Ciencia y Tecnología **18** No.1,2(1995) 25-30

# Álgebras-MV Artinianas y Noetherianas

L. P. Belluce
University of British Columbia
Department of Mathematics
Vancouver, B. C., Canada

**Abstract:** This article will develop a computational procedure for approximating a fixed points of a continuous functions of the simplex into itsef using the Brouwrer's Theorem. We also shows the different applications of the Theory of Fixed Point in the economic area.

**Subject headings**: computational procedure, Brouwer theorem, fixed point

**Resumen:** Se desarrollará un procedimiento computacional para aproximar puntos fijos de funciones continuas de un simplex en sí mismo utilizando el Teorema de Brouwer, mostrando además las diversas aplicaciones de la Teoría de Punto Fijo en el campo económico.

**Encabezados de materia**: procedimiento computacional, theorema de Brouwer, punto fijo

**0.** Las álgebras-MV se originaron del estudio algebraico de la lógica multi-valor de Lukasiewicz. Esta lógica toma por los grados de verdad subconjuntos del intervalo $[0,1]$ de los numeros reales. Estos subconjuntos de $[0,1]$ deben ser cerrados bajo las operaciones $a+b = min(a+b,1)$, $a \cdot b = max(0, a+b-1)$ y $a^* = 1-a$. Por ejemplo, $\{0,\ 1/n,\ 2/n, \ldots, (n-1)/n, 1\}$ o los numeros racionales en $[0,1]$.

Las álgebras-MV tienen el mismo papel con respecto a la lógica de Lukasiewicz como las álgebras booleanas tienen a la lógica clásica. En efecto, porque $\{0,1\} \subseteq [0,1]$ y es cerrado bajo las operaciones $\oplus$, $\cdot$ ,$^*$ y coinciden con las operaciones clásicas, la lógica clásica es un caso especial de la de Lukasiewicz. Resulta que cada álgebra booleana es un álgebra-MV y las álgebras-MV tienen mucho en común con las álgebras booleanas.

Sin embargo, existen muchas diferencias entre las dos clases de álgebras. Por ejemplo, en un álgebra-MV ni $a \oplus a = a$ ni $a \cdot (b \oplus c) = a \cdot b \oplus a \cdot c$ son validos normalmente. En un cierto sentido un álgebra-MV es un álgebra booleana sin la ley de idempotencia.

Es lo mismo con respecto a los ideales. En un álgebra booleana cada ideal primo es maximal. No es así para las álgebras-MV en general. Resulta que la estructura de las álgebras-MV es mas complicada que la de las álgebras booleanas.

Las álgebras-MV aparecieron por primera vez en las obras de C. C. Chang [1], [2]. Chang demostró el teorema de completitud de la lógica proposicional de Lukasiewicz por métodos algebraicos. Para hacerlo Chang definío las álgebras-MV. Desde entonces ha habido un desarollo continuo de la teoría de esas álgebras. Las álgebras-MV han sido aplicadas a otros campos de la matemática como las álgebras AF C*, grupos abelianos reticulados y la teoría de conjuntos borrosas. ([3], [7], [10])

En este artículo estudiamos las álgebras-MV cuyos ideales satisfacen ciertas condiciones de finitud con respecto al orden $\subseteq$. Los resultados mejoran los resultados principales de Hoo ([8]).

Abajo presentamos una breve e incompleta descripción de las álgebras-MV.

**1.** Un álgebra-MV es un conjunto $A$ con operaciones $\oplus$, $\cdot$, $^*$ y elementos especiales $0, 1 \in A$, tal que $< A, \oplus, 0 >$ es un monoide conmutativo, $(a^*)^* = a$, $a \cdot b = (a^* \oplus b^*)^*$, $0^* = 1$ y $a \oplus a^* \cdot b = b \oplus b^* \cdot a$, por todo $a, b \in A$. Suponemos que $0 \neq 1$. Resulta que $< A, \cdot, 1 >$ es un monoide abeliano.

En $A$ definiamos $a \vee b = a \oplus a^* \cdot b$ y $a \wedge b = (a^* \vee b^*)^*$. Resulta que $< A, \vee, \wedge, 0, 1 >$ es un reticulo distributivo con $0, 1$. Además resulta que $< A, \oplus, \leq, 0 >$ y $< A, \cdot, \leq, 1 >$ son monoides ordenados donde $a \leq b$ si $a \vee b = b$.

