Ciencia y Tecnología **19** No.1(1995) 11-24

Aplicación de las Técnicas de Punto Fijo

Carlos E. Azofeifa Z.
Universidad de Costa Rica
Escuela de Matemática
San José, Costa Rica
(recibido 17 junio 1994, aceptado setiembre 1995)

Abstract: This article will develop a computational procedure for approximating a fixed point of continuous functions of the simplex into itself using the Brouwer's theorem. We also shows the different applications of the theory of fixed point in the economic area.

Subject headings: fixed point, approximation , theorem of Brouwer, applications

Resumen: Se desarrollará un procedimiento computacional para aproximar puntos fijos de funciones contínuas de un simplex en sí mismo utilizando el teorema de Brouwer, mostrando además las diversas aplicaciones de la teoría de punto fijo en el campo económico.

Encabezados de materia: punto fijo, aproximación, teorema de Brouwer, aplicaciones

1. Introducción

De entre las múltiples aplicaciones de los teoremas de punto fijo mencionadas en (Azofeifa, 1993), queremos resaltar especialmente sus aplicaciones en el campo económico. Ahora bien, ¿cómo surgen estos problemas para que los teoremas de punto fijo se hallan convertido en sus herramientas básicas ? En efecto, puesto que los costos en una economía de mercado se determinan por la oferta y la demanda, se trata de obtener un *estado de equilibrio* , es decir, determinar costos donde la oferta de la mercadería sea igual a la demanda . En esta dirección los matemáticos redujeron el problema a demostrar la existencia de la solución de un conjunto de ecuaciones.

Karl Menzer en 1930 hace los primeros esfuerzos y como fruto de este período se obtienen importantes aportes por medio de *von Newman* en 1937 y se comienzan a usar estas herramientas matemáticas en diferentes modelos económicos ,como por ejemplo el modelo *Walrasiano* o el modelo de *Arrow y Debreu.*

Se supone en estos modelos que todas las distintas mercaderías y servicios se pueden clasificar en un número finito, los cuales están disponibles en unidades infinitamente divisibles : R^n es el espacio mercancía y por tanto, $x \in R^n$ especifica una lista de cantidades de cada mercadería.

También es posible considerar economías con un número infinito de distintas mercaderías, pero aquí las herramientas matemáticas usadas son más sofisticadas y precisamente en este caso el espacio de mercancías es un espacio de dimensión infinita, por tanto, todo vector de costo pertenece al espacio dual de mercancía. Ejemplos de este tipo de economías se pueden hallar en (Mas y Colell, 1975), (Bewley, 1972), o (Aliprantis y Brown, 1983).

En el caso del modelo *Walrasian*, la literatura es más basta, en particular podemos mencionar dos textos básicos:(Debreu, 1959) y (Arrow y Hahn, 1971). Más recientemente se tiene a (McKenzie, 1971) y (Debreu, 1982).

Con (Border, 1985) encontramos una obra excelente en la cual se pueden estudiar los teoremas de punto fijo aplicados a la economía pura y a la teoría de juegos; particularmente las aplicaciones del equilibrio de juegos de *Nash* y economías abstractas con sus relaciones en el equilibrio Walrasian de una economía . Así pues, las técnicas abstractas de la matemática han servido para la resolución de un problema central en la teoría económica , a saber: *la prueba de la existencia de una solución para el modelo neoclásico del equilibrio económico.*

Podemos entonces ver la implicación de la matemática en el campo económico por la formulación matemática del modelo general de equilibrio en donde se llega a obtener un sistema complejo de ecuaciones y desigualdades simultáneas precisamente al intentar determinar los costos y niveles de producción en la economía. La solución de este sistema solamente se puede garantizar por los teoremas de punto fijo en lugar de otras técnicas, este procedimiento conlleva a otro problema como una consecuencia de la aplicación de los teoremas de punto fijo: el análisis del equilibrio general se aleja de su propósito final como un método para evaluar la política económica y en su lugar permanecer en un nivel de abstracción y teorización matemática.

Por lo tanto el objetivo principal será tratar de remediar la dificultad anterior proporcionando un método general para hacer explícita la solución numérica del modelo. Se quiere mostrar que este método no solamente sea atractivo a los economistas, sino también a los matemáticos aplicados cuyos campos de trabajo requieren de soluciones con sistemas de ecuaciones altamente no lineales.

