Ciencia y Tecnología, 34(2): 42-55, 2018
ISSN: 0378-0524

HERRAMIENTAS PARA DESENTRAÑAR LO QUE ABARCA LA NOCIÓN SIBILINA DE 'HABILIDAD DE APLICAR UN TEOREMA DADO'

Corine Castela [1‡].

[1‡]Laboratoire de Didactique André Revuz, Universidades de Artois, Paris 7, Paris-Est Créteil, Cergy Pontoise y Rouen, Francia.

Recibido: 20/Jun/2017; Aceptado: 17/Oct/2018

Abstract

In Costa Rica, as well as in France, it has become customary to include lists of abilities and/or competencies within the study plans. For instance, the ability to use a given theorem or concept to solve problems in various contexts. What is exactly the range of such an indeterminate objective? In which types of problems are the students supposed to use the considered mathematical piece of knowledge? Is it possible to define a scale of complexity, relevant to differentiate the problems, in order to design a problem solving progressive path and to evaluate students' learning. To deal with these issues, we propose tools from two theories developed in the French mathematics education field of researches, the Anthropological Theory of Didactics (Chevallard) and the theory of the Double Approach of students' and teachers' practices (Robert). We illustrate our propositions with examples from the unit about similitude and Thales theorem from the Costa Rica Grade 8 Mathematics Program.

Resumen

En Costa Rica, como en Francia, se ha desarrollado la tendencia a incluir en los programas de estudio una lista de habilidades y/o competencias. Se contemplan, entre otras, habilidades de usar tal concepto o tal teorema enseñado para resolver problemas en contextos variados. ¿Cuál es exactamente el alcance de tal propósito tan indeterminado? ¿En qué tipos de problemas se pretende emplear el conocimiento matemático? ¿Se puede definir una escala de complejidad que diferencie los problemas y sirva de base para la elaboración de un recorrido progresivo de resolución y evaluación de los estudiantes?
Para abordar estas preguntas, proponemos herramientas que desarrollaron dos líneas de la didáctica francesa de las matemáticas, la Teoría Antropológica de lo Didáctico (Chevallard) y la teoría del Enfoque Doble de las prácticas de estudiantes y docentes (Robert). Ilustramos la ponencia con la unidad sobre la semejanza y teorema de Thales en el Programa actual de Estudio de Matemáticas de Costa Rica.

Key words: mathematics; secondary study plans; task analyses; praxeology; studying process.

Palabras clave: matemáticas; programas de estudio de secundaria; análisis de tareas; praxeología; proceso de estudio.

I. INTRODUCCIÓN

En este texto, adoptamos una perspectiva de diseminación de los trabajos de didáctica de las matemáticas hacia los docentes, formadores de docentes y autores de manuales escolares. Queremos hacerlo de manera accesible al profesorado, sin desarrollos innecesarios, que sean de índole teórico o metodológico. Nuestra intención es proporcionar algunas herramientas sin presentar sus antecedentes en el campo de la ciencia didáctica, focalizamos en su funcionamiento concreto en el marco de la práctica docente.

Nos interesamos en un problema profesional que enfrentan los autores de manuales escolares y los docentes de matemáticas, tanto franceses como costarricenses, es decir describir el alcance de objetivos de aprendizaje que los programas de estudios definen en términos de habilidades (Costa Rica), competencias o capacidades (Francia) y diseñar un proceso de enseñanza para que los estudiantes realicen los aprendizajes esperados. Pretendemos proveer al profesorado de algunas herramientas didácticas para solucionar este

[1] Autor para correspondencia: corine.castela@univ-rouen.fr

problema profesional. Para ilustrar nuestras reflexiones y ubicarlas en el entorno costarricense, nos apoyamos en un extracto de una unidad de geometría de 8° Año (13-14 años):

Tabla 1. Extracto del programa de estudio 8° Año.

Conocimientos	Habilidades Específicas
Triángulos • Semejanza • Congruencias • Teorema de Thales	6-7. Identificar figuras semejantes [congruentes] en diferentes contextos. 8-9. Aplicar los criterios de semejanza [congruencia] LLL, LAL, AAA para determinar y probar la semejanza [congruencia] de triángulos. 10. Resolver problemas que involucren la semejanza o la congruencia de triángulos. 11. Utilizar software de geometría dinámica para visualizar propiedades relacionadas con la congruencia y semejanza de triángulos. 12. Aplicar el teorema de Thales en la resolución de problemas en diversos contextos.

Encontramos aquí la estructura recurrente de los programas costarricenses, los cuales se muestran dirigidos por el saber matemático. Nuevos saberes matemáticos aparecen en el apartado "Conocimientos": las relaciones de congruencia y semejanza, el teorema de Thales. Estos nuevos conceptos y teoremas permiten definir nuevas habilidades específicas en que intervienen o bien como objetos (6-7-8-9), o como herramientas (10-12). Cabe señalar una diferencia importante entre estas habilidades. En algunas de ellas (por ejemplo, la habilidad 8), se explicita un tipo de tareas (probar la semejanza) y una herramienta (criterios de semejanza) que los estudiantes deben aprender a emplear para solucionar estas tareas. Al contrario, en la habilidad 12, sí se precisa el teorema que los estudiantes deben aprender a emplear, no se dice en que tipos de problemas, ni cómo. A continuación, evidenciamos primero que el dominio de aplicación del teorema de Thales es muy extendido, dando así una idea del importante trabajo matemático que los autores de manuales escolares y los docentes tienen que cumplir para explicitar el contenido de una habilidad del segundo tipo. Después, enfocamos la atención en las habilidades de primer tipo, proveyendo de un estilo de análisis que permite diferenciar los ejercicios que remiten a la misma habilidad. Así proponemos a los docentes herramientas para diseñar un recorrido de resolución de problemas susceptible de favorecer el desarrollo de las habilidades de los estudiantes.

