Ciencia y Tecnología **19** No.1-2(1995) 1-9

Punto Fijo una Teoría Interdisciplinaria

Carlos E. Azofeifa Z.
Universidad de Costa Rica
Escuela de Matemática
San José, Costa Rica
(recibido 17 junio 1994, aceptado setiembre 1995)

Abstract: We show a survey of the theory of the fixed point by commenting the most important theorems and their applications in the mathematical field as well as in other disciplines: economy, theory of games and optimization. We mention the different definitions of functions of contraction. The applications of Brouwer's Theorem are also given, furthermore we recommend the adequate bibliography for each case.

Subject headings: fixed point, theory of games , theorem of Brouwer, optimization

Resumen: Presentamos un bosquejo de la teoría de punto fijo, comentando los teoremas más importantes, así como sus aplicaciones tanto en el campo matemático como en otras disciplinas : economía, teoría de juegos, optimización. Se mencionan las diferentes definiciones de funciones de contracción. Aplicaciones del teorema de punto fijo de Brouwer son dadas ; además se recomienda la bibliografía en cada caso.

Encabezados de materia: punto fijo, teoría de juegos, teorema de Brouwer, optimización

1. Introducción

1.1. Aplicaciones de la Teoría de Punto Fijo

La teoría de punto fijo ha jugado un papel central en muchas ramas de la Matemática como por ejemplo: *análisis Funcional no lineal, topología, topología algebraica, ecuaciones Diferenciales,* etc. Entre sus múltiples aplicaciones podemos citar:

1.-Ecuaciones en R^n.

2.-Ecuaciones integrales.

3.-Ecuaciones diferenciales con retardo.

4.-Ecuaciones en derivadas parciales.

5.-Control óptimo.

6.-Programación dinámica.

7.-Ecuaciones no lineales en espacios de Banach.

8.-Operadores semi-Fredholm y problemas hiperbólicos.

Sin embargo, esta teoría no se ha limitado a sus aplicaciones solamente en el campo matemático, sino que se ha convertido en herramienta básica en otras disciplinas como por ejemplo: teoría ergódica, teoría de juegos, optimización, economía y aplicaciones a ciertos modelos biomatemáticos en ecuaciones diferenciales no lineales (Allgower, 1976), (Balinski-Cotle, 1978), (Fadell y Fournier, 1981), (Hodgkin y Huxley, 1952), (Liberstein, 1967), (Scarf, 1973), (Swaminathan, 1976).

Ahora bien en todas estas aplicaciones el común denominador son los teoremas de punto fijo los cuales se refieren a ecuaciones de la forma:

$$x = f(x) \tag{1}$$

donde $f : A \rightarrow B$ es una función con A y B dos conjuntos tales que $A \subset B$, entonces toda solución de la ecuación anterior se llama un **punto fijo de** f. La teoría de punto fijo trata entonces el estudio de las condiciones que deben de poseer el conjunto A y/o f para asegurar la existencia de al menos un punto fijo para la función f. Adicionalmente se estudian los métodos de aproximar puntos fijos cuando estos existan, así también la estructura del conjunto de todos los puntos fijos de f.

1.2. Teoremas de punto fijo

Existe gran variedad de teoremas de punto fijo, algunos dan condiciones para la unicidad de las soluciones de la ecuación (1), otros son de tipo constructivo como por ejemplo el **principio de la función contractiva de Banach**, donde se utiliza como método de prueba la construcción de una solución. Este método es llamado aproximaciones sucesivas o **método iterativo**.

Detalles sobre este método son dados con bastante claridad por (Demidovich y Maron, 1977), donde se dedica enteramente a los procesos iterativos en sistemas de ecuaciones lineales, así como la aplicación del método iterativo en la solución aproximada de sistemas de ecuaciones no lineales. Este método de las aproximaciones sucesivas ha sido del agrado de una cantidad grande de autores donde incluso algunos basaron sus tesis de grado en aplicaciones de este método, como el caso de Joel Franklin (Franklin, 1980).