2. Como computar equilibrio de costos

Una de las escuelas neoclásicas más representativas sobre el tema es el modelo de equilibrio elaborado por *Walras* en 1874, sin embargo, se debe esperar hasta *Wald*, 1935 para obtener por primera vez un moderno estudio de teoremas de existencia. Para facilitar su análisis *Wald* introduce restricciones sobre las funciones de demanda individuales, además él asume que la demanda individual para cualquier mercadería específica crecería si el costo de cualquier otra mercancía también crecía. Por supuesto hoy día sabemos que esta afirmación es bastante superflua, a pesar de ello *Wald* logra demostrar usando esta asunción la existencia y unicidad de un vector de costos.

Durante muchas décadas se usaron los métodos del cálculo diferencial, sin embargo, fueron cambiados por consideraciones de convexidad en la década de los 40, propiciados por desarrollos en la teoría de juegos, análisis del modelo de producción y de programación lineal. Lo importante es que estos cambios hacen posible discutir una gran variedad de problemas de economía matemática desde un punto de vista global más que local.

Cuando se estudian las soluciones de estos sistemas de ecuaciones tan generales como los que surgen en el modelo competitivo ha sido necesario hacer uso de la topología combinatoria y tomar de ella una serie de conceptos y teoremas sofisticados. Uno de estos teoremas fue enunciado y demostrado en 1910 por *Brouwer* (teorema de Brouwer).

2.1. El Teorema de Brouwer

Como campos de acción de este teorema podemos citar:

i)- En la demostración de la existencia de soluciones de sistemas de ecuaciones.

ii)- En economía, donde se usó primeramente por *von Newman* en la demostración del teorema de Minimax (1928) y posteriormente en el análisis de un economía en expansión(1937).

iii)- La conexión del teorema de Brouwer con el problema de existencia para el modelo competitivo donde varios autores la realizan de una manera más o menos simultánea: (Arrow y Debreu, 1954), (Gale, 1955), (Kuhn, 1956), (McKenzie, 1954, 1959), (Nash, 1950), (Nikaido, 1956), se llegó incluso a garantizar la existencia de al menos un vector de costo el cual equilibra las decisiones dependientes de las unidades de producción y consumo en la economía.

Pero todo este avance trajo consigo un nuevo problema a los economistas el cual mencionamos anteriormente, pues al necesitar de sofisticado material matemático como por ejemplo la topología combinatoria, la cual no era de su dominio y por lo tanto estos argumentos le eran inaccesibles. Como consecuencia de esto se llegó a argumentos matemáticos intrínsicos pero carentes de la intuición económica, pues obviamente los matemáticos no dominaban este campo.

El asunto ahora es como remediar esta dificultad. Una manera posible de ayudar podría ser la de simplificar y refinar los argumentos matemáticos exponiendo ténicas numéricas de importancia práctica en el desarrollo de eficientes algoritmos. Otra manera es la de implementar un surgimiento de literatura matemática entre los economistas. Personalmente creo más en una combinación de los dos métodos anteriores para eliminar la brecha existente.

Algunos métodos han dado también su apoyo como el método simplex, el cual es un algoritmo muy eficiente para la solución de problemas en programación lineal. En nuestro caso el objetivo central de este artículo es la descripción de un algoritmo eficiente para la aproximación de un punto fijo de una función contínua usando el teorema de Brouwer. Este algoritmo se fundamentará en el importante concepto de conjunto primitivo introducido en 1965 por *Scarf*, sin embargo, no podemos dejar de mencionar el importante aporte dado por *Hansen* en 1965 en la aplicación del algoritmo, pues él descubrió una clase de matrices similares a los conjuntos primitivos de *Scarf*.

Esta clase de matrices reducía de manera considerable el almacenamiento en la computadora al realizar los cálculos del algoritmo; poco tiempo después *Kuhn* sugiere sustituir los conjuntos primitivos en el algoritmo para el uso del teorema de Brouwer por el concepto en topología combinatoria de ***subdivisiones simpliciales***, de hecho *Kuhn* observó propiedades similares entre los conjuntos primitivos y las subdivisiones simpliciales.