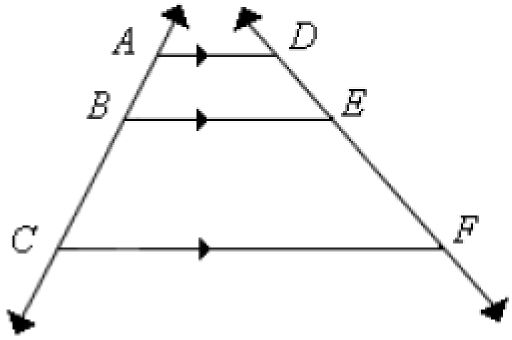
Las herramientas empleadas en esta ponencia provienen de dos teorías iniciadas por didácticos franceses de las matemáticas: la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD a continuación) de Yves Chevallard y el Enfoque Doble de las prácticas de estudiantes y docentes de Aline Robert y Janine Rogalski. Estas teorías enfocan la educación matemática desde dos puntos de vista muy diferentes, institucional para la primera, cognitiva para la segunda que se refiere a la teoría de la actividad. Sin embargo, ambas otorgan una importancia crucial al análisis matemático y epistemológico de los objetivos de enseñanza y aprendizaje, lo que justifica su asociación en esta ponencia. En el marco de este texto, no presentamos más detalles de estas teorías, suponiendo que no son necesarios para entender las herramientas que presentamos, preferimos otorgar más tiempo a una variedad de ejemplos de sus empleos.

II. SABER APLICAR EL TEOREMA DE THALES EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN DIVERSOS CONTEXTOS ¿QUÉ SIGNIFICA?

2.1 El entorno teórico próximo del teorema de Thales

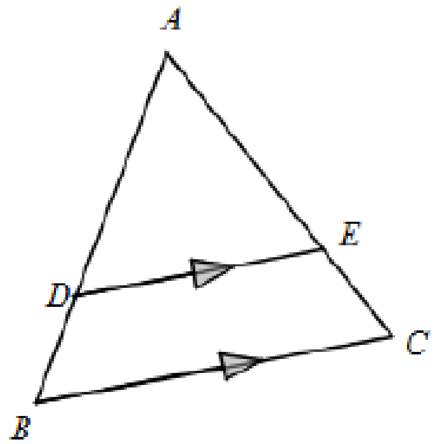
Primero, es menester esclarecer lo que se entiende bajo el nombre de ‘teorema de Thales’ y cuáles son sus corolarios inmediatos. En los manuales escolares costarricenses, se considera como teorema de Thales el resultado siguiente:

Tabla 2. Primer teorema de Thales.

Si dos rectas cualesquiera son cortadas por rectas paralelas distintas, los segmentos que determina en una de las rectas son proporcionales a los segmentos correspondientes de la otra. Entonces en la figura de la derecha se cumple, por ejemplo: $\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}, \frac{AB}{AC}=\frac{DE}{DF}$	 PIMAS, 8°, p. 72

Un primer derivado de este teorema se puede conocer también como teorema de Thales (es el caso en Francia donde el teorema previo no se enseña en la secundaria):

Tabla 3. Corolario 1 del teorema de Thales.

Los puntos A, D, B por una parte, A, E, C por otra están alineados y son distintos. Las rectas DE y BC[2] son paralelas. Se cumple: $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$ Este resultado no depende de la posición relativa de los puntos A, D y E sobre la recta AB. Lo mismo para A, E y C.	 PIMAS, 8°, p.77

Cabe destacar que la contraposición de este corolario permite probar que dos rectas se intersecan:

[2] Empleamos las notaciones que encontramos en los manuales de Costa Rica. En Francia la recta que pasa por los puntos A y B se nota (AB), AB representa la distancia entre A y B o la longitud del segmento notado [AB].

Los puntos A, D, B por una parte, y A, E, C por otra, son distintos y alineados.
Si $\frac{AD}{AB} \neq \frac{AE}{AC}$, entonces (DE) y (BC) se intersectan.

Dos otros coralarios[3] siguen del corolario 1:

Corolario 2

Los puntos A, D, B por una parte, y A, E, C por otra son distintos y alineados.
Si $\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}$, entonces DE//BC.

Corolario 3

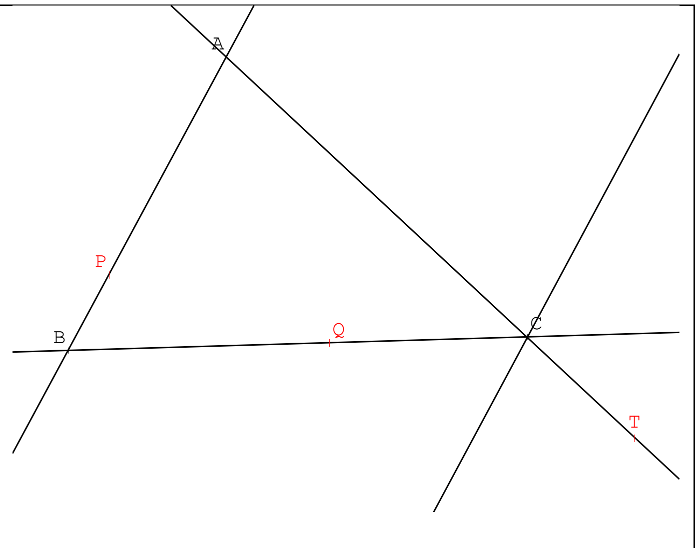
Los puntos A, D, B son distintos y alineados. E es un punto distinto de D, C un punto distinto de B, DE//BC. Si $\frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{BC}}$, entonces A, E y C están alineados.

Cabe subrayar que la prueba de todos estos resultados deriva del primer teorema de Thales (directamente para el corolario 1, que a su vez permite probar los otros dos), apoyado por las propiedades del paralelogramo. Es decir que se puede emplear este teorema, no solamente para calcular medidas de segmentos o demostrar igualdad de razones, sino también para probar que dos rectas son paralelas o no y que tres puntos están alineados.

