Ciencia y Tecnología **20** No.1-2(1996) 145-150

Soluciones de Einstein no asintóticamente planas

Rodrigo Alvarado
Laboratorio de Investigaciones Astrofísica
Escuela de Física
(recibido junio 1996, aceptado noviembre 1996)

Abstract: In this paper, a theorem is demonstrated regarding the impossibility of the existence of asymptotically plane solutions in spaces with static cylindrical symmetry, in the framework of the General Theory of Relativity, if the metric is just a function of one coordinate. The question is posed as to whether bodies or systems in the Universe (i.e., cosmic string) may be representable by this metric.

Subject headings: cylindrial symmetry, metric, cosmic string

Resumen: En el presente trabajo, se demuestra un teorema sobre de la imposibilidad de encontrar soluciones que sean asintóticamente planas,- dentro del marco de la Teoría General de la Relatividad (T.G.R)-, en espacios con simetría cilíndrico-estática y, cuyo tensor métrico depende solamente de una coordenada. Se discute la factibilidad de cuerpos en el Universo, por ejemplo cuerdas cósmicas, representados con dicha métrica.

Encabezados de materia: simetría cilindrica, métrica, cuerda cósmica

1. Introduction

Según algunos modelos cosmológicos, el Universo provoca una curvatura en el espacio-tiempo, la cual es inevitable. Sin embargo, a pequeñas escalas ésta puede ser despreciable.

En la Teoría General de la Relatividad (T.G.R.) es común también despreciar la curvatura del Universo cuando se estudian métricas externas a los cuerpos, las cuales deben ser forzosamente asintóticamente planas, o sea, que los campos generados por estos cuerpos deben de tender a cero a distancias alejadas de dichos cuerpos. Vale recalcar que es importante conocer estos tipos de métrica, ya que los campos de los cuerpos que existen en el Universo poseen dicha característica.

Un ejemplo clásico sobre esta temática es la solución de Schwarzschild para las ecuaciones de Einstein con simetría esférica, la cual posee la característica de ser asintóticamente plana ($r \to \infty$). Esta solución puede representar cuerpos estelares, por ejemplo, agujeros negros u estrellas, todos estáticos y sin rotación.

En el vacío, o parte exterior de un cuerpo, las soluciones de las ecuaciones de Einstein son distintas a las soluciones que se obtienen para el estudio del espacio-tiempo dentro del cuerpo; la simetría no cambia, o sea, que la simetría del cuerpo en su interior y la simetría del cuerpo en su exterior deben de corresponder. De esta manera, no se puede considerar que un cuerpo en su interior tenga una simetría, supongamos, esférica, y en su exterior la simetría sea planar. Debido a ésto, surge la siguiente pregunta:

? Es posible la existencia de una métrica de un cuerpo con un tipo de simetría cuya asíntota,-cuando $r \to \infty$-, no corresponda a la del mundo plano ?.

La Ciencia no conoce de la existencia de cuerpos o partículas cuyos campos no tengan la característica de ser asintoticamente planos, por lo que esto debe ser considerado una condición necesaria para el estudio de cuerpos en el Universo.

Se considera que se pueden encontrar soluciones de Einstein para la métrica con simetría cilíndrica dependiente de una coordenada. Algunos ejemplos son: las cuerdas cósmicas (Aimou y Clément, 1996; Peebles, 1975; Aros y Zamora, 1997; Sen et al., 1997) y algunas soluciones solitónicas descritas en Bronnikov, 1979; Shikin, 1985; Rybakov et al., 1996). En dichos trabajos se obtienen y analizan las denominadas soluciones interiores a las ecuaciones de Einstein.

Es debido a esos precedentes que en el presente trabajo, se formula un teorema que establece la imposibilidad de obtener soluciones asintóticamente planas para una simetría cilíndrica dependiente de una coordenada (ésta puede ser ρ o z), y por lo tanto se pone en duda la existencia de cuerdas cósmicas y cuerpos bajo esas consideraciones.

