}}{|\alpha|}\right)^n .\end{aligned}$$

o bien

$$\left|\frac{x_{n+1}}{\alpha^{n+1}} - \frac{x_n}{\alpha^n}\right| \leq A\omega^n, \qquad n \geq n_1, \tag{2.11}$$

donde $A = \dfrac{MK^{1+s}}{|\alpha|}$ es una constante y donde $\omega = \dfrac{\gamma^{1+s}}{|\alpha|}$ satisface

$$0 < \omega < 1. \tag{2.12}$$

Ahora bien, si $m > n \geq n_1$ entonces

$$\begin{aligned}\left|\frac{x_m}{\alpha^m} - \frac{x_n}{\alpha^n}\right| &\leq \left|\frac{x_m}{\alpha^m} - \frac{x_{m-1}}{\alpha^{m-1}}\right| + \left|\frac{x_{m-1}}{\alpha^{m-1}} - \frac{x_{m-2}}{\alpha^{m-2}}\right| + \cdots + \left|\frac{x_{n+1}}{\alpha^{n+1}} - \frac{x_n}{\alpha^n}\right| \\ &\leq A(\omega^{m-1} + \cdots + \omega^n) \\ &\leq A\omega^n(1 + \omega + \omega^2 + \cdots)\end{aligned}$$

o

$$\left|\frac{x_m}{\alpha^m} - \frac{x_n}{\alpha^n}\right| \leq \frac{A\omega^n}{1-\omega}, \tag{2.13}$$

y se deduce que

$$\lim_{n,m\to\infty}\left|\frac{x_m}{\alpha^m}-\frac{x_n}{\alpha^n}\right| = 0. \tag{2.14}$$

Quiere esto decir que la sucesión $\left\{\frac{x_n}{\alpha^n}\right\}$ es de Cauchy. Por lo tanto existe el límite

$$c = \lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{\alpha^n}, \tag{2.15}$$

y por definición valdrá

$$x_n = c\alpha^n + o(\alpha^n)\ , \qquad n\to\infty. \tag{2.16}$$

En resumen

Teorema. *Sea $f : \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ contínua. Sea L un punto fijo de f tal que su derivada $\alpha = f'(L)$ satisface $0<|\alpha|<1$. Si existe $s>0$ tal que el resto*

$$r(x) = f(x) - L - \alpha(x-L), \tag{2.17}$$

satisface

$$r(x) = O(|x-L|^{1+s})\ , \quad x\to L, \tag{2.18}$$

entonces para toda sucesión recurrente $\{x_n\}$, definida por $x_{n+1} = f(x_n)$, que converge a L, existe una constante c tal que

$$x_n = L + c\alpha^n + o(\alpha^n), \tag{2.19}$$

cuando $n\to\infty$.

Obsérvese, en particular, que si $f''(L)$ existe entonces $r(x) = O(|x-L|^2)$ y por lo tanto se puede aplicar el teorema.

Corolario. *Si L es un punto fijo de la función contínua $f : \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ en el cual $0<|f'(L)| = |\alpha| < 1$ y si $f''(L)$ existe entonces toda sucesión recurrente $x_{n+1} = f(x_n)$ que converja a L tiene la forma*

$$x_n = L + c\alpha^n + o(\alpha^n),$$

para alguna c.

3. Un Contraejemplo

En la sección precedente se mostró que se tiene la aproximación $x_n \sim L + c\alpha^n$ *siempre que* $r(x) = O(|x-L|^{1+s})$ *para algún* $s > 0$. *Se puede preguntar si la sola existencia de* $f'(L)$ *garantiza tal aproximación. En esta sección damos un ejemplo para establecer que la respuesta es negativa.*

Obsérvese que la existencia de $f'(L)$ *implica que*

$$r(x) = o(|x-L|)\,, \quad \textit{cuando } x \to L. \tag{3.1}$$

Restos del tipo

$$r(x) = \frac{x-L}{|\ln|x-L||^q}, \tag{3.2}$$

donde $q > 0$ *satisfacen (3.1) pero no (2.18) para ningún* $s > 0$.