2.2 Un problema perturbador

El problema siguiente pertenece al campo de los problemas que se pueden solucionar con el teorema de Thales. Prueba una parte del teorema de Menelaus.

Tabla 4. Enunciado de un problema perturbador.

ABC es un triángulo. Los puntos P, Q y T son respectivamente puntos de las rectas AB, BC y AC, distintos de los vértices A, B y C. $\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} \cdot \frac{\overline{QB}}{\overline{QC}} \cdot \frac{\overline{TC}}{\overline{TA}} = 1$ Mostrar que los puntos P, Q y T están alineados.	

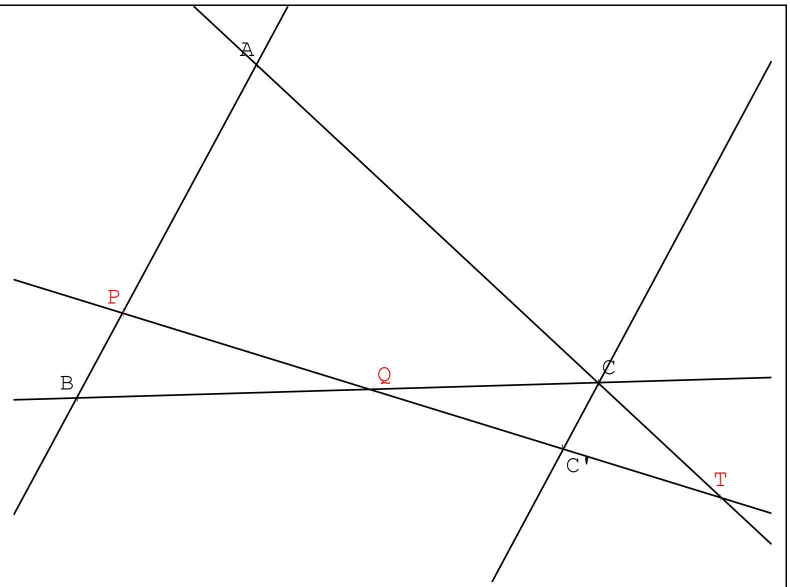
En mi experiencia de formadora de estudiantes-futuros docentes de matemáticas para la secundaria, la mayoría de los estudiantes no toman la iniciativa de intentar emplear el teorema de Thales para este problema. ¿Por qué? Faltan los objetos e hipótesis que permiten emplear el teorema: no hay paralelas. Además, faltan los tipos de tareas usualmente asociados al teorema en Francia puesto que, si se enseñan los corolarios 1 y 2 (9° año, 14-15 años) y la contraposición, nunca se presenta el corolario 3. Es decir, para estos estudiantes, el teorema de Thales no es una herramienta para problemas de alineamiento.

[3] Se trata aquí de lo que en francés se llama ‘rapport de mesures algébriques’. $\frac{\overline{AD}}{\overline{AC}}$ es un número real de valor absoluto $\frac{AD}{AB}$, de signo + si $\overrightarrow{AD}$ y $\overrightarrow{AB}$ tienen el mismo sentido, de signo – si no. En el corolario 2, la igualdad supone que los puntos A, D, B por una parte, y A, E, C por otra se presentan en el mismo orden sobre las rectas AB y AC.

Incluso con las indicaciones (Tabla 5) que introducen paralelas en el contexto, pocos estudiantes del profesorado logran alcanzar una solución. ¿Por qué? Como no conocen el coralario 3, tienen que reformular la propiedad de alineamiento, como se muestra a continuación:

Tabla 5. Una idea de la solución con el teorema de Thales.

<table>
<tr>
<td>C’ es el punto de la recta (PQ) con (CC’)//(AB).
Probar que T, C’ y P están alineados.

Una técnica clásica pero muy sutil para probar este alineamiento es mostrar que las rectas TC’ y AB se intersecan en un punto P’(contraposición)
y
mostrar que P’=P por que $\frac{\overline{AP\prime}}{\overline{AP}} = 1$, aplicando dos veces el corolario1.</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

¿Qué podemos concluir de este ejemplo? Que estudiantes con al menos tres años de licenciatura en matemáticas no han acabado de desarrollar la habilidad ‘Saber aplicar el teorema de Thales en la resolución de problemas en diversos contextos’. Que en su mayoría no han alcanzado el mayor nivel de maestría en el saber aplicar el teorema de Thales, es decir, saber emplearlo para demostrar una propiedad no clásicamente vinculada a este teorema, en un contexto sin los objetos que permiten aplicar el teorema. Evidentemente, los autores de los programas de estudio costarricenses no esperan que los estudiantes de 8° año alcancen este nivel de maestría. Es decir, se debe explicitar la extensión del campo de problemas en que se espera que los estudiantes sepan aplicar el teorema de Thales’, lo que constituye una tarea profesional que los textos oficiales dejan bajo la responsabilidad del profesorado. Tareas semejantes aparecen acerca de todas las habilidades del tipo ‘Saber emplear un teorema dado’. Presentamos ahora las nociones de ‘Organizaciones praxeológicas puntuales y locales’ de la TAD que permiten formular los objetivos de aprendizaje apuntados por los programas bajo la formulación ‘habilidades especificas’.

III. LAS ORGANIZACIONES PRAXEOLÓGICAS

Con la noción de praxeología, la TAD proporciona un modelo de las producciones cognitivas[4] institucionales que se pretende totalmente general, es decir válido para todos tipos de actividades humanas, todos dominios de conocimientos, en todos contextos sociales (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997; Chevallard, 1999). Este modelo se representa como [T, τ, Θ, Θ] y se compone de dos bloques:

- El saber-hacer o la *praxis* [T, τ], donde

T es un tipo de tareas, τ una técnica, es decir un conjunto de procedimientos (no necesariamente un algoritmo) que permite tratar ciertas tareas del tipo T (posiblemente no todas), en ciertos dispositivos y con ciertos medios.

