Ciencia y Tecnología **20** No.1,2(1996) 137-143

Álgebras-MV Artinianas y Noetherianas

L. P. Belluce
University of British Columbia
Department of Mathematics
Vancouver, B. C., Canada

Abstract: We study MV-algebras that satisfy the ascending or descending chain conditions on ideals. We demonstrate, for example, if an MV-algebra is artinian, then it has a finite number of minimal prime ideals. We also show the set of implicative ideals of an MV-algebra satisfies both chain conditions provided the algebra, modulo its radical, is noetherian. Other results relate the chain conditions to semi-locality.

Subject headings: MV-algebras, prime ideals , implicative ideals, conditions to semi-locality

Resumen: Estudiamos álgebras-MV que satisfacen las condiciones de cadena ascendente o de cadena descendente por ideales. Por ejemplo, si un álgebra-MV es artiniana, entonces tiene un número finito de ideales primos y minimales. También demostramos que el conjunto de ideales implicativos de un álgebra-MV satisface ambas condiciones de cadena si esta álgebra, módulo su radical, es noetheriana. Otros resultados relacionan las condiciones de cadena con la propiedad de ser semi-local.

Encabezados de materia: álgebras-MV, ideales primos, ideales implicativos, propiedades semi-locales

0. Las álgebras-MV se originaron del estudio algebraico de la lógica multi-valor de Łukasiewicz. Esta lógica toma por los grados de verdad subconjuntos del intervalo $[0,1]$ de los numeros reales. Estos subconjuntos de $[0,1]$ deben ser cerrados bajo las operaciones $a+b=min(a+b,1)$, $a\cdot b= max(0,a+b-1)$ y $a^*=1-a$. Por ejemplo, $\{0,\ 1/n,\ 2/n, \ldots, (n-1)/n, 1\}$ o los numeros racionales en $[0,1]$.

Las álgebras-MV tienen el mismo papel con respecto a la lógica de Łukasiewicz como las álgebras booleanas tienen a la lógica clásica. En efecto, porque $\{0,1\}\subseteq[0,1]$ y es cerrado bajo las operaciones $\oplus$, $\cdot$,* y coinciden con las operaciones clásicas, la lógica clásica es un caso especial de la de Łukasiewicz. Resulta que cada álgebra booleana es un álgebra-MV y las álgebras-MV tienen mucho en común con las álgebras booleanas.

Sin embargo, existen muchas diferencias entre las dos clases de álgebras. Por ejemplo, en un álgebra-MV ni $a \oplus a = a$ ni $a \cdot (b \oplus c) = a \cdot b \oplus a \cdot c$ son validos normalmente. En un cierto sentido un álgebra-MV es un álgebra booleana sin la ley de idempotencia.

Es lo mismo con respecto a los ideales. En un álgebra booleana cada ideal primo es maximal. No es así para las álgebras-MV en general. Resulta que la estructura de las álgebras-MV es mas complicada que la de las álgebras booleanas.

Las álgebras-MV aparecieron por primera vez en las obras de C. C. Chang [1], [2]. Chang demostró el teorema de completitud de la lógica proposicional de Lukasiewicz por métodos algebraicos. Para hacerlo Chang definío las álgebras-MV. Desde entonces ha habido un desarollo continuo de la teoría de esas álgebras. Las álgebras-MV han sido aplicadas a otros campos de la matemática como las álgebras AF C*, grupos abelianos reticulados y la teoría de conjuntos borrosas. ([3], [7], [10])

En este artículo estudiamos las álgebras-MV cuyos ideales satisfacen ciertas condiciones de finitud con respecto al orden $\subseteq$. Los resultados mejoran los resultados principales de Hoo ([8]).

Abajo presentamos una breve e incompleta descripción de las álgebras-MV.

1. Un álgebra-MV es un conjunto A con operaciones $\oplus$, $\cdot$, * y elementos especiales $0, 1 \in A$, tal que $< A, \oplus, 0 >$ es un monoide conmutativo, $(a^*)^* = a$, $a \cdot b = (a^* \oplus b^*)^*$, $0^* = 1$ y $a \oplus a^* \cdot b = b \oplus b^* \cdot a$, por todo $a, b \in A$. Suponemos que $0 \neq 1$. Resulta que $< A, \cdot, 1 >$ es un monoide abeliano.

