Ciencia y Tecnología **17** No.1(1993) 43- 51

La continuidad de ciertas funciones definidas por integrales impropias

Ana Lía Durán
Universidad de Costa Rica
Escuela de Matemática, San José, Costa Rica

(recibido abril 1992, aceptado agosto 1993)

Abstract: The continuity and bounddedness of improper integrals of type $\int_X \mid p(\mathbf{x}) \mid^{-r} d\mathbf{x}$ with respect to the polynomial of n variables $p(\mathbf{x})$, of degree less than or equal to k, for $0 < r < \frac{1}{k}$ is established.

Subject headings: continuity, improper integrals, bounddedness.

Resumen: Se prueba la continuidad y acotación de integrales impropias del tipo $\int_X \mid p(\mathbf{x}) \mid^{-r} d\mathbf{x}$ con respecto al polinomio de n variables $p(\mathbf{x})$, de grado menor o igual a k, para $0 < r < \frac{1}{k}$.

Encabezados de materia: continuidad, integrales impropias, limitaciones.

1. Introducción

En el presente artículo se estudia la continuidad y acotación de integrales impropias de la forma

$$\int_a^b \mid c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_k x^k \mid^{-r} dx, \tag{1}$$

como funciones de $c_0, \cdots, c_k$ para $0 < r < \frac{1}{k}$, o, equivalentemente, la continuidad y acotación de la integral impropia

$$\int_a^b \mid p(x) \mid^{-r} dx \tag{2}$$

como función del polinomio p, de grado menor o igual a k.

También se consideran los resultados correspondientes en varias variables, es decir, se establece la continuidad y acotación de integrales impropias de la forma

$$\int_X |\, p(\mathbf{x}) \,|^{-r}\, d\mathbf{x} \tag{3}$$

con respecto al polinomio de n variables $p(\mathbf{x})$ para $0 < r < \frac{1}{k}$. Aquí X es un paralelepípedo de $\mathbb{R}^n$.

Usaremos la notación $\mathcal{P}_k$ para el espacio de polinomio de grado menor o igual a k en n variables. El espacio $\mathcal{P}_k$ es de dimensión finita y así todas las normas sobe él son equivalentes. Por lo tanto, la continuidad de funciones definidas en subconjuntos de $\mathcal{P}_k$ significa continuidad con respecto a los coeficientes del polinomio.

Se establece entonces que (3) define una función continua en $\mathcal{P}_k \setminus \{0\}$ y que si $\|\ \|$ es cualquier norma en $\mathcal{P}_k$ y si $0 \le r < \frac{1}{k}$ existe una constante $M = M(r, \|\ \|, k)$ tal que valga la desigualdad

$$\int_X |\, p(\mathbf{x}) \,|^{-r}\, d\mathbf{x} \le M \,\|\, p \,\|^{-r} . \tag{4}$$

Obsérvese que si $s \ge 1$ la expresión

$$\|\, f \,\|_s = \left(\int_X |\, f(\mathbf{x})^s d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{s}} , \tag{5}$$

define una norma en $\mathcal{P}_k$ y que la equivalencia de esta norma con cualquier otra norma $\|\ \|$ muestra la existencia de una constante $M = M(s, \|\ \|, k)$ tal que

$$\int_X |\, p(\mathbf{x}) \,|^{s}\, d\mathbf{x} \le M \,\|\, p \,\|^{s} \tag{6}$$

para $p \in \mathcal{P}_k$. La desigualdad (4) se puede ver entonces como una extensión de la desigualdad (6) al rango $-\frac{1}{k} < s < 0$.

Desigualdades de este tipo son importantes en el estudio de integrales oscilatorias [1,3]. Resultados relacionados se pueden encontrar en [2].

El plan del artículo es el siguiente. En la segunda sección estudiaremos la desigualdad (4) para polinomios en una variable. La situación en varias variables se considera en la siguiente sección. La última sección contiene la prueba de la continuidad de estas integrales impropias.