- El saber o el *logos* [Θ, Θ], donde

[4] La palabra ‘cognitivo’ se emplea aquí en referencia con su etimología latina*: cognoscere*. Significa relativo al conocimiento. La formulación “producciones cognitivas institucionales” remite a los recursos inmateriales que producen y reconocen las instituciones. Sobre la noción de cognición institucional, véase Castela 2016, pp.13-14).

Θ representa la tecnología de τ, es decir el discurso racional que se elabora respecto a la técnica; entre otras funciones, la tecnología justifica que la técnica, cuando se puede emplear, produce el resultado esperado. La teoría Θ es la tecnología de la tecnología, en particular, garantiza la validez de la tecnología; no trabajamos aquí sobre esta componente.

Esta organización se refiere a un único tipo de tareas *T*, por eso, se llama **organización praxeológica puntual**. Cabe subrayar dos observaciones. En primer lugar, la parte [*T*, τ] destaca los aspectos invariantes en las tareas problemáticas que abordan los grupos humanos. En segundo lugar, una praxeología es una construcción institucional, es decir, cada componente depende de dicha institución. El fenómeno de transposición didáctica es una consecuencia de esta dependencia de la praxeología de la institución en que vive.

En lo anterior, encontramos distintos ejemplos de este nivel de organización. Por ejemplo:

Tabla 6. Explicitación matemática de una habilidad de primer tipo.

Tipo de tareas	Técnica	Tecnología
T: Probar que dos triángulos son semejantes	Elegir un criterio de semejanza Implementar la técnica asociada, es decir τ_a Calcular las razones de medidas de trazos homólogos para mostrar su igualdad τ_b (lo mismo con dos razones iguales y dos ángulos) τ_c (tres ángulos homólogos iguales)	Definición de semejanza y Criterio L-L-L Criterio L-A-L Criterio A-A-A

En nuestro análisis de la habilidad de segundo tipo, 'Saber emplear el teorema de Thales', encontramos cinco tipos de tareas, cada uno con una técnica derivando del entorno inmediato del teorema de Thales, es decir los corolarios 1, 2 y 3 y la contraposición. Tal organización praxeológica, en la cual una tecnología Θ sostiene varios bloques [T_i, τ_i] se llama **organización praxeológica local**.

Tabla 7. Explicitación matemática de una habilidad de segundo tipo.

Tipo de tareas	Técnica	Tecnología	Teoría
T_1: Calcular la medida de un segmento	τ_1		
T_2: Probar una igualdad de razones de medidas	τ_2	Θ:	
T_3: Probar que dos rectas se intersecan	τ_3	Teorema de Thales, Corolarios 1 y contraposición	Θ
T_4: Probar que dos rectas son paralelas	τ_4	Corolarios 2, 3	
T_5: Probar que tres puntos están alineados	τ_5		

Llegados a este punto de la ponencia, podemos dar una descripción de la primera fase de una técnica didáctica para el tipo de tareas profesionales Formular los objetivos de aprendizaje apuntados bajo la formulación 'Saber emplear un teorema dado'. Se trata:

- en primer lugar, de describir la organización praxeológica local que deriva de dicho teorema;

- en segundo lugar, de elegir los tipos de tareas, es decir, las praxeologías puntuales, que se toman como objetivos de aprendizaje,
- en tercer lugar, de decidir si se propone o no, de vez en cuando, una tarea de los otros tipos, lo que representa el mayor nivel de maestría en el saber aplicar el teorema de Thales.

Después de este trabajo, los objetivos de aprendizaje se describen en términos de praxeologías puntuales; la misión docente consiste en organizar un proceso de estudio para que, según el vocabulario de la TAD, los estudiantes incorporen estas nuevas praxeologías puntuales en su equipamiento praxeológico personal.

De la misma manera que en lo anterior indagamos el campo de problemas en que se emplea el teorema de Thales, nos interesamos a continuación en las tareas que remiten al mismo tipo *T.* Para diferenciarlas, empleamos un estilo de análisis minucioso desarrollado en el marco del Enfoque Doble (Robert y Rogalski, 2002; Vandebrouck, 2008).

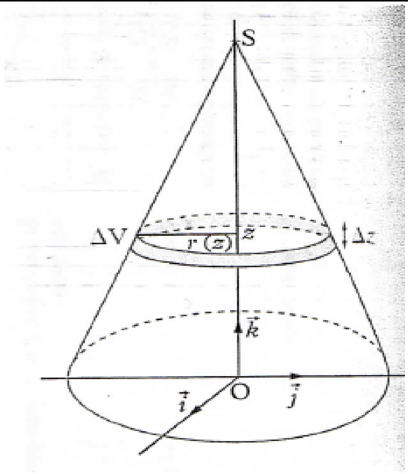
IV. DIFERENCIAR LOS USOS DE UNA TÉCNICA EN LA RESOLUCIÓN DE TAREAS DE UN MISMO TIPO

En este apartado ilustramos las herramientas que ofrece el Enfoque Doble (ED) con el ejemplo del tipo de tareas *T:* 'Probar que dos triángulos son semejantes' y la técnica que se presenta en la tabla 6.

4.1 Un primer ejemplo en un capítulo de cálculo integral

Se trata ahí de determinar la extensión del campo de problemas en que aparece una tarea del tipo *T*. El problema que estudiamos se encuentra en un manual escolar francés de secundaria (Math'x, Terminale S, p. 200), a nivel de 12° (bachillerato, 18 años), en la rama científica. El objetivo final es demostrar la fórmula del volumen de un cono circular recto empleando el cálculo integral. Nos focalizamos en la primera pregunta del enunciado.

Tabla 8. Encontrar el tipo *T* en un entorno de Cálculo.