Como áreas de aplicación de estos algoritmos dentro de la teoría económica tenemos: *comercio internacional, políticas de tributación , mercado de casas y rentas de mantenimiento.*

3. Algoritmo para la determinación de puntos fijos de funciones contínuas

Desarrollaremos un procedimiento computacional para aproximar puntos fijos de funciones contínuas de un simplex en sí mismo mediante el teorema de Brouwer, para este propósito estudiaremos los siguientes subconjuntos del simplex:

Definición 1

Sea S un simplex, decimos que un subsimplex de S tiene la misma orientación de S si el subsimplex es definido por un sistema de inecuaciones de la forma:

$$\begin{aligned} x_1 &\geq b_1 \\ x_2 &\geq b_2 \\ &\vdots \\ x_n &\geq b_n \end{aligned}$$

donde $b_i \geq 0 \ \forall i$ y $\sum_{i=1}^{n} b_i < 1$,para algunos $b_1, \cdots, b_n$.

Observamos en esta definición, que los subsimples que tienen la misma orientación de S, son aquellos cuyos lados son paralelos a los de S.

El algoritmo se fundamentará en el estudio de subconjuntos formados por n vectores , para ello primeramente seleccionaremos una lista grande de vectores $x^{n+1}, \cdots, x^k$ *los cuales estarán localizados arbitrariamente en el simplex* S. El iniciar con el vector x^{n+1} en lugar de x^1 se debe solamente a razones de conveniencia. La escogencia de estos vectores se hará de acuerdo a la siguiente asunción no degenerativa:

Asunción

Vectores que tengan componentes nulas no pueden estar en la lista, así mismo dos vectores en la lista no pueden tener idénticas su $i-$ésima componente $\forall i$.

Ahora bien, una vez que tenemos la lista de vectores ¿cómo sabemos que dado un subconjunto de estos vectores forman un subsimplex con la misma orientación de S ? Para ello examinamos el siguiente resultado.

Teorema 1

Consideremos la lista de vectores $x^{n+1}, \cdots, x^k$ con la asunción anterior y un subconjunto suyo de vectores $x^{j_1}, \cdots, x^{j_n}$; para que estos vectores formen un subsimplex con la misma orientación de S y que cada lado pase a través de uno y solo uno de estos vectores es necesario y suficiente que en la matriz A los elementos más pequeños de cada fila se localicen en columnas diferentes. La matriz A es la matriz $n \times n$ cuyas columnas son los componentes de los vectores $x^{j_1}, \cdots, x^{j_n}$.

Demostración

Ver (Azofeifa, 1993).

Podemos, sin embargo, observar que el subsimplex formado por el conjunto de vectores $x = (x_1, \cdots, x_n)$ con $x_1+x_2+\cdots+x_n = 1$ y satisfaciendo $x_i \geq min[x_i^{j_1}, \cdots, x_i^{j_n}] \ \forall i = 1, 2, \cdots, n$ nos da la condición suficiente.

· Por ejemplo en la siguiente matriz

$$\begin{pmatrix} .3 & .1 & .3 \\ .5 & .4 & .1 \\ .2 & .5 & .6 \end{pmatrix}$$

se cumplen las condiciones del teorema 1 y por tanto, el subsimplex se puede definir por:

$$x_1 \geq .1$$
$$x_2 \geq .1$$
$$x_3 \geq .2$$

La siguiente definición se debe a *Scarf* y fue propuesta en 1967.

Definición 2

Los vectores $x^{j_1}, \cdots, x^{j_n}$ definen un *conjunto primitivo* de vectores si:

1)- Es posible obtener un subsimplex que satisfaga el teorema 1 , y

2)- Ningún vector en la lista $x^{n+1}, \cdots, x^k$ es interior a este subsimplex.