Entre los teoremas más inportantes de punto fijo podemos citar:

1.–Teorema de Tarski (Tarski, 1955)

Sea $(X, \leq)$ un conjunto reticulado completo y $f : X \longrightarrow X$ una función monótona decreciente. Ponemos: $F_f = \{x \in X : f(x) = x\}$. Entonces:

i) $F_f \neq \phi$.

ii) $(F_f, \leq)$ es un retículo completo.

2–Teorema de Banach (Banach, 1922)

Sea $(X,\mathbf{d})$ un espacio métrico completo y $f : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{X}$ una aplicación que satisface una condición de Lipchitz con una constante $\alpha < 1$. Entonces:

i) $F_f = \{x^*\}$

ii) Sea $x_0 \in \mathbf{X}$ arbitrario y consideramos la sucesión:

$$x_0, f(x_0) = x_1, \cdots, x_n = f(x_{n-1}), \cdots \quad ,$$

llamada sucesión de las aproximaciones sucesivas, esta sucesión converge y tiene como límite x^*.

iii) Se tiene el estimado

$$\mathbf{d}(x_n, x^*) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\mathbf{d}(x_0, x_1).$$

iv) Sea $g : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{X}$ una aproximación de f, es decir, para un $\eta \in R^+$

$$\mathbf{d}(f(x), g(x)) < \eta \quad \forall \ x \in \mathbf{X}.$$

Si consideramos la sucesión: $y_n = g^n(x_0)$ entonces

$$\mathbf{d}(y_n, x^*) \leq \frac{\eta}{1-\alpha} + \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\mathbf{d}(x_0, x_1).$$

3–Teorema de Brouwer (Brouwer, 1910)

Cualquier conjunto compacto convexo M en un espacio de Banach de dimensión finita tiene la propiedad de punto fijo, es decir, cualquier aplicación contínua $f : M \longrightarrow M$ tiene al menos un punto fijo.

4–Teorema de Schauder (Schauder, 1930)

Todo subconjunto no vacío, convexo y compacto de un espacio normado, posee la propiedad de punto fijo.

5–Teorema de Tychonoff (Tychonoff, 1935)

Todo subconjunto no vacío, convexo y compacto de un espacio localmente convexo, tiene la propiedad de punto fijo.

6–Teorema de Kakutani (Kakutani, 1938)

Sean N un subconjunto de un espacio $\mathbf{X}$ localmente convexo y G un grupo de funciones afines de N en N. Suponga que:

i) $M \subset N, M \neq \emptyset$ con M convexo y compacto.

ii) Toda aplicación f de G es contínua en M y $f(M) \subset M$.

iii)Todas las aplicaciones en G son equicontínuas en M. Entonces:

existe un punto fijo común para G, es decir, existe $x^* \in M$ tal que

$$f(x^*) = x^* \ \ \forall \ f \in G.$$

Es importante notar también que toda ecuación de la forma

$$f(x) = 0 \tag{2}$$

se puede ver como una ecuación de punto fijo, es decir, como una ecuación del tipo (1), para ello basta escribirla como $x = x + g(x)$, aún más, podemos escribir

$$x = x + \lambda f(x) = T(x)$$

y por tanto, resolver la ecuación (2) significa encontrar un punto fijo para el operador $T(x)$. De manera más general podemos decir que resolver (2) es equivalente a encontrar un punto fijo para el operador T, donde se pueden tener los siguientes casos:

i) $T(x) = x - \lambda f(x), \quad \lambda \neq 0.$

ii) $T(x) = x - \lambda g(f(x)), \quad$ con $\quad \lambda \neq 0 \quad y \quad g(y) = 0 \Leftrightarrow y = 0.$

iii) $T(x) = h^{-1}(f(x) - g(x))$, donde $\quad f(x) = h(x) + g(x)$

Por tanto al estudiar las ecuaciones del tipo (1) de hecho también involucramos las ecuaciones del tipo (2).