	El dibujo representa un cono circular recto de vértice S, de altura h. R es el radio de la base. Se considera un sistema de coordenadas cartesianas (tres ejes ortogonales igualmente escalados) tal que las coordenadas de S sean (0, 0, h). z es un número real, entre 0 y h. La sección del cono por el plano pasando por el punto (0, 0, z) y paralelo al plano de la base es un circulo de radio $r(z)$. 1. Demostrar que $r(z) = R \cdot \frac{h-z}{h}$

Análisis de la tarea "Demostrar que $r(z) = R \cdot \frac{h-z}{h}$"

La tarea se puede identificar como un cálculo de la medida de un segmento (T_1-Tabla 7), a pesar de que se busca una relación literal; al transformar un poco la relación, se ve que se trata de lograr una igualdad de razones (T_2). Para estos tipos de tareas, los estudiantes franceses conocen varias técnicas que derivan de los teoremas de Pitágoras y de Thales, de los casos de semejanza, de la trigonometría y de la geometría analítica. En un contexto de Cálculo, no pueden apoyarse en el contrato didáctico para elegir una técnica: el contrato les dice que se debe emplear una integral para solucionar el problema, no orienta el trabajo geométrico. Para reconocer condiciones de empleo de casi todas técnicas, es menester extraer dos triángulos del esquema 3D que proveen de una situación de geometría plana. Una vez elegida la técnica asociada con la semejanza (la cual no es la única técnica eficaz), aparece la necesidad de probar que dos triángulos son semejantes, es decir, el tipo *T* que estaba completamente ausente del contexto inicial.

Análisis del empleo de la técnica para probar la semejanza y después mostrar $r(z) = R \cdot \frac{h-z}{h}$

Los estudiantes tienen que reconocer los triángulos supuestos semejantes y explicitar los vértices homólogos, lo que requiere nombrar estos puntos, elegir el criterio relevante (ahí A-A-A), demostrar dos igualdades angulares en un entorno 3D (ángulos rectos, ángulos de vértice S en las secciones planas del cono regular). Para escribir las consecuencias de la semejanza, se debe expresar las medidas conocidas en función de los parámetros, lo que supone reconocer *R*, manejar la notación funcional $r(z)$, entonces dos sentidos diferentes de los paréntesis, calcular la medida que falta (h-z). Por fin, la igualdad de razones $\frac{r(z)}{R} = \frac{h-z}{h}$ se debe transformar en $r(z) = R \cdot \frac{h-z}{h}$, lo que puede necesitar, si el estudiante emplea el producto cruzado, ciertos conocimientos sobre el cálculo literal (pasar de $r(z) = \frac{R\times(h-z)}{h}$ a la forma esperada).

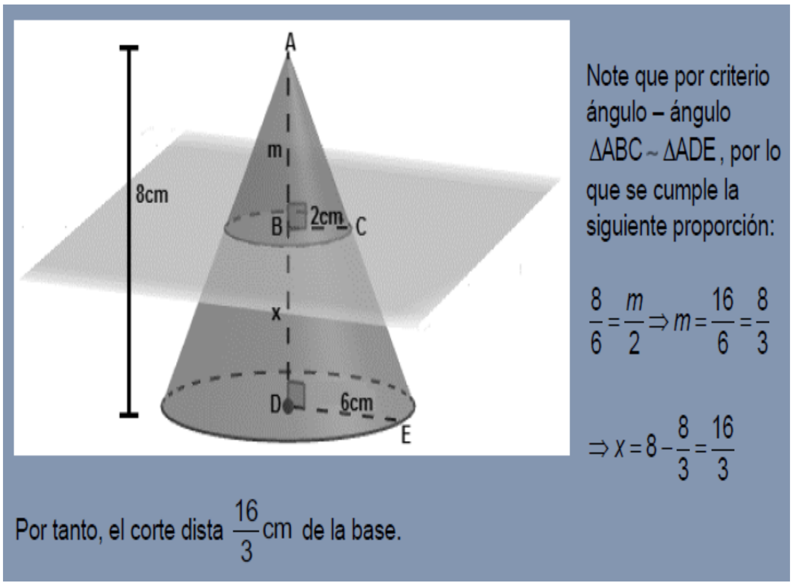
¿Se encuentran problemas semejantes en los manuales costarricenses?

El programa de Costa Rica no trata de cálculo integral. Por lo tanto, no encontramos exactamente este problema. Sin embargo, a nivel del undécimo año (16-17 años), el capítulo Visualización espacial del mismo programa se interesa en las secciones planas de un cono regular. Por ejemplo, el manual Lebombo propone en la parte ‘Tiempo para practicar' (p. 114) el trabajo siguiente:

Tabla 9. Encontrar el tipo *T* en un entorno de geometría espacial.

	Un cono invertido de altura 0,8m y generatriz 1m sirve como un contenedor de almacenamiento de agua. En su vértice tiene un orificio por donde se extrae el líquido. En un momento dado la altura que alcanza el agua dentro del cono es de 0,3m. Determine la medida del radio que se forma en ese instante.

Si consideramos este problema sin su entorno en el manual, podemos desarrollar un análisis muy cerca del análisis anterior, salvo que ahí falta la complejidad derivada del cálculo algebraico; al contrario, la ausencia de los triángulos relevantes en el esquema es una fuente de dificultad. Sin embargo, parece que, en los dos problemas, los estudiantes deben tomar, por si mismos, la iniciativa de emplear y probar la semejanza de triángulos. Pero, si ubicamos el enunciado de la tabla 9 en el entorno brindado por el manual Lebombo, vemos que los autores no esperan que los estudiantes asuman esta responsabilidad. De hecho, en la página 112, proponen la situación siguiente que les recuerda la praxeología puntual que tienen que emplear:



4.2 Criterios para diferenciar los problemas en que interviene una praxeología puntual [T, τ, Θ, Θ]

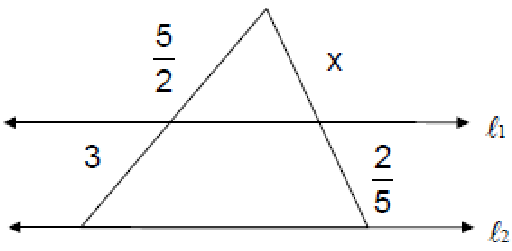
Primer criterio

Diferenciamos aquí dos categorías (Castela 2008):

- los problemas en que la convocación[5] de la praxeología relevante está bajo la responsabilidad de los estudiantes;
- los problemas que convocan la praxeología, es decir, proveen de indicaciones fuertes hacia el empleo de la técnica τ.