Observemos que con esta definición cualquier subsimplex de S, es interior a S. Por lo tanto si queremos incorporar los lados del simplex S a formar parte de los subsimplex será necesario extender la definición anterior, en efecto:

Extensión de la definición

Si consideramos los $n-m$ vectores $x^{j_1}, \cdots, x^{j_{n-m}}$ junto con los m lados $S^{i_1}, \cdots, S^{i_m}$ entonces estos n vectores forman un *conjunto primitivo de vectores* si ningún vector en la lista $x^{n+1}, \cdots, x^k$ es interior al simplex definido por:

$$x_{i_1} \geq 0, \cdots, x_{i_m} \geq 0$$

$$x_i \geq min[x_i^{j_1}, \cdots, x_i^{j_{n-m}}], \quad i \neq i_1, \cdots, i_m.$$

Para efectos computacionales usaremos la siguiente convención:

$$S^1 \text{ se representa por } x \equiv 1 = (0, A_1, A_1, \cdots, A_0)$$
$$S^2 \text{ se representa por } x^2 = (A_2, 0, A_2, \cdots, A_2)$$
$$\vdots$$
$$S^n \text{ se representa por } x^n = (A_n, \cdots, A_n, 0)$$

es decir, para S^j el cero estará en el lugar $j-$ ésimo para $j \in N$, $A_i > 1$ y $A_i \neq A_j$ para $i \neq j$.

Mencionamos para el lector interesado en la investigación de estos tópicos la más completa y extensa bibliografía de punto fijo hasta 1986, la cual puede ser consultada en (Istratèscu, 1981).

Como hemos podido observar, cada vez nos encontramos con una teoría más elaborada de punto fijo no solamente en el campo$^{j_1}, \cdots, x^{j_n}$ es primitivo y si los vectores $x^{n+1}, \cdots, x^k$ están distribuídos más o menos de manera uniforme en el simplex, entonces los vectores $x^{j_1}, \cdots, x^{j_n}$ van a estar cerca uno del otro y si el lado S^i pertenece a este conjunto entonces los vectores tendrán su i- ésima coordenada cerca de cero. Este hecho es de suma importancia en el algoritmo para usar el teorema de Brouwer.

Teorema 2

Sea $A = \{x^{j_1}, \cdots, x^{j_n}\}$ un conjunto primitivo. Si eliminamos un vector de A, existe una manera de reemplazarlo y de producir a la vez un nuevo conjunto primitivo, salvo el caso en que el resto de $n-1$ vectores son todos lados del simplex S y un vector adicional que se trata de remover.

Demostración

Ver (Azofeifa, 1993).

La operación o regla de reemplazo proporcionada por el teorema 2 se puede resumir así:

Regla de reemplazo

Consideramos el conjunto primitivo $A = \{x^{j_1}, \cdots, x^{j_n}\}$ cuyo simplex asociado está dado por

$$x_i \geq a_i = min[x_i^{j_1}, \cdots, x_i^{j_n}], i = 1, \cdots, n.$$

Para reemplazar un vector escogido de A, primeramente localizamos la cara de el subsimplex que contiene tal vector, teniendo este vector su coordenada i^* constante seguidamente encontramos el vector x^{j_α} con la segunda más pequeña i^* -ésima coordenada. Por tanto, si x^{j_α} estaba en la cara cuya coordenada i era constante, entonces el reemplazamiento satisface:

$$\begin{aligned} x_i &> a_i \\ x_{i^*} &> x_{i^*}^{j_\alpha} \ , \ \forall i \neq i^* \end{aligned} \tag{1}$$

Además el vector x^{j_*} debe tener la siguiente característica especial sobre todos los elementos $x^1, \cdots, x^k$ que satisfacen las ecuaciones (1) : posee la más grande i -ésima coordenada.

Se nota que la regla de reemplazo examina todos los vectores en la lista que satisfacen (1) y que si n es grande puede haber dificultades; sin embargo, si seleccionamos con suficiente regularidad los vectores en la lista, la operación se puede convertir en una operación computacional simple. Por otra parte no hemos mencionado que la regla de reemplazo posee un único reemplazo, este hecho no será demostrado aquí, el lector interesado puede consultar (Scarf, 1973), donde precisamente la demostración se basa en mostrar que el único reemplazo permitido es el dado por la regla de reemplazo.

Otra importante observación a la regla de reemplazo es que esta se puede emplear repetidamente y por tanto, necesitamos un indicador que nos diga cuando debemos parar la producción de conjuntos primitivos, para tal efecto tenemos el siguiente teorema debido a *Scarf*.

