Ciencia y Tecnología, 32(1): 25-30, 2016
ISSN: 0378-0524

DERIVACIÓN DE LAS ECUACIONES DE SCHRODINGER Y DIRAC DE LA ECUACIÓN DE HAMLTON-JACOBI

*L. Amoroso Rodríguez**

Sede Central del Pacífico, Universidad de Costa Rica

Recibido diciembre 2015; aceptado julio 2016

Abstract

The Schrödinger and Dirac equations of quantum mechanics are derived from the Hamilton-Jacobi equation. It was assumed that the action for a periodic process is such that can be represented as a complex periodic function.

Resumen

Las ecuaciones de Schrödinger y Dirac de la mecánica cuántica se derivan a partir de la ecuación de Hamilton-Jacobi. Se asumió que la acción para un proceso periódico es tal que se puede representar como una función periódica compleja.

Key words: Hamilton-Jacobi, Schrodinger, Dirac.

Palabras clave: Hamilton-Jacobi, Schrodinger, Dirac.

I. INTRODUCCIÓN

La ecuación de Schrödinger describe la evolución temporal de una partícula masiva no relativista en el contexto de la mecánica cuántica:

$$ih\frac{\partial\varphi}{\partial t} = -\frac{h^2}{2m}\nabla^2\varphi + V(r,t)\varphi \qquad (1)$$

El esquema conceptual utilizado por Schrödinger para derivar su ecuación en 1925, reposa sobre una analogía formal entre la óptica y la mecánica. Una vez establecido el paralelismo entre la óptica y la mecánica hamiltoniana, la derivación de la ecuación se hace a partir de la ecuación de onda satisfecha por la amplitud espacial de una onda monocromática.

Diferentes autores han propuesto cómo derivar la ecuación de onda de Schrödinger [1-3], pero sin derivar la ecuación de Dirac de la ecuación de Hamilton-Jacobi (H-J). Sin embargo la ecuación de onda de H-J debe contener no solo la ecuación de Schrödinger, sino también la ecuación de Dirac. Por lo tanto, debe existir un vínculo general entre estas ecuaciones y se propone que la acción para un proceso periódico es tal que se puede representar como una función periódica compleja.

* Autor para correspondencia: lazaroamoroso51@gmail.com

II. LA ECUACIÓN DE HAMILTON-JACOBI Y LA ECUACIÓN DE ONDA

El principio de mínima acción, establece que la derivada total de la acción respecto al tiempo es:

$$L(q_i, \dot{q}_i, t) = \frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial S}{\partial q_i}\, \dot{q}_i = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_i p_i\, \dot{q}_i \qquad (2)$$

$L(q_i, \dot{q}_i, t)$: Lagrangiana del sistema
q_i: Coordenada generalizada
$\dot{q}_i$: Velocidad generalizada
p_i: Impulso generalizado

La ecuación de Hamilton-Jacobi es

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -H(\, p, q, t) \qquad (3)$$

S: Acción del sistema

Por simplicidad vamos a suponer una sola coordenada x; la ecuación (2) se puede expresar como:

$$\frac{dS}{dt} = v\frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial t} \qquad (4)$$

v: velocidad en coordenadas cartesianas.

Consideremos la ecuación de onda, dependiente de la coordenada x y del tiempo t:

$$\frac{\partial^2 b}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 b}{\partial t^2} = 0 \qquad (5)$$

$b(x, t)$: función escalar componente de la onda

La ecuación (5) podemos escribirla en la forma:

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial b}{\partial x} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial}{\partial}\frac{\partial b}{\partial t} = 0 \qquad (6)$$

Definiendo una función f(x, t) tal que

$$f = v\frac{\partial b}{\partial x} = -\frac{\partial b}{\partial t} \qquad (7)$$

resulta que si v es constante

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial^2 b}{\partial t^2}$$
$$v\frac{\partial f}{\partial x} = v^2\frac{\partial^2 b}{\partial x^2}$$