Para construir el contraejemplo, considérese la función

$$g(y) = y - 2\sqrt{y}. \tag{3.3}$$

Claramente g *es creciente y contínua para* $y \geq 1$. *Además,* g *envía el intervalo* $[1,\infty)$ *al intervalo* $[-1,\infty)$.

La función

$$h(y) = \left(\frac{1}{2}\right)^{g(y)}, \tag{3.4}$$

será entonces estrictamente decreciente y contínua en $[1,\infty)$. *La imagen de* $[1,\infty)$ *bajo* h *es el intervalo* $(0,2]$.

Defínase ahora la función f *en* $(0,2]$ *por*

$$f(x) = h(h^{-1}(x)+1), \tag{3.5}$$

una relación que se puede escribir como

$$f\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{y-2\sqrt{y}}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{y+1-2\sqrt{y+1}}. \tag{3.6}$$

Extiéndase f *a* $[2,\infty)$ *de cualquier forma que preserve continuidad y finalmente a todo* **R** *pidiendo que sea impar:*

$$f(-x) = -f(x). \tag{3.7}$$

Obsérvese que $f(0) = 0$. *Además* $f'(0) = 1/2$, *pues*

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{y\to\infty} \frac{(\frac{1}{2})^{y+1-2\sqrt{y+1}}}{(\frac{1}{2})^{y-2\sqrt{y}}}$$
$$= \lim_{y\to\infty} (\frac{1}{2})^{1+2(\sqrt{y}-\sqrt{y+1})}$$

y así

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{2}. \tag{3.8}$$

Si tomamos $x_0 = 1$ *y definimos* $\{x_n\}$ *por* $x_{n+1} = f(x_n)$, *tendremos, en vista de (3.6), que*

$$x_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2\sqrt{n}} \tag{3.9}$$

Pero

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{(\frac{1}{2})^n} = \lim_{n\to\infty} 4^{\sqrt{n}} = \infty, \tag{3.10}$$

y así no existe ninguna c que cumpla que $x_n \sim c(\frac{1}{2})^n$.

Obsérvese que en este caso se tendrá

$$r(x) \sim \frac{cx}{|\ln|x||^{1/2}}, \quad \textit{cuando } x \to 0, \tag{3.11}$$

donde $c = -(\ln 2)^{3/2}$. *En efecto si* x *es positivo y cercano a cero, poniendo*

$$h(y) = x, \tag{3.12}$$

entonces

$$y - 2\sqrt{y} = \frac{\ln 1/x}{\ln 2}, \tag{3.13}$$

y así

$$y \sim \frac{\ln 1/x}{\ln 2}. \tag{3.14}$$

Por lo tanto

$$\sqrt{y}-\sqrt{y+1}=\sqrt{y}\left(1-\sqrt{1+\frac{1}{y}}\right)\sim\frac{1}{2\sqrt{y}}\sim\frac{1}{2\sqrt{\frac{\ln 1/x}{\ln 2}}}.$$

Así

$$\begin{aligned}
r(x) &= f(x)-\frac{1}{2}x\\
&=\left(\frac{1}{2}\right)^{y+1-2\sqrt{y+1}}-\left(\frac{1}{2}\right)^{y-2\sqrt{y}}\\
&=\left(\frac{1}{2}\right)^{y-2\sqrt{y}}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{2(\sqrt{y}-\sqrt{y+1})}-1\right]\\
&\sim x\left[e^{2\ln\frac{1}{2}(\sqrt{y}-\sqrt{y+1})}-1\right]\\
&\sim x\left(2\ln\frac{1}{2}\right)(\sqrt{y}-\sqrt{y+1})\\
&\sim x\left(2\ln\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2\sqrt{\frac{\ln 1/x}{\ln 2}}}\\
&\sim\frac{x(\ln 2)^{3/2}}{(\ln 1/x)^{1/2}}.
\end{aligned}$$

4. Bibliografía

[1] De Bruijin, N. G., Asymptotic Methods in Analysis, North Holland, Amsterdam, 1970.