Teorema 3

Consideremos la lista de vectores $x^1, \cdots, x^{n+1}, \cdots, x^k$ y cada uno etiquetado con uno de los primeros n enteros, donde $x^i, (i = 1, \cdots, n)$ estará etiquetado con i. Existe entonces un conjunto primitivo cuyos vectores tienen etiquetas diferentes.

Demostración Consideremos el conjunto primitivo $x^2, \cdots, x^n$ con el vector adicional x^j de la lista $x^{n+1}, \cdots, x^k$ con la primera coordenada más grande. En el caso en que la etiqueta de x^j

sea 1 el problema está terminado; en caso contrario su etiqueta asociada estará en el conjunto $\{2, \cdots, n\}$.

Seguidamente se remueve en el conjunto primitivo el vector que tiene la misma etiqueta que el vector x^j, para obtener un nuevo vector x^{j^1}, luego si la etiqueta de x^{j^1} es 1 habremos terminado, en caso contrario nuestro siguiente paso es localizar en el conjunto primitivo el vector que tiene la misma etiqueta que el vector x^{j^1} y luego tratar de reemplazarlo.

Propiedades del algoritmo en cada iteración con un conjunto primitivo :

$$x^{j_1}, \cdots, x^{j_n}.$$

1)- Ninguno de los vectores posee etiqueta 1.

2)- Todos los vectores tienen etiquetas diferentes, salvo dos de ellos los cuales tienen etiquetas iguales.

3)- Uno de los vectores que forma el par de vectores con la misma etiqueta es aportado al conjunto primitivo.

Observamos que el algoritmo procede al eliminar del conjunto primitivo aquel vector en el par con la misma etiqueta y que no ha sido aportado en el conjunto primitivo; posteriormente se encuentra su reemplazo. Si este nuevo vector tiene etiqueta 1, el algoritmo termina, de lo contrario proceden los pasos anteriores.

Por otra parte sabemos que el algoritmo termina cuando obtengamos un conjunto primitivo cuyos vectores tengan todos etiquetas diferentes. Sin embargo, queremos estar seguros que esto se consigue en un número finito de pasos, pues a pesar de que podemos escoger inicialmente un número finito de conjuntos primitivos de la lista $x^1, \cdots, x^k$,el algoritmo podría ser infinito.

Dichosamente el algoritmo no es cíclico y termina en un número finito de iteraciones, el argumento realmente es ingenioso y fue primeramente introducido por (Lemke y Howson, 1964) en un algoritmo elaborado inicialmente para calcular un punto de equilibrio de *Nash*,su demostración es realmente sencilla y se puede consultar en (Scarf, 1973) o en (Lemke-Howson, 1964).

Por tanto, el algoritmo nunca retorna a la misma posición y debe, por tanto, terminar con un nuevo conjunto primitivo o bien alcanzar una posición en la cual el reemplazo requerido no se pueda llevar a cabo. Podemos decir todavía algo más: hay un número par de conjuntos primitivos con etiquetas todas diferentes y se concluye la demostración del teorema.

4. Aplicando el teorema de Brouwer

Anteriormente mencionamos que la idea central era la de aplicar el teorema de Brouwer en la aproximación de un punto fijo de una función contínua de el simplex en sí mismo. En efecto nos damos las coordenadas de la función $f(x_1, \cdots, x_n) = (y_1, \cdots, y_n)$ por

$$y_1 = f_1(x_1, \cdots, x_n)$$
$$\vdots$$
$$y_n = f_n(x_1, \cdots, x_n)$$

donde $f_i : S \to R$ es contínua y $f_i(x) \geq 0 \ \ \forall i = 1, \cdots, n$ y

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x) = 1$$

Seleccionando la lista de vectores $x^{n+1}, \cdots, x^k$ en el simplex S junto con los vectores $x^1, \cdots, x^n$ queremos determinar la etiqueta asociada a x^j (ya sabemos que $x_1, \cdots x_n$ tienen etiquetas $1, 2, \cdots, n$ respectivamente). Para ello examinamos las coordenadas de el vector

$$f(x^i) - x^i$$

y como $\sum_{j=1}^{n} f_j(x^j) - x_j^i = 0$ entonces alguno de estos términos es no negativo y supongamos que este término es el i-ésimo. Por lo tanto al vector x^j le asociamos la etiqueta i, en el caso de que haya más de un término no negativo seleccionamos el más pequeño índice j para el cual $f_j(x^i) - x_j^i$ es no negativo y este j será la etiqueta correspondiente para el vector x^j.