La función f(x, t) permite escribir una ecuación diferencial de primer orden equivalente a la ecuación de onda en el vacío de la forma:

$$v\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \qquad (8)$$

cuya solución

$$f(x, t) = X(x).T(t\,) \qquad (9)$$

 Ciencia y Tecnología, 32(1): 25-30, 2016 - ISSN: 0378-0524

es de la forma:

$$f(x,t) = A_o e^{(\beta\frac{x}{v}-\beta t)} \qquad (10)$$

Para que esta solución se corresponda con la solución en forma de onda plana monocromática

$$\beta = i\omega = i\frac{2\pi}{T} \qquad (11)$$

La ecuación

$$\frac{dS}{dt} = v\frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial t} \qquad (12)$$

es formalmente análoga a la ecuación

$$v\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \qquad (13)$$

Para que sean iguales debe cumplirse que

$$\frac{dS}{dt} = 0 \qquad (14)$$

S(x, t) si se cumple (14) tendrá la forma

$$S = S_o e^{(\beta\frac{x}{v}-\beta t)} \qquad (15)$$

La condición $\frac{dS}{dt} = 0$ sugiere que S sea constante, y que la Lagrangiana sea nula L= 0, condición que convierte la ecuación (12) en la ecuación de H-J

$$v\frac{\partial S}{\partial x} = -\frac{\partial S}{\partial t} = H$$

La condición que S sea constante permite definir el invariante adiabático I [4] como la integral:

$$I = \frac{1}{2\pi}\oint p dq \qquad (16)$$

Para los sistemas en movimiento periódico la ecuación (16) representa el área comprendida dentro de la trayectoria de fase, que bien puede considerarse la acción reducida. Para un oscilador lineal

$$I = \frac{E}{\omega} \qquad o \qquad E = I\omega \qquad (17)$$

entonces,

$$S(x,t) = S_o e^{i\left(\frac{\omega x}{v}-\omega t\right)} \qquad (18)$$

La condición L= 0 siendo

$$L = T(q,\dot{q}) - U(q) \qquad (19)$$

implica que la energía cinética es igual a la energía potencial, pero en una onda plana monocromática toda la energía es cinética. La energía se propaga en paquetes, de forma análoga a una locomotora y sus vagones de carga: cada carga en un vagón es un paquete de carga, pero esta carga se desplaza de forma continua tirado por la locomotora, y no distribuida uniformemente en todo el espacio. Los osciladores producen energía de forma continua pero la onda la transporta en forma discreta. Podemos asumir al menos para una onda monocromática que

$$E = I\omega \qquad (20)$$

I no es un cuanto de acción, pero si toma un valor constante para cada onda.

Entonces de (11)

$$\beta = i\frac{E}{I} \qquad (21)$$

y la solución de la ecuación diferencial homogénea (12) es de la forma

$$S = S_o e^{\frac{i(p_x x - Et)}{I}} \qquad (22)$$
$$S = S_o e^{\frac{i(\vec{p}.\vec{r} - Et)}{I}}$$

La acción para una onda tiene que contener las características periódicas del movimiento, según la ecuación (22). Queda por indicar que dentro de la interpretación clásica, es la parte real de esta función la que describe y tiene sentido físico; entonces es necesario dar una interpretación al carácter complejo de la acción que asumiremos es la interpretación dada por M. Born para la función de onda de la mecánica cuántica: la magnitud

$$|S(x, y, z)|^2 dV$$

debe ser proporcional a la probabilidad de que la partícula se localice en el instante t en el elemento de volumen dV en torno del punto x, y, z. ¿Por qué? Porque es la acción del sistema físico: donde está la acción está la energía, donde está la energía debe estar la partícula.

III. DEDUCCIÓN DE LA ECUACIÓN DE SCHRODINGER A PARTIR DE LA ECUACIÓN DE HAMILTON-JACOBI

El carácter periódico y complejo para la acción permite introducir los operadores correspondientes en la ecuación de H-J.

La derivada parcial de S respecto al tiempo según (22) es

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\frac{i}{I}ES \qquad (23)$$

La segunda derivada de S respecto a la coordenada es

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = -\frac{1}{I^2}p_x^2 S$$

$$p_x^2 = -\frac{I^2}{S}\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \qquad (24)$$

Como la energía para una partícula libre es

$$E = \frac{P^2}{2m}$$

la ecuación (23) toma la forma

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\frac{i}{I}\frac{p_x^2}{2m}S \qquad (25)$$

$$iI\,\frac{\partial S}{\partial t} = -\frac{I^2}{2m}\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \qquad (26)$$