2. Algunos problemas particulares de punto fijo

Existe una gran diversidad de problemas los cuales conducen de manera natural a las aplicaciones de la teoría de punto fijo. En los espacios métricos el **principio de contracción de Banach (1922)** tiene un campo de aplicaciones tan amplio, que muchos usuarios creen erróneamente que la teoría de punto fijo se reduce solamente a este teorema.

Podemos citar algunos ejemplos que en la referencia son vistos en detalle: aplicaciones a las ecuaciones diferenciales (Apostol, 1965), (Kolmogorov y Fomin, 1972), ecuaciones integrales (Kolmogorov y Fomin, 1972), en la demostración del **teorema de la función implícita** (Apostol, 1965), (Kolmogorov y Fomin, 1972), aplicación del **teorema de Brouwer** a puntos de equilibrio en una economía (Istratèscu, 1981), aplicación del **teorema de Schauder** a un modelo biomatemático en ecuaciones diferenciales parciales no lineales (Liberstein, 1967).

Es importante hacer notar que las aplicaciones a las ecuaciones diferenciales versan sobre conceptos de existencia y unicidad, y por tanto el trabajo de *Cauchy* en este campo ha sido de suma importancia, particularmente en los siguientes temas:

i) Teoremas de existencia y unicidad de *Cauchy - Lipschitz.*

ii) Teoremas de existencia y unicidad de *Cauchy - Picard.*

iii) Método para ecuaciones analíticas de *Cauchy - Mayorant.*

Aunque el primer método fue conocido por *Euler*, *Cauchy* tiene el mérito de ser el primer matemático que demostró, en 1820 los primeros teoremas de existencia y unicidad para la ecuación:

$$\begin{aligned} y' &= f(x,y) \\ y(x_0) &= y_0 \end{aligned}$$

Sin embargo parece que su demostración original era innecesariamente complicada y por lo tanto mejoras notables en los trabajos de *Cauchy* fueron establecidos posteriormente por *R.Lipschitz* en 1876 y por *G.Peano* en 1890. Precisamente en 1890, *Picard* aplica el segundo método tanto a las ecuaciones diferenciales ordinarias como a las ecuaciones en derivadas parciales.

Posteriormente en 1922 se formula el **teorema de punto fijo de Banach** el cual ha sido de gran relevancia y, como vimos anteriormente es el que más frecuentemente se cita en las bibliografías y aplicaciones de punto fijo.

De hecho se tienen más teoremas de punto fijo, pero estos son generalmente modificaciones del teorema de Banach, basados principalmente en las diferentes definiciones de funciones contractivas (se conocen como 125 definiciones distintas las cuales se pueden estudiar en (Rhoades, 1977)) precisamente (Azofeifa, 1990) se dedica al estudio comparativo de algunas de estas definiciones, así como sus respectivos teoremas de punto fijo.

2.1. Clasificación de los teoremas de punto fijo

De acuerdo a las aplicaciones de esta teoría los teoremas de punto fijo se pueden clasificar en tres importantes ramas, a saber:

1) **En espacios métricos**, teoremas importantes: Banach y el teorema de Brouwer-Gohde-Kirk, (Kirk, 1990).

2) **Topología**, teoremas importantes:Brouwer, Shauder, Leray-Shauder (1934), Kakutani.

3) **Teoría de conjuntos**, teoremas importantes: Tarski, Amann, Bourbaki-Kneser.

En el plano topológico el **teorema de Brouwer** (1910) es considerado uno de los más importantes resultados de la matemática moderna, teorema fácil de mencionar pero difícil de probar. Es importante notar que aunque Brouwer publicó este teorema en 1910, éste era conocido desde 1886 por *H.Poincaré* en una forma equivalente, esta equivalencia se puede observar en (Istratèscu, 1981).