Un *ideal* $I \subseteq A$ es un subconjunto donde $0 \in I$, $a, b \in I$ implican $a \oplus b \in I$, y $a \in I$, $b \leq a$ implican $b \in I$. Un ideal $P$ es *primo* si $P \neq A$ y $a \wedge b \in I$ implica $a \in I$ o $b \in I$. Un ideal $M$ es *maximal* si $M \neq A$ y los unicos ideales que contienen $M$ son $M$ y $A$. Cada ideal maximal es primo.

Para cada ideal $I \subseteq A$ se puede definir una relación de congruencia, $a \equiv b \ mod I$ si y solo si $a \cdot b^* \oplus a^* \cdot b \in I$. Las clases de equivalencia forman naturalmente un álgebra-MV. Denotemos esta álgebra por $A/I$ y para $a \in A$ denotemos por $a/I$ la clase de equivalencia determinada por $a$. Si $P$ es un ideal primo, $A/P$ es un álgebra totalmente ordenado. Si $M$ es un ideal maximal, $A/M$ es (o es isomorfa a) una subálgebra de $[0, 1]$ y solo tiene como ideales 0 o $A/M$.

Las leyes usuales acerca de isomorfismos, homomorfismos, productos directos son validos para las álgebras-MV.

Para detalles mas completa sobre esas álgebras vea [1], [2], [3], [10].

**2.** Sea $A$ un álgebra-MV. Digamos que $A$ es *artiniana* si cada serie descendente de ideales es finita. $A$ se llama *noetheriana* si cada serie de ideales ascendente de ideales es finita.

Lo siguiente es claro.

**Proposición 1.** Sean $A$, $A'$ álgebras-MV, $f: A \to A'$ un epimorfismo. Si $A$ es artiniana (noetheriana) entonces $A'$ es artiniana (noetheriana).

Dada A, sea $Id(A)$ el conjunto de ideales de $A$.

**Proposición 2.** Si $A$ es artiniana, noetheriana y totalmente ordenada, entonces $Id(A)$ es finito.

Demostración. Si $A$ es totalmente ordenada, entonces $Id(A)$ es totalmente ordenado por $\subseteq$. Como $A$ es artiniana y noetheriana $Id(A)$ debe ser finito.

Dada $A$, sea $MinA$ el conjunto de los ideales primos que son minimales en el conjunto de los ideales primos. $MaxA$ denotará el conjunto de los ideales maximales de $A$.

**Proposición 3.** Si A es artiniana entonces $MinA$ es finito.

Demostración. Supongamos que $m_1, m_2, m_3 \ldots$ es una serie de elementos de $MinA$. Entonces existe una serie descendente de ideales, $m_1 \supseteq m_1 \cap m_2 \supseteq \ldots$. Por eso hay un entero $n$ tal que $m_1 \cap \cdots \cap m_n = m_1 \cap \cdots \cap m_{n+1}$. Por tanto $m_1 \cap \cdots \cap m_n \subseteq \cap m_{n+1}$. Como $m_{n+1}$ es primo, existe un $i$ tal que $m_i \subseteq m_{n+1}$. Como $m_{n+1}$ es minimal primo, $m_i = m_{n+1}$. Resulta que $MinA$ debe ser finito.

Es bien conocido que en cualquier álgebra-MV $A$ que $\bigcap MinA = 0$. De Proposición 3 y álgebra general, si $A$ es artiniana entonces $A \subseteq A/m_1 \times A/m_2 \times \cdots \times A/m_n$ donde $MinA = \{m_1, \ldots, m_n\}$. (Identificamos $A$ con su copia isomorfa.) Cada $A/m_i$ es totalmente ordenada y por Proposición 1 es artiniana también. Si $A$ es noetheriana también, entonces Proposiciones 1, 2 implicarán que $Id(A/m_i)$ es finito, $i = 1, 2, ..., n$. Claramente resulta que $Id(A/m_1 \times \cdots \times A/m_n)$ es finito.

Sea $X \subseteq A$. Por $id(X)$ queremos decir el ideal de $A$ generado por $X$. Entonces $id(X) = \{a \in A \mid \text{existen } a_1, \cdots, a_k \in X \text{ y } a \leq a_1 \oplus \cdots \oplus a_k\}$.

El siguiente es obvio para las álgebras-MV.