2. El caso de una variable

Sea $p(x) = c_0 + c_1x + \cdots + c_kx^k$ un polinomio no nulo de grado menor o igual a k. Sean $\alpha_1, \cdots, \alpha_j$ sus raíces, de multiplicidades $n_1, \cdots, n_j$. Nótese que $n_1 + \cdots + n_j \leq k$ y por lo tanto $n_i \leq k$ para todo i. Podemos factorizar el polinomio $p(x)$ como $p(x) = q(x)(x - \alpha_i)^{n_i}$ donde el polinomio $q(x)$ no se anula cerca de α_i. Se concluye que si el intervalo $[a, b]$ contiene tan solo la raíz α_i, entonces la integral impropia

$$\int_a^b \frac{dx}{\mid p(x) \mid^r} = \int_a^b \frac{dx}{\mid q(x) \mid^r \mid x - \alpha_i \mid^{rn_i}} \tag{7}$$

converge para $rn_i < 1$ y por lo tanto para $r < \frac{1}{k}$.

Dividiendo un intervalo general $[a, b]$ en subintervalos que contengan solo una raíz de p, se deduce que la integral $\int_a^b \mid p(x) \mid^{-r} dx$ converge para $r < \frac{1}{k}$.

Estableceremos ahora la desigualdad (4). La equivalencia de todas las normas en $\mathcal{P}_k$ nos permite trabajar con cualquier norma $\mathcal{P}_k$. Así trabajaremos con la norma

$$\| p \|_\infty = sup \{\mid p(x) \mid : a \leq x \leq b\}. \tag{8}$$

Además, observemos que si $M_s(a, b)$ es la menor constante posible en la desigualdad

$$\int_a^b \mid p(x) \mid^{-r} dx \leq M \| p \|_s^{-r}, \quad p \in \mathcal{P}_k \setminus \{0\}, \tag{9}$$

entonces

$$M_s(a, b) = M_s(0, 1)(b - a)^{1+\frac{r}{s}}. \tag{10}$$

Así se puede centrar la atención en el caso en que $a = 0$, $b = 1$.

Lema 1

Sea $p(x)$ un polinomio complejo de grado 1. Entonces para cada r con $0 \leq r < 1$ existe una constante $M > 0$ con

$$\int_0^1 \mid p(x) \mid^{-r} dx \leq M \| p \|_\infty^{-r} \tag{11}$$

Prueba:

Sea $p(x) = C(x - \omega)$ donde $\omega = \alpha + i\beta$ y donde $C \neq 0$. Como ambos miembros de la desigualdad (11) son homogeneos de grado $-r$, se puede suponer que $C = 1$. Obsérvese que el máximo de $\mid p(x) \mid = \sqrt{(x - \alpha)^2 + \beta^2}$ debe alcanzarse en alguno de los extremos $x = 0$ o $x = 1$. Por lo tanto

$$\| P \|_\infty = \left\{ \begin{array}{ll} \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, & \text{si } \alpha \geq \frac{1}{2} \\ \sqrt{(1 - \alpha)^2 + \beta^2}, & \text{si } \alpha \leq \frac{1}{2}. \end{array} \right\{ \tag{12}$$

Dado que el cambio de $p(x)$ por $-p(1-x)$ no altera la desigualdad (11), bastará considerar el caso $\alpha \geq \frac{1}{2}$. Ahora bien, si $\alpha \geq 2$ ó si $\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 2$ y $|\beta| \geq 2$ entonces

$$\alpha^2 + \beta^2 \geq 2\alpha,$$

y por lo consiguiente,

$$x(x + (\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha)) \geq 0,$$

para $0 \leq x \leq 1$. Se deduce entonces que

$$\sqrt{(x-\alpha)^2 + \beta^2} \geq \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\sqrt{1-x}. \tag{13}$$

Así,

$$\int_0^1 |p(x)|^{-r}\, dx \leq (\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{-r}{2}} \int_0^1 (1-x)^{\frac{-r}{2}} dx \leq \frac{1}{1-\frac{r}{2}} \| p \|_\infty^{-r}. \tag{14}$$

Resta considerar la situación cuando $\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 2, |\beta| \leq 2$. En este caso

$$\alpha^2 + \beta^2 \leq 8,$$

y así

$$\| p \|_\infty^{-r} = (\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{-r}{2}} \geq 2^{\frac{-3r}{2}},$$

por lo cual

$$\begin{aligned} \int_0^1 |p(x)|^{-r}\, dx &\leq \int_0^1 |x-\alpha|^{-r}\, dx \\ &\leq \frac{2^{2-r}}{1-r} \\ &\leq \frac{2^{2+\frac{r}{2}}}{1-r} \| p \|_\infty^{-r}. \end{aligned} \tag{15}$$