Como lo vimos con el ejemplo previo, el primer caso se encuentra cuando el tipo de tareas T está escondido en el problema inicial y/o cuando varias técnicas se conocen para este tipo. El segundo caso coincide con los enunciados que indican explícitamente el teorema que se debe emplear ("Empleando un criterio de semejanza, calcular la medida de …") o contienen elementos estrechamente vinculados con la técnica. Por ejemplo, el esquema siguiente se considera en Francia como un indicador que orienta hacia el teorema de Thales:

Figura 1. Una tarea que convoca el teorema de Thales (Lebombo 8°, p. 74).



Finalmente, el entorno mismo en que se plantea el problema puede orientar hacia la técnica. Según el contrato didáctico usual, el estudiante supone que un ejercicio propuesto en el marco de una unidad de enseñanza empleará las técnicas nuevas de la secuencia. Por lo tanto, plantear problemas de la primera

[5] Los trabajos del ED (Robert & Rogalski 2002, Vandebrouck 2008) introdujeron estas dos categorías, con un vocabulario diferente: para la primera categoría, hablan de conocimiento disponible; para la segunda, de conocimiento movilizable. Yo no empleo estas palabras que se parecen muy difíciles de identificar.

categoría supone generalmente esperar a fases ulteriores de la progresión. Es decir, el momento del trabajo de una técnica se prolonga más allá de la unidad donde se encuentra la praxeología por primera vez.

Segundo criterio: la presencia de adaptaciones de la técnica

Para analizar la complejidad de la implementación de una técnica en la solución de un problema, como lo hicimos con el ejemplo de la tabla 8, el ED (Robert y Rogalski, 2002; Vandebrouck, 2008) introduce la noción de adaptación de una técnica. Distinguen varios tipos de adaptaciones, es decir, de iniciativas que deben tomar los estudiantes para que la técnica sea eficaz en el problema:

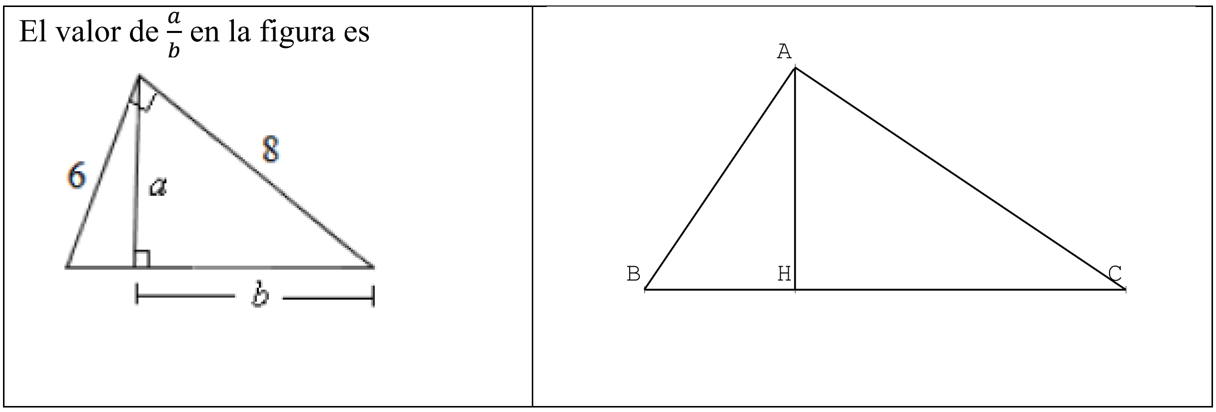
- A1 Identificar en el contexto las condiciones genéricas de empleo de la técnica como de validez de la tecnología.
- A2 Introducir nuevos objetos: puntos, letras, notaciones…
- A3 Cambiar de marcos (Douady 1987), de registros de representación (Duval 1993), etc.
- A4 Introducir etapas.
- A5 Emplear la técnica coordinándola con otras técnicas y otros saberes, nuevos o recientemente enseñados.
- A6 Coordinar con preguntas previas.

El empleo de la técnica se dice "sencillo" y aislado cuando no hay adaptación. Se trata de lo que se llama usualmente como una aplicación directa. ¿Por qué las comillas? Es que, al inicio del aprendizaje, estas tareas no son sencillas para ciertos estudiantes, quienes necesitan resolver primero algunas de estas tareas para que después, se vuelvan para ellos tareas sencillas.
Cabe señalar que esta lista de adaptaciones no proporciona un orden total en el conjunto de tareas de un tipo *T*, no proporciona una escala de dificultad, salvo quizás por el número de adaptaciones.

V. ILUSTRACIÓN DE LAS ADAPTACIONES CON UN EJERCICIO DEL CAPÍTULO 'SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS'

Analizamos a continuación un ejercicio (n°6, p. 100, figura izquierda de la Figura 2) propuesto por el manual costarricense PIMAS 8°, en la parte C. Aplicaciones de la semejanza, introducido por el comentario siguiente: "Algunos ejercicios se pueden resolver mediante semejanza de triángulos, aunque esta no aparezca como dato." (p. 95). Es decir que la convocación de la praxeología en que nos focalizamos en este apartado no está bajo la responsabilidad de los estudiantes. Sin embargo, el empleo de la técnica no es sencilla.