**Lema 1.** Sea $A'$ una subálgebra-MV de $A$. Sea $I' \subseteq A'$ un ideal de $A'$ y sea $I$ el ideal en $A$ generado por $I'$. Entonces $I' = I \cap A'$.

**Proposición 4.** Los siguientes proposiciones son equivalentes,

i) $A$ es artiniana y noetheriana.

ii) $Id(A)$ es finito.

Demostración. Es evidente que ii) implica i). Supongamos i). De la discusión anterior $A$ es una subálgebra de $A/m_1 \times \cdots \times A/m_n$ donde $MinA = \{m_1, \ldots, m_n\}$. Por Lema 1 existe una sobreyección, $Id(A/m_1 \times \cdots \times A/m_n) \rightarrow Id(A)$. Como $Id(A/m_1 \times \cdots \times A/m_n)$ es finito, resulta que $Id(A)$ es finito.

$A$ se llama *local* ([6]) si $MaxA$ tiene un elemento único. $A$ se llama *semi-local* si $MaxA$ es finito. (cf. [8].)

**Proposición 5.** Si $A$ es artiniana, then $A$ es semi-local.

Demostración. Proposición 3 implica que $MinA$ es finito. Como en un álgebra-MV existe una sobreyección $MinA \rightarrow MaxA$, ([5]), resulta que $MaxA$ es finito.

Dada A, sea $RadA = \bigcap MaxA$. $RadA$ se llama la *radical* de $A$. $A$ se llama *semisimple* ([3]) si $RadA = 0$. $A/RadA$ es semisimple siempre.

**Proposición 6.** Si $A$ es semi-local y semisimple entonces $A$ es artiniana y noetheriana.
Demostración. Es suficiente demostrar que $Id(A)$ es finito. Como $MaxA = \{M_1, \ldots, M_n\}$ y $A$ es semisimple, resulta que $A$ es isomorfa a una subálgebra de $A/M_1 \times \cdots \times A/M_n$. Cada $A/M_i \subseteq [0,1]$ y no tiene ideales no triviales. Por eso $Id(A/M_1 \times \cdots \times A/M_n)$ es finito y por el Lema 1 podemos concluir que $Id(A)$ es finito.

**Proposición 7.** Las siguientes proposiones son equivalentes.
i) $A$ es semi-local.
ii) $A/RadA$ es artiniana y noetheriana.
iii) $Id(A/RadA)$ es finito.
Demostración. Si $A$ es semi-local entonces $A/RadA$ es semi-local y semisimple. De aquí $A/RadA$ es artiniana y noetheriana por Proposición 6. Por Proposición 4, $A/RadA$ artiniana y noetheriana implican $Id(A/RadA)$ es finito. Puesto que existe una biyección entre los ideales de A que contienen $RadA$ y los ideales de $A/RadA$, resulta que $Id(A/RadA)$ finito implica que $MaxA$ es finito. De aquí, $A$ es semi-local.

En efecto podemos decir algo más.
Sea $\mathcal{I}(A) = \{I \in Id(A) \mid RadA \subseteq I\}$. Entonces,

**Corolario.** Si $A$ es semi-local entonces $\mathcal{I}(A)$ es finito.

Llamenos un ideal $I \subseteq A$ *implicativo* ([9], [11]) si $a^2 \in I$ implica $a \in I$. Sea $\Im(A)$ el conjunto de ideales implicativos de $A$. Para $a \in RadA$ tenemos $a^2 = 0$ ([4]). Por eso, si $I \in \Im(A)$ entonces $RadA \subseteq I$. Por eso $\Im(A) \subseteq \mathcal{I}(A)$.

**Corolario.** Si $A$ es semi-local, $\Im(A)$ es finito.

Este corolario mejora Teorema 2.8 de [8]. Esta teorema dice que si $A$ es semi-local entonces cada cadena descendente, $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \ldots$, de ideales en $\Im(A)$ es finito.