Aplicando el teorema 3 se obtiene un conjunto primitivo cuyos vectores tienen etiquetas diferentes y el subsimplex asociado con este conjunto primitivo cumple que podemos conseguir al menos un vector tal que

$$f_i(x) - x_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \cdots, n$$

Corolario: Teorema de punto fijo de Brouwer

Toda función contínua $f : S \to S$ tiene al menos un punto fijo.

Demostración

Escogemos una sucesión más fina de conjuntos primitivos A_k $(k < \infty)$ tales que en el límite es siempre denso en el simplex S , es decir el diámetro máximo de el simplex asociado a A_k tiende a cero y por lo tanto se puede encontrar una subsucesión que converge en el límite a un único vector x^* .

Como la función es contínua se tiene que para el vector x^* se cumple $f_i(x^*) \geq x_i^*$ $\forall i$ y por tanto, $x^* = f(x^*)$ pues

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x^*) = \sum_{i=1}^{n} x_i^*.$$

Usando la continuidad de la función se puede encontrar una cota para $|f(x) - x|$ la cual en la práctica es bastante débil y por tanto, la diferencia del vector del simplex y su imagen bajo f es demasiado pequeña.

El grado de aproximación se puede obtener por técnicas corrientes del análisis numérico, por tanto, como hemos observado, para la aproximación de un punto fijo de f cualquier vector del subsimplex asociado al conjunto primitivo se puede tomar como una aproximación . Sin embargo, también se pueden obtener ciertos estimados de cotas de error para aproximar puntos fijos principalmente con (Bowman,1976 y Karamardian, 1977).

Quiero indicar también que existe una generalización de el concepto de conjunto primitivo en la cual el concepto mismo y la regla de reemplazo no requieren que los vectores $x^{n+1}, \cdots, x^k$ pertenezcan al simplex S, el lector interesado puede consultar (Scarf, 1973).

5. APENDICE

En este apéndice proporcionaremos programas computacionales para los diferentes algoritmos desarrollados. Estos programas se han establecido usando el lenguaje de programación C. Los programas están dados en subrutinas donde la rutina principal está estructurada de la siguiente manera:

MAIN : Rutina principal

```
main()
{
int p1 ;
lee vectores();
genera conjuntos primitivos();
mínimos en columnas diferentes();
mínimos menor resto();
intercambia vector(p1);
}
```

5.1. Lectura de vectores

LEE VECTORES: Se lee todo el conjunto de vectores

```
lee vectores ()
{
int i, j ;
for (i = 1; 1 < n ; i++)
{
/* lee etiqueta */
printf("\ n La etiqueta del vector %d es : " ,i) ;
scanf("%f" , &vector[i][0]) ;
printf("\ n Ahora lee los valores del vector %d ", n - 1 , i);
{
printf("\ nEl valor %d es : " , j ) ;
scanf("%f" , &vector[i][j]) ;
}
}
```

5.2. Generador de conjuntos primitivos

GENERA-CONJUNTO-PRIMITIVO

```
genera-conjunto-primitivo()
{
int i, j ;
for (i = 0; i < k1; j++)
for (j = 0; j < n; j++)
cp[i][j] = vector[i][j] ;
for (i = k1; i < k; j++)
for (j = 0; j < n; j++)
rv[i][j] =vector[i][j] ;
}
```

5.3. Calcular mínimos en las diferentes columnas

MINIMOS-EN-COL-DIFERENTES

Revisa que los mínimos estén en columnas diferentes

```
int mínimos-en-col-diferentes()
{
int i, j ;
float vp[k1]   /* en vp se guardan las posiciones de los
mínimos */
for (i =; i < k1 :  i++ /* busca los mínimos */
{
vm[i]  = cp[i][1] ;
vp[i]  =  1 ;
for (j = 2 ; j < n; j++)
{
if (cp[i][j]  <  vm[i])
{
vm[i] = cp[i][j]   ;/* busca el mínimo del cp */
vp[i] = j;
/* guarda la posición del mínimo */
}
}
}
for (i = 1;  i < k1;  i++)
{
for (j = i + 1;  j < k1; j++)
if (vp[i] == vp[j])
}
return (0);      /* todo bien */
}
```