La desigualdad (11) valdrá entonces con $M = \frac{2^{2+\frac{r}{2}}}{1-r} = max \left\{ \frac{1}{1-\frac{r}{2}}, \frac{2^{2+\frac{r}{2}}}{1-r} \right\}$. Nótese que cuando r se aproxima a 1 entonces $M = M(r)$ tiende a infinito .■

Consideremos ahora el caso de polinomios de grado arbitrario.

Lema 2

Sea $p(x)$ un polinomio complejo de orden k. Entonces si $0 \leq r < \frac{1}{k}$ existe una constante $M = M(r,k)$ tal que

$$\int_0^1 |p(x)|^{-r}\, dx \leq M \| p \|_\infty^{-r}. \tag{16}$$

Además, si $k = k_1 + k_2$, $1 \leq k_i \leq k$, entonces si $M(r,k)$ es la menor constante posible, se tiene

$$M(r,k) \leq M\left(\frac{rk}{k_1}, k_1\right)^{\frac{k_1}{k}} M\left(\frac{rk}{k_2}, k_2\right)^{\frac{k_2}{k}}. \tag{17}$$

Prueba:

Sea p un polinomio de grado k. Escribamos $p = p_1 p_2$, donde p_i tiene grado k_i, $1 \leq k_i \leq k$, $k_1 + k_2 = k$. Poniendo $s_i = \frac{k}{k_i}$ se tendrá

$$\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} = 1, \tag{18}$$

por lo que podemos aplicar la desigualdad de Hölder:

$$\int_0^1 | p(x) |^{-r} = \int_0^1 | p_1(x) |^{-r} | p_2(x) |^{-r} \, dx$$

$$\leq \left[\int_0^1 | p_1(x) |^{-rs_1}\right]^{\frac{1}{s_1}} \left[\int_0^1 | p_2(x) |^{-rs_2} \, dx\right]^{\frac{1}{s_2}}$$

$$\leq [M(rs_1, k_1)]^{\frac{1}{s_1}} [M(rs_2, k_2)^{\frac{1}{s_2}}] \, \| p_1 \|_\infty^{-r} \| p_2 \|_\infty^{-r}$$

$$\leq M\left(\frac{rk}{k_1}, k_1\right)^{\frac{k_1}{k}} M\left(\frac{rk}{k_2}, k_2\right)^{\frac{k_2}{k}} \| p \|_\infty^{-r}, \tag{19}$$

de donde se deduce la desigualdad (17). Nótese que para obtener (19) usamos la desigualdad $\| p \|_\infty \leq \| p_1 \|_\infty \| p_2 \|_\infty$.

Ahora bien, si usamos (17) repetidamente obtenemos

$$M(r,k) \leq M(rk, 1) \tag{20}$$

y como $M(t,1)$ es finito para $0 \leq t < 1$ se concluye que $M(r,k)$ es finita para $0 \leq r < \frac{1}{k}$. De hecho, según lo obtenido en la prueba del lema 1,

$$M(r,k) \leq \frac{2^{2+rk}}{1 - rk}, \tag{20}$$

para $0 \leq r < \frac{1}{k}$. ■

Hemos así establecido

Teorema 1

Sea $\| \; \|$ cualquier norma en $\mathcal{P}_k$ el espacio de polinomios de grado menor o igual a k. Entonces si $a < b$ y si $0 \leq r < \frac{1}{k}$, existe una constante $M = M(\| \; \|, r, a, b, k)$ tal que

$$\int_a^b | p(x) |^{-r} \, dx \leq M \, \| p \|^{-r}, \tag{21}$$

para todo $p \in \mathcal{P}_k \setminus \{0\}$.■

3. La desigualdad en varias variables

Estudiaremos ahora el caso $n-$dimensional. Escribimos $C_n = [0,1]^n$ el cubo $n-$dimensional y $\| p \|_\infty = sup\{| p(\mathbf{x}) | : \mathbf{x} \in C_n\}$.