Existen muchas demostraciones distintas del teorema de Brouwer. Por ejemplo (Istratèscu, 1981) nos proporciona algunas de ellas; unas cortas pero basadas en topología algebraica, otras analíticas y para aquellos lectores que prefieren una prueba elemental usando solamente propiedades básicas de polinomios y funciones diferenciales, se puede consultar en la sección 4.5 de (Istratèscu, 1981). Otras demostraciones simples y fáciles de entender sobre este teorema se pueden encontrar en (Franklin, 1980), para entender estas demostraciones no es necesario recorrer un curso de Topología o Análisis Funcional. Tales demostraciones se deben a *Adriano García* (si usted entiende la matemática para ingeniería, entonces entiende esta demostración) y a *John Mihnor* quien en 1978 da una prueba realmente sencilla : todo lo que usted necesita saber es cálculo.

2.2. Aplicaciones del teorema de Brouwer

En la literatura sobre este tema la cantidad de aplicaciones importantes de este teorema es muy amplia. Podemos encontrar así en (Istratèscu, 1981) dos bonitas aplicaciones: una dedicada a la demostración del teorema Fundamental del Algebra (B.H.Arnold, 1949) y la otra aplicación relativa a puntos de equilibrio de una economía.

Precisamente uno de los logros más importantes de la economía matemática durante las décadas de los 40 y 50, ha sido la **demostración de la existencia de una solución para el modelo neoclásico del equilibrio económico usando los teoremas de punto fijo**. En economía se tiene una relación bastante estrecha entre el teorema de Brouwer y el problema de existencia para el modelo competitivo. Así por ejemplo tenemos con (Todd, 1980) una aplicación del teorema de Brouwer a un modelo económico de intercambio y se estudian algunas extensiones de este teorema.

Existen algoritmos que utilizan el teorema de Brouwer, en este sentido (Scarf, 1973) presenta por primera vez un método general para una solución numérica explícita del modelo neoclásico del equilibrio económico, siendo este modelo uno de los temas centrales en el análisis económico, este método computacional para aproximar puntos fijos de funciones contínuas es desarrollado en detalle en el capítulo 4 de (Azofeifa, 1993).

Otras aplicaciones del teorema de Brouwer que podemos citar son: la teoría de juegos y la optimización, en particular se utilizan los teoremas de Kakutani y Nash, este último ofrece la famosa aplicación a la economía : *El teorema del equilibrio de Nash para juegos de n- personas.* Como complemento a estas aplicaciones se recomienda la monografía de (Fadell, 1981), fuente de muchas aplicaciones de la teoría de punto fijo; así también como el libro de (Balinski y Cotle, 1978), el cual implementa algunos algoritmos para el cálculo de puntos fijos.

También se tienen aplicaciones con una de las principales herramientas en el análisis funcional no lineal: La teoría de grado. La teoría de grado fue introducida en R por *L.E.J.Brouwer* en 1912., donde se aplican con propiedad los teoremas de Brouwer y Leray-Schauder. Un clásico en la teoría de punto fijo lo tenemos con (Smart, 1974), su exposición es una de las más exquisitas lecturas en la literatura de esta teoría, su lectura no se puede ignorar además de ser una guía excelente. Mencionamos para el lector interesado en la investigación de estos tópicos la más completa y extensa bibliografía de punto fijo hasta 1986, la cual puede ser consultada en (Istratèscu, 1981).

Como hemos podido observar, cada vez nos encontramos con una teoría más elaborada de punto fijo no solamente en el campo matemático sino también en otras disciplinas como en biomatemática, equilibrio económico, teoría de juegos, etc. En particular la teoría del equilibrio económico ha tenido un crecimiento acelerado en las últimas cuatro décadas, principalmente se nota este crecimiento en la formulación de nuevos modelos matemáticos, esto se debe a que los temas fundamentales de los modelos generales de equilibrio son extremadamente simples y pertenecen al corazón de la teoría económica.