5.4. Mínimos-menor-resto

MINIMOS-MENOR-RESTO
Revisa que el vector de los mínimos sea menor que el resto

```
mínimos-menor-resto()
```

```
{
int i, j ;
for (i = 0; i < k2;  i++) /*recorre todos los vectores del resto */
for (j = 1; j < n;j++)
{
if (vm[j] > rv[i][j])
return(0) ;  /* falla */
}
return(1) ; /* todo bien */
}
```

5.5. Intercambiar vectores

INTERCAMBIA-VECTOR
Cambia un vector

```
intercambia-vector(int p)
{
int j ;
/* lee etiqueta */
printf( "\n La etiqueta del cp %d es : " , p) ;
scanf("%f" , &cp[p][0]) ;
printf("\nAhora lee los &d valores del cp %d" , n − 1 , p) ;
for (j = 1; j < n; j==)
{
printf("\nEl valor %d es : " , j ) ;
scanf("%f" , &cp[p][j]) ;
}
}
```

6. Referencias

[1] Aliprantis-Brown, 1983, **Equilibria in Markets with a Riesz Space of Commodities,** Journal of Mathematical Economics **11,** 189-207.

[2] Arrow-Hahn, 1971, **General Competitive Analysis,** Holden-Day, San Francisco.

[3] C.Azofeifa, 1993, **Aplicaciones de la teoría de punto fijo,** Tesis U.C.R., San Pedro Montes de Oca.

[4] Arrow K.J-G.Debreu, 1954, **Existence of an equilibrium for a competitive economy,** Econometrica **27,** 82-109.

[5] Bewley, 1972, **Existence of Equilibria in Economies with Infinitely Many Commodities,** Journal of Economic Theory **4,** 414-540.

[6] Bowman, 1976, **Error bounds for labelings used in computing fixed points.** Ph.d. Thesis, University of California, Irvine, California.

[7] Kim Border, 1985, **Fixed point theorems with applications to economics and game theory,** Cambrige University Press.

[8] Debreu, 1959, **Theory of Value,** New York, Wiley.

[9] Debreu,1982, *Existence of Competitive Equilibrium,* Handbook of Mathematical Economics, Vol. II, North-Holland.

[10] Gale D., 1955, **The law of supply and demand,** Mathematica Scandinavia **3,** 155-69.

[11] V.Istratèscu, 1981, **Fixed point theory. An introduction,** D.Reidel Publishing Company, Boston.

[12] Karamardian S.-B.García, 1977, **Fixed Points: Algorithms and Applications,** Academic Press, New York.

[13] Kuhn.H.W., 1956, **On a theorem of Wald,** In linear inequalities andrelated systems, Ed. H.W.Kuhn and A.W.Tuker, 265-73, Princeton. N.J.,Princeton University Press.

[14] Lemke C.E-J.T.Howson., 1964, **Equilibrium points of bi-matriz games,** SIAM Journal of Applied Mathematics **12,** 413-23.

[15] S.Swaminathan, 1976, **Fixed point theory and its applications,** Academic Press, New York.

[16] Mas-Colell, 1975, **A model of equilibrium with Differentiated Commodities,** Journal of Mathematical Economics **2,** 263-295.

[17] McKenzie L.W., 1959, **On the existence of general equilibrium for a competitive market,** Econometrica **27,** 54-71.

[18] McKenzie L.W., 1971, **The Classical Theorem on Existence of Competitive Equilibrium,** Econometrica, **49,** 819-841.

[19] McKenzie L.W.,1954, **On equilibrium in Graham's model of world trade and other competitive systems,** Econometrica **22,** 147-61.

[20] Nash J.F., 1950, **Equilibrium points in n-person games,** Proceedings of the National Academy of Sciences, U.S.A. **36,** 48-49.

[21] Nikaido H., 1956, **On the classical multilateral exchange problem,** Metroeconomica **8,** 135-45.

[22] Scarf H., 1973, **The computation of economic equilibria,** Yale University Press.