En A definiamos $a \vee b = a \oplus a^* \cdot b$ y $a \wedge b = (a^* \vee b^*)^*$. Resulta que $< A, \vee, \wedge, 0, 1 >$ es un reticulo distributivo con $0, 1$. Además resulta que $< A, \oplus, \leq, 0 >$ y $< A, \cdot, \leq, 1 >$ son monoides ordenados donde $a \leq b$ si $a \vee b = b$.

Un *ideal* $I \subseteq A$ es un subconjunto donde $0 \in I$, $a, b \in I$ implican $a \oplus b \in I$, y $a \in I$, $b \leq a$ implican $b \in I$. Un ideal P es *primo* si $P \neq A$ y $a \wedge b \in I$ implica $a \in I$ o $b \in I$. Un ideal M es *maximal* si $M \neq A$ y los unicos ideales que contienen M son M y A. Cada ideal maximal es primo.

Para cada ideal $I \subseteq A$ se puede definir una relación de congruencia, $a \equiv b \; mod I$ si y solo si $a \cdot b^* \oplus a^* \cdot b \in I$. Las clases de equivalencia forman naturalmente un álgebra-MV. Denotemos esta álgebra por A/I y para $a \in A$ denotemos por a/I la clase de equivalencia determinada por a. Si P es un ideal primo, A/P es un álgebra totalmente ordenado. Si M es un ideal maximal, A/M es (o es isomorfa a) una subálgebra de $[0, 1]$ y solo tiene como ideales 0 o A/M.

Las leyes usuales acerca de isomorfismos, homomorfismos, productos directos son validos para las álgebras-MV.

Para detalles mas completa sobre esas álgebras vea [1], [2], [3], [10].

2. Sea A un álgebra-MV. Digamos que A es *artiniana* si cada serie descendente de ideales es finita. A se llama *noetheriana* si cada serie de ideales ascendente de ideales es finita.

Lo siguiente es claro.

Proposición 1. Sean A, A' álgebras-MV, $f: A \to A'$ un epimorfismo. Si A es artiniana (noetheriana) entonces A' es artiniana (noetheriana).

Dada A, sea $Id(A)$ el conjunto de ideales de A.

Proposición 2. Si A es artiniana, noetheriana y totalmente ordenada, entonces $Id(A)$ es finito.

Demostración. Si A es totalmente ordenada, entonces $Id(A)$ es totalmente ordenado por $\subseteq$. Como A es artiniana y noetheriana $Id(A)$ debe ser finito.

Dada A, sea $MinA$ el conjunto de los ideales primos que son minimales en el conjunto de los ideales primos. $MaxA$ denotará el conjunto de los ideales maximales de A.

Proposición 3. Si A es artiniana entonces $MinA$ es finito.

Demostración. Supongamos que $m_1, m_2, m_3 \ldots$ es una serie de elementos de $MinA$. Entonces existe una serie descendente de ideales, $m_1 \supseteq m_1 \cap m_2 \supseteq \ldots$. Por eso hay un entero n tal que $m_1 \cap \cdots \cap m_n = m_1 \cap \cdots \cap m_{n+1}$. Por tanto $m_1 \cap \cdots \cap m_n \subseteq \cap m_{n+1}$. Como m_{n+1} es primo, existe un i tal que $m_i \subseteq m_{n+1}$. Como m_{n+1} es minimal primo, $m_i = m_{n+1}$. Resulta que $MinA$ debe ser finito.

Es bien conocido que en cualquier álgebra-MV A que $\bigcap MinA = 0$. De Proposición 3 y álgebra general, si A es artiniana entonces $A \subseteq A/m_1 \times A/m_2 \times \cdots \times A/m_n$ donde $MinA = \{m_1, \ldots, m_n\}$. (Identificamos A con su copia isomorfa.) Cada A/m_i es totalmente ordenada y por Proposición 1 es artiniana también. Si A es noetheriana también, entonces Proposiciones 1, 2 implicarán que $Id(A/m_i)$ es finito, $i = 1, 2, ..., n$. Claramente resulta que $Id(A/m_1 \times \cdots \times A/m_n)$ es finito.

Sea $X \subseteq A$. Por $id(X)$ queremos decir el ideal de A generado por X. Entonces $id(X) = \{a \in A \mid \text{ existen } a_1, \cdots, a_k \in X \text{ y } a \leq a_1 \oplus \cdots \oplus a_k\}$.