Teorema

Sea una métrica del tipo de simetría cilíndrico-estática † dada por

$$dS^2 = exp(2\gamma(\xi)) \cdot dt^2 - exp(2\alpha(\xi)) \cdot d\xi^2 - exp(2\beta(\xi)) \cdot d\rho^2 - exp(2\tau(\xi)) \cdot d\varphi^2, \tag{1}$$

en donde las funciones γ, α, β y τ dependen únicamente de ξ; para ella no existen soluciones asintóticamente planas.

Demostración

Para demostrar el teorema primero obtendremos las ecuaciones de Einstein acopladas; los símbolos de Christoffel correspondientes se pueden escribir de siguiente forma

$$\Gamma^0_{10} = \Gamma^0_{01} = \gamma' \qquad \Gamma^1_{00} = \gamma' \cdot exp(2(\gamma - \alpha)), \qquad \Gamma^1_{11} = \alpha' \tag{2.a}$$

$$\Gamma^1_{22} = \Gamma^1_{33} = -\tau' \cdot exp(2(\tau - \alpha)), \qquad \Gamma^2_{21} = \Gamma^2_{12} = \beta' \qquad \Gamma^3_{31} = \Gamma^3_{13} = \tau', \tag{2.b}$$

en donde el símbolo $(')$, representa la derivada parcial con respecto a ξ. El resto de componentes del símbolo de Christoffel son iguales a cero.

También, los componentes del tensor de Ricci se obtienen con ayuda de los componentes del símbolo de Christoffel anteriores, y son

$$R_{00} = (\gamma'' + \gamma'^2 - \gamma'\alpha' + \gamma'\beta' + \gamma'\tau') \cdot exp(2(\gamma - \gamma)), \tag{3.a}$$

$$R_{11} = -\gamma'' - \gamma'^2 + \gamma'\alpha' + \alpha'\beta' + \alpha'\tau' - \beta'' - \beta'^2 - \tau'' - \tau'^2, \tag{3.b}$$

$$R_{22} = (-\gamma'\beta' + \alpha'\beta' - \beta'' - \beta'^2 - \beta'\tau') \cdot exp(2(\beta - \alpha)), \tag{3.c}$$

$$R_{33} = (-\gamma'\tau' + \alpha'\tau' - \tau'' - \tau'^2 - \tau'\beta') \cdot exp(2(\tau - \alpha)). \tag{3.d}$$

Con ayuda de (3.a), (3.b), (3.c) y (3.d) podemos encontrar el escalar de la curvatura R, el cual tiene la siguiente forma

$$R = 2(\gamma'' + \gamma'^2 - \gamma'\alpha' + \gamma'\beta' + \gamma'\tau' - \alpha'\beta' - \alpha'\tau' + \beta'' + \beta'^2 + \beta'\tau' + \tau'' + \tau'^2) \cdot exp(-2\alpha). \tag{4}$$

Las ecuaciones de Einstein correspondientes pueden ser escritas como sigue:

$$\alpha'\beta' + \alpha'\tau' - \beta'' - \beta'^2 - \tau'\beta' - \tau'' - \tau'^2 = \kappa \cdot exp(2\alpha)T^0_0, \tag{5.a}$$

$$-\gamma'\beta' - \gamma'\tau' - \tau'\beta' = \kappa \cdot exp(2\alpha)T^1_1, \tag{5.b}$$

$$-\gamma'' - \gamma'^2 + \gamma'\alpha' - \gamma'\tau' + \alpha'\tau' - \tau'' - \tau'^2 = \kappa \cdot exp(2\alpha)T^2_2, \tag{5.c}$$

$$-\gamma'' - \gamma'^2 + \gamma'\alpha' - \gamma'\beta' + \alpha'\beta' - \beta'' - \beta'^2 = \kappa \cdot exp(2\alpha)T^3_3. \tag{5.d}$$