Lema 3

Sea $p(\mathbf{x})$ un polinomio complejo en n variables de grado menor o igual a k. Entonces para $0 \leq r < \frac{1}{k}$ existe una constante $M = M_n$ tal que

$$\int_{C_n} | p(\mathbf{x}) |^{-r} \, d\mathbf{x} \leq M \| p \|_\infty^{-r} . \tag{22}$$

Prueba:

Dado que, según los resultados de la sección 2, $M_1 < \infty$ el resultado se seguirá si probamos que

$$M_{n+m} \leq M_n M_m. \tag{23}$$

Ahora bien, considérese un polinomio de $n+m$ variables, que escribimos como $p(\mathbf{x},\mathbf{y})$ donde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$. Sea $\| p \|_\infty = | p(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) |$, donde $\mathbf{x}^* \in C_n$, $\mathbf{y}^* \in C_m$. Tendremos

$$\begin{aligned}
\int_{C_{n+m}} | p(\mathbf{x},\mathbf{y}) |^{-r} \, d\mathbf{x}d\mathbf{y} &= \int_{C_m}\int_{C_n} | p(\mathbf{x},\mathbf{y}) |^{-r} \, d\mathbf{x}d\mathbf{y} \\
&\leq M_n \int_{C_m} [sup\{| p(\mathbf{x},\mathbf{y}) | : \mathbf{x} \in C_n\}]^{-r} d\mathbf{y} \\
&\leq M_n \int_{C_m} | p(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}) |^{-r} \, d\mathbf{y} \\
&\leq M_n M_m \, [sup\{| p(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}) | : \mathbf{y} \in C_m\}]^{-r} \\
&\leq M_n M_m \| p \|_\infty^{-r},
\end{aligned}$$

de donde se deduce (24).■

Dado que todas las normas sobre $\mathcal{P}_k$ son equivalentes y dado que cualquier paralelepípedo en $\mathbb{R}^n$ se puede transformar en C_n por medio de un cambio de variables lineal, obtenemos:

Teorema 2

Sea $\| \, \|$ cualquier norma en $\mathcal{P}_k$ el espacio de polinomios de grado k en n variables. Entonces si X es cualquier paralelepípedo en $\mathbb{R}^n$ y si $0 \leq r < \frac{1}{k}$, existe una constante $M = M(\| \, \|, r, X, k)$, tal que

$$\int_X | p(\mathbf{x}) |^{-r} \, d\mathbf{x} \leq M \| p \|^{-r}, \tag{24}$$

para todo $p \in \mathcal{P}_k \setminus \{0\}$. ■

4. Continuidad

En esta sección demostramos que la integral

$$I_r(p) = \int_X | p(\mathbf{x}) |^{-r} \, d\mathbf{x}, \tag{25}$$

define una función continua de $p \in \mathcal{P}_k \backslash \{0\}$ para $0 \leq r < \frac{1}{k}$.

Para establecer la continuidad de $I_r(p)$ con respecto a p, usaremos el siguiente resultado

Lema 4

Sea X un espacio de medida finita. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones medibles en X que satisfacen

a) $f_n \longrightarrow 0$ salvo en un conjunto de medida cero.

b) existe una constante M tal que $\| f_n \|_s \leq M$ para todo n, donde $s > 1$.

Entonces

$$\lim_{n \to \infty} \| f_n \|_t = 0, \tag{26}$$

para todo t con $1 \leq t < s$.

Prueba:

La condición (a) garantiza la existencia para todo $\epsilon > 0$ de un conjunto medible $F = F(\epsilon)$ con medida $\mu(F) < \epsilon$ tal que la sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente a cero en $X \backslash F$.

Obsérvese que si $1 \leq t < s$ la desigualdad de Hölder da

$$\int_F | f_n |^t \, d\mu \leq \left[\int_F | f_n |^s \, d\mu \right]^{t/s} \left[\int_F d\mu \right]^{1-t/s}$$

$$\leq M^t \epsilon^{1-t/s}. \tag{27}$$

si se usan los exponentes $r_1 = s/t$ y $r_2 = \frac{s}{s-t}$.