**Proposición 8.** Para cualquier álgebra-MV $A$ e ideal $I \subseteq A$ las siguientes proposiciones son equivalentes.
i) $I \in \Im(A)$.
ii) $A/I$ es un álgebra booleana.
Demostración. Supongamos i). Para $a \notin I$, $a^2 \notin I$; entonces en $A/I$, $a/I \cdot a/I \neq 0$. Por consiguiente $a/I \oplus a/I = 1$ implica que $a/I = 1$. Para todo $a \in A$, $a \wedge a^* \leq a \vee a^* = (a \wedge a^*)^*$. De aquí, en $A/I$, $(a \vee a^*)/I \oplus (a \vee a^*)/I = 1$. Por tanto $(a \wedge a^*)/I = 0$ que significa que $a/I \wedge a^*/I = 0$. De [1] sabemos que $A/I$ es un álgebra booleana. Supongamos ii). Sea $a^2 \in I$. Entonces $a/I \cdot a/I = 0$. Pero $A/I$ es booleana y por eso $a/I \cdot a/I = a/I$. Resulta que $a/I = 0$ y $a \in I$. Por consiguiente $I \in \Im(A)$.

Supongamos que $\mathcal{S} \subseteq Id(A)$. Decimos que $\mathcal{S}$ satisface la ***condición de cadena ascendente*** (cca) si toda serie ascendente de ideales de $\mathcal{S}$ es finita. Similarmente $\mathcal{S}$ satisface la ***condición de cadena descendente*** (ccd) si toda serie descendente de ideales de $\mathcal{S}$ es finita.

**Proposición 9.** Supongamos que $A/RadA$ es noetheriana. Entonces $\Im(A)$ satisface las cca y ccd.

La Proposición 9 también es más general que el Teorema 2.8 de [8] ya que $A$ semi-local implica $A/RadA$ es noetheriana.

Para demostrar la Proposición 9 necesitamos unos lemas.

Primero, si $a \in A$, $A$ un álgebra-MV, denotamos por $a^{\perp}$ el conjunto $\{b \in A \mid a \wedge b = 0\}$. $a^{\perp}$ es siempre un ideal de $A$ ([3]).

**Lema 2.** Las álgebras booleanas y noetherianas son finitas.
Demostración. Sea $B$ un álgebra booleana y noetheriana. Primero demostramos que $B$ es atómica. Sea $a_1 \geq a_2 \geq \dots$ una serie descendente de elementos de $B$. Entonces $a_1{}^{\perp} \subseteq a_2{}^{\perp} \subseteq \dots$ es una serie ascendente de ideales y, por eso, es finita. Existe entonces un entero $n$ tal que $a_n^{\perp} = a_{n+1}^{\perp}$. Esto significa que $a_n^* = a_{n+1}^*$ y por consiguiente $a_n = a_{n+1}$. De aquí, $B$ es atómica. Ahora es suficiente demostrar que $B$ tiene solomente un número finito de átomos. Sea $e_1$, $e_2 \dots$ una serie de átomos. Consideremos la serie de ideales $id(e_1) \subseteq id(e_1 \oplus e_2) \subseteq \dots$. Puesto que $B$ es noetheriana, existe $n$ tal que $id(e_1 \oplus \cdots \oplus e_n) = id(e_1 \oplus \cdots \oplus e_{n+1})$. Por eso $e_{n+1} \leq e_1 \oplus \cdots \oplus e_n$. Si $e_{n+1} \neq e_i$ para alguna $i = 1, 2, \dots, n$ entonces $e_{n+1} = 0$ que es absurdo. El lema se concluye.

Sea $N_A = id\{a \wedge a^* \mid a \in A\}$. Como $A/N_A$ es un álgebra booleana, sabemos que $N_A \in \Im(A)$. Por $I \in \Im(A)$, $A/I$ es booleana, entonces $N_A \subseteq I$. Como $A/RadA$ se supone noetheriana y como existe un epimorfismo $A/RadA \to A/N$, $A/N$ es noetheriana por Proposición 1. Por Lema 2, $A/N_A$ es finita. Por consiguiente $\{A/I \mid I \in \Im(A)\}$ contiene un número finito de álgebras booleanas no isomorfas.

**Lema 3.** Supongamos $I$, $J \in \Im(A)$, $I \subseteq J$, $I \neq J$. Entonces $\mid A/J \mid < \mid A/I \mid$ (donde $\mid X \mid$ significa la cardinalidad de $X$).
Demostración. Hay un epimorfismo $A/I \to A/J$ dado por $a/I \to a/J$. Por tanto $\mid A/J \mid \leq \mid A/I \mid$. $I \neq J$, así existe $a \in J - I$. Por eso $0 \neq a/I \to a/J = 0$. Resulta que $A/I \to A/J$ no es mónico. Como $A/I$, $A/J$ son conjuntos finitos por Proposición 8 y Lema 2, deducimos que $\mid A/J \mid < \mid A/I \mid$.