† Nota del Editor: La siguiente métrica representa de una forma mas general y explícitamente la simetría cilíndrica, véase, (Schmutzer E., Relativistische Physik, Akademie Verlag, Berlin, 1978) $dS^2 = exp(\kappa(\rho, z)) \cdot dt^2 - exp(\lambda(\rho, z)) \cdot [d\rho^2 + dz^2] - exp(\sigma(\rho, z)) \cdot \rho^2 d\varphi^2$

El tensor de energía impulso T, en las ecuaciones de Einstein (5.a-5.d), es función sólo de ξ. Las soluciones para la métrica externa al objeto en análisis se obtienen, cuando el tensor de energía impulso es igual a cero, o por lo menos despreciable en la parte izquierda de la ecuaciones anteriores. Por lo tanto, para encontrar dicha métrica, es necesario considerar $T_{\mu}^{\nu} = 0$.

De esta manera las ecuaciones de Einstein (5.a-5.d) para el problema planteado se reducen a

$$\alpha'(\beta' + \tau') - (\beta' + \tau')' - \beta'^2 - \tau'^2 - \tau'\beta' = 0, \tag{6.a}$$

$$-\gamma'(\beta' + \tau') - \tau'\beta' = 0, \tag{6.b}$$

$$-\gamma'' - \gamma'^2 + \gamma'\alpha' - \gamma'\tau' + \alpha'\tau' - \tau'' - \tau'^2 = 0, \tag{6.c}$$

$$-\gamma'' - \gamma'^2 + \gamma'\alpha' - \gamma'\beta' + \alpha'\beta' - \beta'' - \beta'^2 = 0. \tag{6.d}$$

Si sumamos las ecuaciones (6.c) y (6.d), podemos obtener lo siguiente

$$-2\gamma'' - 2\gamma'^2 + 2\gamma'\alpha' - \gamma'(\beta' + \tau') + \alpha'(\beta' + \tau') - (\beta' + \tau')' - (\beta'^2 + \tau'^2) = 0. \tag{7}$$

De las ecuaciones (6.a) y (6.b) se obtiene que

$$\alpha' - \gamma' - \frac{(\tau' + \beta')'}{\tau' + \beta'} - (\tau' + \beta') = 0. \tag{8}$$

Si integramos cada término, por separado, de la ecuación (8), obtenemos

$$\alpha - \gamma - ln(\tau' + \beta') - \tau - \beta = -C_1, \tag{9}$$

en donde C_1 es una constante. Utilizando la ecuación (8) en (7), se puede obtener que

$$\frac{\gamma''}{\gamma'} + \gamma' - \alpha' + \beta' + \tau' = 0. \tag{10}$$

Haciendo el mismo procedimiento que se hizo con la ecuación (8), encontramos la siguiente relación entre las funciones

$$ln\gamma' + \gamma - \alpha + \tau + \beta = C_0, \tag{11}$$

donde C_0 es una constante de integración.

De la relación (9) con la (11) y considerando que $lnC_3 = C_1 - C_0$, con $C_3 > 0$, podemos llegar a la siguiente relación entre las funciones métricas

$$\beta + \tau = C_3\gamma + C_4, \tag{12}$$

en donde C_4 es una constante de integración.

Así, se obtiene la siguiente relación

$$\tau'\beta' = -\frac{(\tau' + \beta')^2}{C_3}, \tag{13}$$

y de (13), se puede se encuentra

$$\beta'^2 + \beta'\tau'(C_3+2) + \tau'^2 = 0. \tag{14}$$

Para esta ecuación existen dos posibles relaciones entre las funciones τ y β, las cuales son

$$\beta_1 = \tau\left[\frac{-C_3}{2} - 1 + \sqrt{\frac{C_3^2}{4} + C_3}\right] + C_5, \tag{15.a}$$

y

$$\beta_2 = \tau\left[\frac{-C_3}{2} - 1 - \sqrt{\frac{C_3^2}{4} + C_3}\right] + C_6, \tag{15.b}$$

en donde C_5 y C_6 son constantes de la integración.