Considerando un espacio de tres dimensiones la ecuación (25) se expresa como

$$iI\,\frac{\partial S}{\partial t} = -\frac{I^2}{2m}\nabla^2 S$$

Introduciendo el operador de Hamilton:

$$\widehat{H} = -\frac{I^2}{2m}\nabla^2 = ih\frac{\partial}{\partial t}$$

Asumiendo I = ħ obtenemos la ecuación de Schrödinger en el espacio libre de interacciones como

$$i\hbar\,\frac{\partial S}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 - \widehat{H}S \qquad (27)$$

IV. ECUACIÓN DE DIRAC A PARTIR DE LA ECUACIÓN DE HAMILTON-JACOBI

La ecuación de Schrödinger contiene la derivada primera respecto del tiempo y las segundas derivadas respecto las coordenadas. En una generalización relativista de esta ecuación, la coordenada y el tiempo deben intervenir del mismo modo, como exige la invariancia relativista, es decir, deben figurar las derivadas primeras respecto de las coordenadas y del tiempo. El principio de superposición exige que la ecuación de onda relativista sea lineal.

La ecuación (3), es una ecuación lineal de primer orden en las coordenadas y el tiempo tal como exige la invariancia relativista y el principio de superposición. Consideremos la ecuación (3) en la forma

$$v\frac{\partial S}{\partial x} = -\frac{\partial S}{\partial t} = H \qquad (28)$$

Dado el carácter periódico de la acción y derivando respecto al tiempo

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{i}{I}ES = \frac{i}{I}v\,p_x\,S \qquad (29)$$

La ecuación (29) se puede escribir, considerando v = c y la función de Hamilton para el caso relativista

$$H = E = \sqrt{(pc)^2 + (mc^2)^2} = \boldsymbol{\alpha}.\boldsymbol{p}c + \beta mc^2 \qquad (30)$$

como

$$iI\frac{\partial S}{\partial t} = (\boldsymbol{\alpha}.\boldsymbol{p}c + \beta mc^2)S \qquad (31)$$

α, β: Matrices de Dirac

Considerando I = ħ y el operador de Hamilton

$$\widehat{H} = c\ \boldsymbol{\alpha}.\widehat{\boldsymbol{p}} + mc^2\beta \qquad (32)$$

obtenemos la ecuación de Dirac

$$i\hbar\frac{\partial S}{\partial t} = \widehat{H}S \qquad (33)$$

a cuyo efecto sería la ecuación de H-J en términos de operadores.

V. CONCLUSIONES

La ecuación de H-J

$$v\frac{\partial S}{\partial x} = -\frac{\partial S}{\partial t} = H \qquad (28)$$

el tiempo y las coordenadas espaciales se consideran variables. La ecuación de Schrödinger y Dirac imponen la condición de que sean operadores, lo cual se hace posible bajo el criterio de periodicidad de la acción que se propone. La ecuación (28) contiene la ecuación de Schrödinger y de Dirac en una expresión general que depende de la elección del operador de Hamilton, para nuestro caso

$$\xrightarrow{H-J} \frac{\partial S}{\partial t} = -H \xrightarrow{Schr-Dirac} ih\frac{\partial S}{\partial t} = -\widehat{H}S \qquad \widehat{H} = \begin{cases} -\dfrac{h^2}{2m}\nabla^2 \\ o \\ c\ \boldsymbol{\alpha}.\widehat{\boldsymbol{p}} + mc^2\beta \end{cases}$$

La acción del sistema como función compleja admite la definición dada por M. Born a la función de onda de la mecánica cuántica.

El carácter material de la dualidad onda-corpúsculo propuesta por Louis de Broglie, se valida con estos resultados mediante la identidad acción-función de onda.

Para todo tipo de onda, clásica o cuántica su energía se distribuye en forma de paquetes; el cuanto de acción I es inherente a todo movimiento periódico. La mecánica cuántica es una extensión de la mecánica clásica cuando I toma el valor de la constante de Planck; la realidad objetiva contiene la probabilidad como una forma de existencia.

VI. REFERENCIAS

1. Goldstein, H., Mecánica Clásica, ed. Revolucionaria: La Habana, 1963, pp 370-371
2. Rudra, P., Roman. J. Phys. (2011), 56(9–10), 1053–1056.
3. Field, J., Europ. J. Phys (2011), 32, 63–87.
4. Landau, L; Lifshitz, E., Curso abreviado de física teórica, vol. I ed. Mir: Moscu, 1973, pp 117-120
5. Levich, B., Física Teórica, vol. III, ed. Reverté S.A: 1974, pp 516-521