El siguiente es obvio para las álgebras-MV.

Lema 1. Sea A' una subálgebra-MV de A. Sea $I' \subseteq A'$ un ideal de A' y sea I el ideal en A generado por I'. Entonces $I' = I \cap A'$.

Proposición 4. Los siguientes proposiciones son equivalentes,

i) A es artiniana y noetheriana.

ii) $Id(A)$ es finito.

Demostración. Es evidente que ii) implica i). Supongamos i). De la discusión anterior A es una subálgebra de $A/m_1 \times \cdots \times A/m_n$ donde $MinA = \{m_1, \ldots, m_n\}$. Por Lema 1 existe una sobreyección, $Id(A/m_1 \times \cdots \times A/m_n) \to Id(A)$. Como $Id(A/m_1 \times \cdots \times A/m_n)$ es finito, resulta que $Id(A)$ es finito.

A se llama *local* ([6]) si $MaxA$ tiene un elemento único. A se llama *semi-local* si $MaxA$ es finito. (cf. [8].)

Proposición 5. Si A es artiniana, then A es semi-local.
Demostración. Proposición 3 implica que $MinA$ es finito. Como en un álgebra-MV existe una sobreyección $MinA \twoheadrightarrow MaxA$, ([5]), resulta que $MaxA$ es finito.

Dada A, sea $RadA = \bigcap MaxA$. $RadA$ se llama la *radical* de A. A se llama *semisimple* ([3]) si $RadA = 0$. $A/RadA$ es semisimple siempre.

Proposición 6. Si A es semi-local y semisimple entonces A es artiniana y noetheriana.
Demostración. Es suficiente demostrar que $Id(A)$ es finito. Como $MaxA = \{M_1, \ldots, M_n\}$ y A es semisimple, resulta que A es isomorfa a una subálgebra de $A/M_1 \times \cdots \times A/M_n$. Cada $A/M_i \subseteq [0,1]$ y no tiene ideales no triviales. Por eso $Id(A/M_1 \times \cdots \times A/M_n)$ es finito y por el Lema 1 podemos concluir que $Id(A)$ es finito.

Proposición 7. Las siguientes proposiones son equivalentes.

i) A es semi-local.

ii) $A/RadA$ es artiniana y noetheriana.

iii) $Id(A/RadA)$ es finito.

Demostración. Si A es semi-local entonces $A/RadA$ es semi-local y semisimple. De aquí $A/RadA$ es artiniana y noetheriana por Proposición 6. Por Proposición 4, $A/RadA$ artiniana y noetheriana implican $Id(A/RadA)$ es finito. Puesto que existe una biyección entre los ideales de A que contienen $RadA$ y los ideales de $A/RadA$, resulta que $Id(A/RadA)$ finito implica que $MaxA$ es finito. De aquí, A es semi-local.

En efecto podemos decir algo más.
Sea $\mathcal{I}(A) = \{I \in Id(A) \mid RadA \subseteq I\}$. Entonces,

Corolario. Si A es semi-local entonces $\mathcal{I}(A)$ es finito.

Llamenos un ideal $I \subseteq A$ *implicativo* ([9], [11]) si $a^2 \in I$ implica $a \in I$. Sea $\Im(A)$ el conjunto de ideales implicativos de A. Para $a \in RadA$ tenemos $a^2 = 0$ ([4]). Por eso, si $I \in \Im(A)$ entonces $RadA \subseteq I$. Por eso $\Im(A) \subseteq \mathcal{I}(A)$.

Corolario. Si A es semi-local, $\Im(A)$ es finito.

Este corolario mejora Teorema 2.8 de [8]. Esta teorema dice que si A es semi-local entonces cada cadena descendente, $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \ldots$, de ideales en $\Im(A)$ es finito.

Proposición 8. Para cualquier álgebra-MV A e ideal $I \subseteq A$ las siguientes proposiciones son equivalentes.

i) $I \in \Im(A)$.

ii) A/I es un álgebra booleana.