Por lo tanto

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \left[\int_X | f_n |^t \, d\mu \right]^{1/t} = \overline{\lim_{n \to \infty}} \left[\int_{X \backslash F} | f_n |^t \, d\mu + \int_F | f_n |^t \, d\mu \right]^{1/t}$$

$$= \overline{\lim_{n \to \infty}} \left[\int_F | f_n |^t \, d\mu \right]^{1/t}$$

$$\leq M\epsilon^{1/t-1/s}$$

Pero ϵ es arbitrario y por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} \| f_n \|_t = 0,$$

para $1 \leq t < s$.■

Usando este resultado podemos probar el siguiente teorema

Teorema 3

Sea X un paralelepípedo de $\mathbb{R}^n$. Entonces para $0 \leq r < 1/k$ la aplicación $p \to p^{-1}$ de $\mathcal{P}_k\backslash\{0\}$ en $L^r(x)$ es continua.

Prueba:

Nótese que si $0 < s < 1/k$ y si $p \in \mathcal{P}_k\backslash\{0\}$ entonces p^{-1} pertenece en efecto a $L^s(X)$ pues la integral

$$I_s(p) = \int_X | p(\mathbf{x}) |^{-s} \, d\mathbf{x} \leq M \| p \|^{-s}$$

es finita. Aquí $\| \ \|$ es cualquier norma de $\mathcal{P}_k$.

Sea ahora $\{p_n\}$ una sucesión en $\mathcal{P}_k\backslash\{0\}$ que converge a $p \in \mathcal{P}_k\backslash\{0\}$.

Nótese que como los p_n se aproximan a p y $p \neq 0$, existe una constante $a > 0$ tal que $\| p_n \| \geq a$ para todo n.

Sea ahora r con $0 < r < s$. Entonces

$$\left[\int_X \left| \frac{1}{p_n} - \frac{1}{p} \right|^{r \cdot s/r} d\mathbf{x}\right] \leq \left[\int_X (| p_n |^{-s} + | p |^{-s}) d\mathbf{x}\right]^{r/s}$$

$$\leq [M(\| p_n \|^{s} + \| p \|^{-s})]^{r/s}$$

$$\leq (2Ma^{-s})^{r/s}. \tag{28}$$

Así, si usamos el lema con $f_n = | \frac{1}{p_n} - \frac{1}{p} |^r$, dado que las $\| f_n \|_{s/r}$ estan acotadas por (29), se deduce que $\| f_n \|_1 \to 0$ es decir,

$$\lim_{n\to\infty} \int_X \left| \frac{1}{p_n} - \frac{1}{p} \right|^r d\mathbf{x} = 0 \tag{29}$$

Esto se cumple para $0 < r < s$ y como $s < 1/k$ es arbitrario, para cualquier r con $0 < r < 1/k$. ■

Con la ayuda de este resultado se obtiene la continuidad de $I_r(p)$.

Teorema 4

Sea X un paralelepípedo de $\mathbb{R}^n$. Entonces para $0 < r < 1/k$ la función

$$I_r(p) = \int_X \mid p(\mathbf{x}) \mid^{-r} d\mathbf{x} \tag{30}$$

es continua con respecto a $p \in \mathcal{P}_k \backslash \{0\}$.

Prueba:

Sea $\{p_n\}$ una sucesión de $\mathcal{P}_k \backslash \{0\}$ que converge a $p \in \mathcal{P}_k \backslash \{0\}$.

Entonces

$$\mid I_r(p) - I_r(p_n) \mid = \mid \int_X [\mid p(\mathbf{x}) \mid^{-r} - \mid p_n(\mathbf{x}) \mid^{-r}] d\mathbf{x} \leq \int_X \mid p_n(\mathbf{x}) - p(\mathbf{x}) \mid^{-r} d\mathbf{x}$$

y como segun el teorema 3 la última integral tiende a cero, se deduce que

$$\lim_{n \to \infty} I_r(p_n) = I_r(p). \tag{31}$$

para $0 < r < 1/k$. ■

5. Referencias

[1] Pan, Y., Hardy, 1991 *Rev.Mat.Ibeoamericana* **7** 55-64.

[2] Ricci, F. y Stein, E.M., 1987 *J.Func.Anal.* **73** 179-194.

[3] Stein, E.M., 1986 *Oscillatory integrals in Fourier Analysis* Beijing Lectures in Harmonic Analysis 307-355.