Figura 2. Un problema del capítulo Semejanzas de triángulos (PIMAS 8°)



Es necesario extraer de la figura una pareja de triángulos semejantes y relevantes para calcular a/b (A1). Ahí hay dos posibilidades, que no podemos identificar sin nombrar previamente los puntos (A2) como lo hacemos en la figura de derecha en la Figura 2. Los triángulos semejantes son ΔBHA y ΔAHC, o bien ΔAHC y ΔBAC.

Elegimos el primer caso. Se debe seleccionar el criterio de semejanza relevante y mostrar que sus hipótesis son verificadas, es decir, (A4) probar que $\widehat{HBA} = \widehat{HAC}$, lo que necesita convocar praxeologías del año séptimo (12-13 años) sobre la suma de las medidas de los ángulos interiores de un triángulo (criterio 1 para esta praxeología).

Cabe destacar que, si este problema se planteara en el capítulo 'Trigonometría' del año noveno (14-15 años), la praxeología ligada a la semejanza se convocaría bajo la responsabilidad del estudiante (criterio1).

Suponemos ahora que, como en muchos de los ejercicios de PIMAS, las medidas de los segmentos AB y AC sean números racionales (por ejemplo, 12 y $\frac{24}{5}$, p. 87) o expresiones literales ($\frac{4x}{5}$ y $\frac{6x}{5}$ p. 97). En tal caso hablamos de la adaptación A5. Por supuesto, esta transformación de la tarea aumenta el nivel de dificultad, respecto al enunciado inicial.

VI. PROPUESTA PARA UNA CARTOGRAFÍA DEL CAMPO DE TAREAS QUE INVOLUCRAN A UNA *PRAXIS* [*T*, T]

Nos apoyamos en los criterios que presentamos anteriormente para distinguir cuatro zonas en el campo de tareas en las cuales se emplea la técnica de una praxeología puntual:

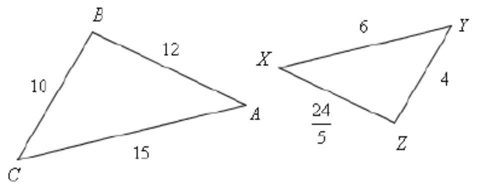
- Zona A: empleo sencillo y aislado de la técnica
- Zona B: empleo con adaptaciones, pero la praxeología al estudio solo se asocia con praxeologías antiguamente enseñadas.
- Zona B*: empleo con por lo menos, la adaptación A5, es decir, las tareas involucran praxeologías recientemente enseñadas, que los estudiantes aún no dominan.
- Zona C: entre otras adaptaciones, la responsabilidad de convocar [T, τ] incumbe a los estudiantes.

La referencia a una cartografía toma en cuenta el hecho que esta descripción no proporciona una escala de niveles de dificultad. Por supuesto, la zona A abarca las tareas más sencillas, para una primera iniciación. Pero, en cada una de las otras zonas, se encuentra una variedad de complejidad, según el número de adaptaciones. Por eso, se puede que una tarea de las zonas B* o C sea más fácil que una de la zona B, en que es menester introducir varios objetos y varias etapas de razonamiento. Al contrario, avanzamos que, entre tres tareas con una única adaptación, resulta más difícil para el estudiante convocar por sí mismo la técnica (Zona C) que emplearla con un otro conocimiento nuevo (Zona B*), lo que a su vez es más difícil que una tarea de la zona B con una adaptación.

Hasta ahora encontramos ejercicios de las zonas B (Tabla 10, si se consideran las praxeologías angulares del 7° -13-14 años- como bien conocidas) y C (Tabla 9). Nos proponemos ahora indagar un poco la zona A, a partir de un ejercicio que el manual PIMAS 8° proporciona como ejemplo de aplicación del criterio LLL (p. 87), inmediatamente después de la presentación del criterio.

Tabla 10. Aplicación del criterio LLL (PIMAS 8°).

EJEMPLO 6. Compare $\Delta ABC \ \square \ \Delta XZY$



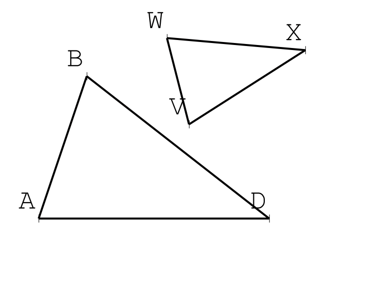
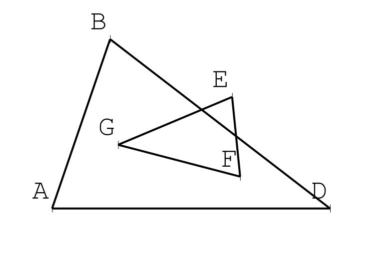
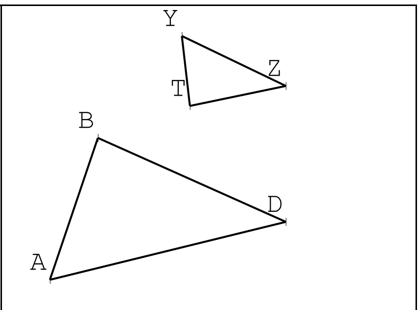
Las razones que dan los lados correspondientes son:

$$\frac{AB}{XZ} = \frac{12}{\frac{24}{5}} = \frac{\cancel{12} \cdot 5}{\underbrace{\cancel{24}}_{2}} = \frac{5}{2} \quad , \quad \frac{BC}{ZY} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

$$\frac{CA}{YX} = \frac{15}{6} = \frac{5}{2}$$

Como lo evidencia la solución propuesta en el manual, este ejercicio pertenece a la Zona B*, porque involucra cálculos con racionales, los cuales resultan difíciles por los estudiantes de este nivel escolar. Los enunciados siguientes se inspiran de la tabla 11 pero con medidas enteras.