Al principio las técnicas usadas en la demostración de la existencia de equilibrio utilizaban argumentos matemáticos principalmente no constructivos y por lo tanto esos argumentos no indicaban la manera de como computar equilibrio de precios y de utilizar las herramientas de este tipo. Por tanto se trata también de dar testimonio de la bondad de técnicas algorítmicas con soluciones numéricas de grandes modelos del equilibrio general. Así, los modelos del equilibrio general han sido tradicionalmente usados y contínuan usándose para analizar los efectos de cambios en política económica, pues uno de las mayores virtudes del modelo general de equilibrio es la habilidad para trazar las consecuencias de grandes cambios en un sector particular de la economía

En la última década hubo un surgimiento de métodos finos aplicados, los cuales nos darán la posibilidad de estudiar y hacer investigaciones propias aplicadas a modelos nacionales. Estos trabajos fueron editados por (ver lista de trabajos en ésta cita, Scarf and Shoven, 1989).

Por otra parte en la rama de la matemática tenemos recientemente aplicaciones sobre funciones no expansivas (una función T definida sobre un espacio métrico (M,d) y tomando valores en otro espacio métrico (M^1,d) se llama no expansiva si $\forall x,y \in M,\ \ d(f(x),f(y)) \leq d(x,y)$). Así, por ejemplo, podemos citar las importantes obras de (Aksoy y Khamsi, 1990), (Büber y Kirk, 1991), (Goebel y Kirk, 1990), (Sims, 1992), y (Zeidler, 1986).

De hecho podemos notar el vasto campo de acción de las funciones no expansiva, además no podemos dejar pasar desapercibido el importante trabajo desarrollado en esta área por el gran matemático W.A.Kirk, quien trata aquellos aspectos de la teoría de punto fijo para funciones no expansivas, las cuales requieren suposiciones más débiles que el Axioma de Escogencia en la forma más general (Büber y Kirk, 1991).

3. Referencias

[1] Aksoy - Khamsi. **Nonstandard Methods in Fixed Point Theory** . Springer-Verlag. New York. 1990.

[2] T.Apostol. **Calculus**.Vol II. Editorial Reverté S.A. España. 1965.

[3] C.Azofeifa. **Algunas definiciones de funciones contractivas**.Ciencia y Tecnología, 14(1-2);69-80. San José. 1990.

[4] C.Azofeifa. **Aplicaciones de la teoría de punto fijo**. Tesis de M.Sc. U.C.R. San Pedro. 1993.

[5] E.L.Allgower. **Application of a fixed point search algorithms to nonlinear problems having several solutions**. S.Karamardian. Academic Press, 1976.

[6] Balinski-Cotle. **Complementary and fixed point problems.** North-Holland P.C. 1978.

[7] Banach, S. **Sur les operations dnas les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales.** Fund. Math. 3, 133-181.1922.

[8] Brouwer, L.E.J. **Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten.** Math. Ann.**70**, 97-115.1910.

[9] Bourbaki, N. **Espaces vectoriels topologiques.** Hermann. Paris. 1955.

[10] T.Büber - W.A.Kirk. **Constructive aspects of fixed point theory for nonexpansive mappings**. Math Subjet Classif :47H10, 54H25. 1991.

[11] B.P.Demidovich-I.A.Maron. **Cálculo numérico fundamental**. Paraninfo. Madrid. 1977.

[12] E.Fadell - G.Fournier. **Fixed point theory.** Lectures Notes in Mathematics N^o 886. Springer Verlag. New York. 1981.

[13] J.Franklin.**Methods of mathematical economics linear and nonlinear programing, fixed point theorems.** Springer Verlag. New York. 1980.

[14] K.Goebel - W.A.Kirk. **Topics in Metric Fixed Point Theory.** Cambridge Univ. Press. 1990.