Sabemos, entonces, que $\{\mid A/I \mid \mid I \in \Im(A)\}$ es un conjunto finito de enteros. Por eso, cada serie $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots$ de elementos de $\Im(A)$ determina una serie $n_1 \geq n_2 \geq \dots$, donde $n_j = \mid A/I_j \mid$. La serie $n_1 \geq n_2 \geq \dots$ debe ser finita y de aquí existe una $k$ tal que $\mid A/I_k \mid = \mid A/I_{k+1} \mid$. Ya que $I_k \subseteq I_{k+1}$ , resulta de Lema 3 que $I_k = I_{k+1}$. Podemos concluir que $\Im(A)$ satisface cca.

Similarmente podemos demostrar que $\Im(A)$ satisface ccd.

La Proposición 9 ha sido demostrado.

Como hemos dicho, la Proposición 9 es más general que Teorema 2.8 de [8]. Pero eso no es cierto mientras la siguiente pregunta es todavia abierta.

Sea $A$ un álgebra-MV semisimple. ¿Es verdad que $A$ es noetheriana si y solo si $A$ es artiniana?

En general ni noetheriana implica artiniana ni artiniana implica noetheriana.

Por ejemplo sea $^*[0,1]$ el intervalo $\{t \mid 0 \leq t \leq 1\} \subseteq {}^*\Re$ donde $^*\Re$ es un ultrapotencia no trivial de los números reales $\Re$. $^*[0,1]$ es un álgebra-MV en la misma manera como $[0,1]$. Sea $t \in {}^*[0,1]$ un infinitesimal, $t \neq 0$. Para cada entero $n \geq 0$ sea $t_n = tt\cdots t$ ($n$ factors), el producto en el campo $^*\Re$. Sea $A$ la subálgebra de $^*[0,1]$ generada por $\{t_n \mid n = 1,2,3,\ldots\}$. Se puede averiguar que cada elemento de $A$ tiene la forma $u$ o $1-u$ donde $u$ es 0 o un infinitesimal. Para cada $u$, $(1-u)\oplus(1-u) = min(1,\ 2-2u) = 1$. Por eso ningún ideal de $A$ contiene un elemento de la forma $1-u$, $u$ un infinitesimal. Se puede convencer que $Id(A) = \{id(t_n) \mid n = 1,2,\ldots\}$. Como $id(t_1) \supset id(t_2) \supset \ldots$, resulta que $A$ es noetheriana pero no es artiniania.

Similarmente, si $A$ es la subálgebra de $^*[0,1]$ generada por $\{t^{1/n} \mid n = 1,2,\ldots\}$ resulta que $A$ es artiniana pero no es noetheriana.

## Referencias

[1] Chang C. C., Algebraic analysis of many valued logics. Trans. Amer. Math. Soc. 88(1958), 467-490.

[2] Chang C. C., A new proof of the completeness of the Lukasiewicz axioms. Trans. Amer. Math. Soc. 93(1959), 74-80.

[3] Belluce L. P., Semisimple algebras of infinite valued logic and bold fuzzy set theory. Can. J. Math. 38(1986), 1356-1379.

[4] Belluce L. P., Semisimple and complete MV-algebras. Algebra Unversalis 29(1992), 1-9.

[5] Belluce L. P., DiNola A., Lettieri A., The prime spectrum of an MV-algebra. Math Logic Quart. 40(1994), 331-346.

[6] Belluce L. P., DiNola A., Lettieri A., Local MV-algebras. Rend. Circ. Mat. Palermo, Ser.II, Tomo XLII(1993), 347-361.

[7] Belluce L. P., DiNola A., Sessa S., Triangular norms, MV-algebras and bold fuzzy set theory. Math. Japon. 36(1991), 1481-487.

[8] Hoo C. S., Semilocal MV-algebras. Math Japon. 40(1994), 1451-453.

[9] Hoo C. S., Sessa S., Implicative and boolean ideals in MV-algebras. Math. Japon. 39(1994), 215-219.

[10] Mundici D., Interpretation of $AFC^*$−algebras in Lukasiewicz sentential calculus. J. Funct. Anal. 65(1986), 15-63.

[11] DiNola A., Fortunata L., Sessa S., Using maximal ideals in the classification of MV-algebras. Portugalie Math. 50(1993), 187-102.