Demostración. Supongamos i). Para $a \notin I$, $a^2 \notin I$; entonces en A/I, $a/I \cdot a/I \neq 0$. Por consiguiente $a/I \oplus a/I = 1$ implica que $a/I = 1$. Para todo $a \in A$, $a \wedge a^* \leq a \vee a^* = (a \wedge a^*)^*$. De aquí, en A/I, $(a \vee a^*)/I \oplus (a \vee a^*)/I = 1$. Por tanto $(a \wedge a^*)/I = 0$ que significa que $a/I \wedge a^*/I = 0$. De [1] sabemos que A/I es un álgebra booleana. Supongamos ii). Sea $a^2 \in I$. Entonces $a/I \cdot a/I = 0$. Pero A/I es booleana y por eso $a/I \cdot a/I = a/I$. Resulta que $a/I = 0$ y $a \in I$. Por consiguiente $I \in \Im(A)$.

Supongamos que $\mathcal{S} \subseteq Id(A)$. Decimos que $\mathcal{S}$ satisface la *condición de cadena ascendente* (cca) si toda serie ascendente de ideales de $\mathcal{S}$ es finita. Similarmente $\mathcal{S}$ satisface la *condición de cadena descendente* (ccd) si toda serie descendente de ideales de $\mathcal{S}$ es finita.

Proposición 9. Supongamos que $A/RadA$ es noetheriana. Entonces $\Im(A)$ satisface las cca y ccd.

La Proposición 9 también es más general que el Teorema 2.8 de [8] ya que A semi-local implica $A/RadA$ es noetheriana.

Para demostrar la Proposición 9 necesitamos unos lemas.

Primero, si $a \in A$, A un álgebra-MV, denotamos por $a^{\perp}$ el conjunto $\{b \in A \mid a \wedge b = 0\}$. $a^{\perp}$ es siempre un ideal de A ([3]).

Lema 2. Las álgebras booleanas y noetherianas son finitas.
Demostración. Sea B un álgebra booleana y noetheriana. Primero demostramos que B es atómica. Sea $a_1 \geq a_2 \geq \ldots$ una serie descendente de elementos de B. Entonces $a_1{}^{\perp} \subseteq a_2{}^{\perp} \subseteq \ldots$ es una serie ascendente de ideales y, por eso, es finita. Existe entonces un entero n tal que $a_n^{\perp} = a_{n+1}^{\perp}$. Esto significa que $a_n^* = a_{n+1}^*$ y por consiguiente $a_n = a_{n+1}$. De aquí, B es atómica. Ahora es suficiente demostrar que B tiene solomente un número finito de átomos. Sea e_1, $e_2 \ldots$ una serie de átomos. Consideremos la serie de ideales $id(e_1) \subseteq id(e_1 \oplus e_2) \subseteq \ldots$. Puesto que B es noetheriana, existe n tal que $id(e_1 \oplus \cdots \oplus e_n) = id(e_1 \oplus \cdots \oplus e_{n+1})$. Por eso $e_{n+1} \leq e_1 \oplus \cdots \oplus e_n$. Si $e_{n+1} \neq e_i$ para alguna $i = 1, 2, \ldots, n$ entonces $e_{n+1} = 0$ que es absurdo. El lema se concluye.

Sea $N_A = id\{a \wedge a^* \mid a \in A\}$. Como A/N_A es un álgebra booleana, sabemos que $N_A \in \Im(A)$. Por $I \in \Im(A)$, A/I es booleana, entonces $N_A \subseteq I$. Como $A/RadA$ se supone noetheriana y como existe un epimorfismo $A/RadA \rightarrow A/N$, A/N es noetheriana por Proposición 1. Por Lema 2, A/N_A es finita. Por consiguiente $\{A/I \mid I \in \Im(A)\}$ contiene un número finito de álgebras booleanas no isomorfas.

Lema 3. Supongamos I, $J \in \Im(A)$, $I \subseteq J$, $I \neq J$. Entonces $\mid A/J \mid < \mid A/I \mid$ (donde $\mid X \mid$ significa la cardinalidad de X).
Demostración. Hay un epimorfismo $A/I \rightarrow A/J$ dado por $a/I \rightarrow a/J$. Por tanto $\mid A/J \mid \leq \mid A/I \mid$. $I \neq J$, así existe $a \in J - I$. Por eso $0 \neq a/I \rightarrow a/J = 0$. Resulta que $A/I \rightarrow A/J$ no es mónico. Como A/I, A/J son conjuntos finitos por Proposición 8 y Lema 2, deducimos que $\mid A/J \mid < \mid A/I \mid$.