[15] Hodgkin-Huxley. **A quantitative description of membrane current and its applications to conduction and excitation in nerve.** J. Physiol. 117 (1952).500-544.

[16] V.Istratèscu, **Fixed point theory. An introduction.** D.Reidel Publishing Company. Boston. 1981.

[17] Kakutani, S. **Two fixed-points theorems concerning bicompact convex sets.** Proc. Imp. Acad. Tokyo **14** 242-245. 1938.

[18] A.N.Kolmogorov-S.V.Fomín. **Elementos de la teoría de funciones y del análisis funcional.** Editorial Mir. Moscú. 1972.

[19] W.A.Kirk. **Fixed point theory : A brief survey.** Universidad de los Andes. Venezuela. 1990.

[20] Leray,J.; Schauder, J. **Topologie et équations ocntionnelles.** Ann. Ecole Norm.(3)**51** 51-78. 1934.

[21] Lieberstein .**On the Hodgkin-Huxley partial differential equation.** Math Biosciences. 1 (1967) 45-69.

[22] Lipschitz, R. **Sur la possibilité d'intégrer complétement un systéme donné d'equations differentielles.** Bull. Sci. Math. 10 149-159.1876.

[23] B.E.Rhoades. **A comparison of various definitions of contractive mappings.** Trans of Amer. Mat Soc.Vol 226. 1977.

[24] H.Scarf. **The computation of economic equilibria** . Yale University Press. 1973.

[25] H.Scarf - J.Shoven. **Applied general equilibrium analysis**. Cambridge University Press. 1989. La lista de trabajos importantes para ésta publicación son los siguientes:

1.- *H.Scarf.* The computation of equilibrium prices.

2.-*M.Todd.* Efficient methods of computing economic equilibria.

3.-*A.Mansur and J. Whalley.* Numerical specification of applied general equilibrium.

4.-*A. Feltenstein.* Money and bonds in a disaggregated open economy.

5.-*S.Robinson and L. Tyson.* Modeling structural adjustment : micro and macro elements in a general equilibrium framework.

6.-*L.Kimbell and G.Harrison.* General equilibrium analysis of regional fiscal incidence.

7.-*A.Borges and L.Goulder.* Decomposing the impact of higher energy prices on long-term growth.

8.-*D.Fullerton, Y.Henderson and J.Shoven.* A comparison of methodologies in empirical general equilibrium model of taxation.

9.- *V.Ginsburgh and J.Waelbroeck.* Planning models and general equilibrium activity analysis.

10.-*J. Serra-Puche.* A general equilibrium model for the Mexican economy.

11.-*P.Dixon, B.Parmenter and R.Rimmer.* Extending the ORANI model of the Australian economy : adding foreign investment to a miniature version.

[26] Schauder, J. **Der Fixpuntksatz in Funktionalräumen.** Studia Math. Vol.2, 171-180.1930.

[27] B.Sims.**Geometric conditions sufficient for the weak and** *weak** **fixed point property, Fixed Point Theory and Applications**. World Scientific Publ. Co. Singapore. 1992.

[28] D.R.Smart. **Fixed point theorems.** Cambridge Tracts in Mathematics. Great Britain. 1974.

[29] S.Swaminathan. **Fixed point theory and its applications** . Academic Press. New York. 1976.

[30] Tarski. **A lattice-theoretical fixed-point theorem and its applications.** Pacific J. Math. 5 285-309.1955.

[31] Kiang Tsai-han. **The theory of fixed point classes.** Springer Verlag. New York. 1980.

[32] M.Todd. **The computation of fixed points and applications.** Springer Verlag. Lectures Notes in Economics and Mathematical Systems. New York. 1980.

[33] Tychonoff, A. **Ein Fixpuntksatz.** Math. Ann. **111** 767-776.1935.

[34] E.Zeidler. **Nonlinear Functional Analysis and its Applications I: Fixed Point Theorems**. Springer-Verlag. New York. 1986.