Es indiferente si se toma la relación (15.a) o (15.b) por la estructura similar de la relación entre τ y β, la cual se puede escribir como

$$\beta = C\tau + C', \tag{16}$$

en donde la constante C está relacionada con las constante C_3, y C'.

Utilizando las relaciones (12) y (16) se puede obtener que

$$\tau = \frac{C_3}{C+1}\gamma + \frac{(C_4 - C')}{C+1} = C_3'\gamma + C_4', \tag{17}$$

y análogamente, para β, encontramos que

$$\beta = (C_3 - C_3')\gamma + (C_4 - C_4') = C_3''\gamma + C_4''. \tag{18}$$

De la relación (9), y considerando (17) y (18), obtenemos que

$$\alpha = ln\gamma' + \gamma(1 + C_3) + C_4 - C_0. \tag{19}$$

Finalmente, utilizando las relaciones (17), (18) y (19) la métrica se puede escribir en función de γ como,

$$dS^2 = exp(2\gamma)dt^2 - \gamma^{2\prime}exp(2(\gamma(1+C_3)+C_4-C_0))\cdot d\xi^2 - exp(2(C_3''\gamma+C_4''))\cdot d\rho^2 - exp(2(C_3'\gamma+C_4'))\cdot d\varphi^2. \tag{20}$$

La solución de este tipo no es asintóticamente plana, ya que no existe para $\gamma \to const$, por lo tanto, bajo esa condición $\gamma' \to 0$, y por lo tanto la métrica (20) tendría la forma

$$dS^2 = Adt^2 - Bd\rho^2 - Dd\varphi^2, \tag{21}$$

en donde A, B y D son constantes. La métrica (21) no representa el mundo plano. De esta manera queda demostrado el teorema.

2. Conclusión

Una métrica con simetría cilíndrico-estática que depende de una sola coordenada como la utilizada, no tiene soluciones asintóticamente planas. A pesar de ese hecho dicha métrica ha sido utilizada en problemas físicos, como por ejemplo cuerdas cósmicas y algunos tipos de soluciones solitónicas (partícula-similares), por lo que debe que ser excluída del grupo de métricas que representan a cuerpos existentes en el Universo.

3. Referencias

1) .. M.A. Ainou and G. Clément. Kaluza-Klein and Gauss-Bonnet Cosmic String. Class. Quant. Grav. 1996, N. 13, p. 2635-2650.

2) . P.J.E. Peebles, *Principles of Physical Cosmology*, Princeton Series in Physics, New Jersey, 1993.

3) . R.O. Aros and N. Zamora. Wormhole at the core of an infinite cosmic srting. Phys. Rev. D, 1997, V. 56, N^o 10, p.6607-6613.

4) . A.A. Sen, N. Banerjee and A. Banerjee. Static cosmic string in Brans-Dicke theory. Phys. Rev. D, 1997, V. 56, N^o 6, p.3706-3710.

5) . Bronnikov K. A.. Campos estáticos cilíndrico-simétricos de Einstein-Maxwell. En el libro: *Problemas de la teoría de la gravitación y las partículas elementales.* M., "Energoatomizdat", 1979, N^o 10, p.37-50. (En ruso)

6) . Shikin G.N.. Nonlinear Scalar Field of Born-Infeld Type: Self-Consistent Static Cylindrically Symmetric Soliton Solutions. -In: Proccedings of the Sir Arthur Eddington centenary symposium. V.2. On Relativity Theory. World Scientific. 1985, p.130-137.

7) . Yu.P. Rybakov, B. Saha, G.N. Shikin. Droplets in General Relativity: Exact Self-consistent Solutions to the Interacting Scalar and Electromagnetic Field Equations. General Relativity and Quantum Cosmology. 1996, Preprint gr-qc 9603032, 12p.

8) Schmutzer E., *Relativistische Physik*, Akademie Verlag, Berlin, 1978.