Sabemos, entonces, que $\{\mid A/I \mid \mid I \in \Im(A)\}$ es un conjunto finito de enteros. Por eso, cada serie $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \ldots$ de elementos de $\Im(A)$ determina una serie $n_1 \geq n_2 \geq \ldots$, donde $n_j = \mid A/I_j \mid$.

La serie $n_1 \geq n_2 \geq \ldots$ debe ser finita y de aquí existe una k tal que $| A/I_k |=| A/I_{k+1} |$. Ya que $I_k \subseteq I_{k+1}$, resulta de Lema 3 que $I_k = I_{k+1}$. Podemos concluir que $\Im(A)$ satisface cca.

Similarmente podemos demostrar que $\Im(A)$ satisface ccd.

La Proposición 9 ha sido demostrado.

Como hemos dicho, la Proposición 9 es más general que Teorema 2.8 de [8]. Pero eso no es cierto mientras la siguiente pregunta es todavia abierta.

Sea A un álgebra-MV semisimple. ¿Es verdad que A es noetheriana si y solo si A es artiniana?

En general ni noetheriana implica artiniana ni artiniana implica noetheriana.

Por ejemplo sea $^*[0,1]$ el intervalo $\{t \mid 0 \leq t \leq 1\} \subseteq {}^*\Re$ donde $^*\Re$ es un ultrapotencia no trivial de los números reales $\Re$. $^*[0,1]$ es un álgebra-MV en la misma manera como $[0,1]$. Sea $t \in {}^*[0,1]$ un infinitesimal, $t \neq 0$. Para cada entero $n \geq 0$ sea $t_n = tt\cdots t$ (n factors), el producto en el campo $^*\Re$. Sea A la subálgebra de $^*[0,1]$ generada por $\{t_n \mid n = 1,2,3,\ldots\}$. Se puede averiguar que cada elemento de A tiene la forma u o $1-u$ donde u es 0 o un infinitesimal. Para cada u, $(1-u) \oplus (1-u) = min(1,\ 2-2u) = 1$. Por eso ningún ideal de A contiene un elemento de la forma $1-u$, u un infinitesimal. Se puede convencer que $Id(A) = \{id(t_n) \mid n = 1,2,\ldots\}$. Como $id(t_1) \supset id(t_2) \supset \ldots$, resulta que A es noetheriana pero no es artiniania.

Similarmente, si A es la subálgebra de $^*[0,1]$ generada por $\{t^{1/n} \mid n = 1,2,\ldots\}$ resulta que A es artiniana pero no es noetheriana.

Referencias

[1] Chang C. C., Algebraic analysis of many valued logics. Trans. Amer. Math. Soc. 88(1958), 467-490.

[2] Chang C. C., A new proof of the completeness of the Lukasiewicz axioms. Trans. Amer. Math. Soc. 93(1959), 74-80.

[3] Belluce L. P., Semisimple algebras of infinite valued logic and bold fuzzy set theory. Can. J. Math. 38(1986), 1356-1379.

[4] Belluce L. P., Semisimple and complete MV-algebras. Algebra Unversalis 29(1992), 1-9.

[5] Belluce L. P., DiNola A., Lettieri A., The prime spectrum of an MV-algebra. Math Logic Quart. 40(1994), 331-346.

[6] Belluce L. P., DiNola A., Lettieri A., Local MV-algebras. Rend. Circ. Mat. Palermo, Ser.II, Tomo XLII(1993), 347-361.

[7] Belluce L. P., DiNola A., Sessa S., Triangular norms, MV-algebras and bold fuzzy set theory. Math. Japon. 36(1991), 1481-487.

[8] Hoo C. S., Semilocal MV-algebras. Math Japon. 40(1994), 1451-453.

[9] Hoo C. S., Sessa S., Implicative and boolean ideals in MV-algebras. Math. Japon. 39(1994), 215-219.

[10] Mundici D., Interpretation of AFC^*−algebras in Lukasiewicz sentential calculus. J. Funct. Anal. 65(1986), 15-63.

[11] DiNola A., Fortunata L., Sessa S., Using maximal ideals in the classification of MV-algebras. Portugalie Math. 50(1993), 187-102.