Tabla 11. Aplicaciones sencillas y aisladas del criterio LLL.

		
AB = 16, AD = 20, BD = 18 VW = 8, WX = 9, VX = 10	AB = 28, BD = 44, AD = 52 GE = 13, GF = 11, EF = 7	AB = 16, AD = 20, BD = 18 TZ = 9, TY = 8, YZ = 10
Empleando el criterio LLL, probar que		
ΔABD ~ΔVWX	ΔABD ~ΔEGF	ΔABD ~ΔYTZ

Aquí el trabajo no incluye cálculos complejos. Se trata para los estudiantes de interpretar la notación simbólica de semejanza, aplicar el criterio cambiando de letras y de posición relativa de los triángulos (se superponen o no, son directamente o indirectamente semejantes). Estos ejemplos pertenecen a la Zona A y corresponden a una primera iniciación. En el manual Lebombo, encontramos un enunciado muy parecido al ejemplo de la derecha (Tiempo para practicar, p. 66), salvo que los estudiantes deben determinar el triángulo semejante al triángulo ABC, es decir, determinar los puntos homólogos, en este contexto de semejanza indirecta. Eso representa una adaptación de la técnica, por lo que ubicamos este ejercicio en la Zona B.

Lo que encontramos en los manuales costarricenses que nos sirven de base para la preparación de esta ponencia es un fenómeno que evidencia también la formación docente, es decir, la tendencia a considerar que los ejercicios de la Zona A no son útiles o bien a subestimar la dificultad que deriva de la presencia de una adaptación, de lo que resulta iniciar el proceso de aprendizaje directamente en la Zona B.

De la misma manera que la noción de organización praxeológica local permite explicitar los objetivos de aprendizaje apuntados bajo la formulación 'Saber emplear tal teorema', la cartografía del campo de tareas que involucran a una *praxis* [*T*, τ] ofrece a su vez una herramienta para formular el alcance de una habilidad del primer tipo, es decir, del 'Saber tratar un tipo de tareas dado *T* con una técnica dada τ'. A falta de precisiones en los programas oficiales, el profesorado tiene que indagar las cuestiones siguientes que formulamos con referencia a la habilidad 'Saber aplicar los criterios de semejanza para probar la semejanza de triángulos' de 8°:

- Se espera que ¿al final del 8° año, los estudiantes emplean esta técnica bajo su responsabilidad completa? ¿al final del ciclo III? ¿del ciclo IV?

Para cada nivel,

- ¿se espera que los estudiantes tengan que adaptar la técnica?
- ¿En qué contextos nuevos se cuenta que se empleará la técnica (números reales, ecuación, función, variación, espacio, física…)?

La fase siguiente del trabajo docente, específicamente de los autores de manuales, consiste en constituir un conjunto de ejercicios y problemas de las cuatro zonas, incluso de la zona A. Cabe recordar que, por efecto de contrato didáctico, los problemas de la Zona C no se pueden encontrar dentro del capítulo de estudio de la *praxis* [*T*, τ], sino en situaciones específicas de resolución de problemas, por ejemplo, de modelación, o bien en capítulos ulteriores, es decir, con conocimientos nuevos. Sin embargo, un recorrido rápido de los manuales Lebombo y PIMAS arroja la ausencia casi absoluta de problemas que involucran congruencia o semejanza en los capítulos que siguen el estudio de estas praxeologías, incluso cuando se trata de pirámides y prismas. Es decir, los estudiantes no encaran problemas de la zona C antes del noveno año. Al contrario, las praxeologías angulares de 7° año intervienen bajo la responsabilidad de los estudiantes en los problemas de congruencia y semejanza de triángulos; la zona C para estas praxeologías está presente en el 8° año, ¿empieza o no en el 7° año?

VII. CONCLUSIÓN

Organizar la construcción de una habilidad por los estudiantes, la responsabilidad de cada docente

Para concluir, nos interesamos en el trabajo de los docentes, cuya responsabilidad es hacer que sus estudiantes adquieran una habilidad del primer tipo o, según el vocabulario de la TAD, que incorporen una nueva praxeología puntual en su equipamiento praxeológico personal.

Chevallard (1999), Bosch, Espinoza y Gascón (2003) proponen una organización del proceso de estudio de una organización praxeológica matemática O que se descompone en seis momentos: el momento $M1$ del primer encuentro con O, generalmente a través de al menos un tipo de tareas T de O ; el momento $M2$ de la exploración de T y de la elaboración de una técnica τ para las tareas de T; el momento $M3$ de la constitución del entorno tecnológico-teórico relativo a τ; el momento $M4$ del trabajo de la técnica en que se amplían los especímenes de problemas considerados por los estudiantes, lo que provoca variaciones de la técnica; el momento $M5$ de la institucionalización; el momento $M6$ de la evaluación en que se evalúa la eficacia intrínseca de la técnica respecto a las tareas de T como también su empleo por los estudiantes. Estos momentos son partes de la organización didáctica que corresponde al objetivo de incorporar la praxeología O al equipamiento praxeológico de los estudiantes. Para prescindir de interpretaciones erróneas, es importante hacer hincapié en la estructura no lineal del proceso de estudio. Lo esencial no es el orden: cada momento puede ser vivido con distintas intensidades, en diversos tiempos, tantas veces como se necesite a lo largo del proceso de estudio e incluso es habitual que algunos de ellos aparezcan simultáneamente.

En los programas de estudio de Costa Rica (Ministerio de Educación Pública, 2012, p. 41), se sugiere organizar las lecciones en dos etapas: etapa 1, el aprendizaje de conocimientos; etapa 2, la movilización y aplicación de los conocimientos. De la descripción que estos programas dan de estas etapas en las páginas siguientes, inferimos que la etapa 1 corresponde a los momentos 1, 2, 3 y 5, la etapa 2 a los momentos 4 y 6 con algunos retornos al momento tecnológico-teórico. Nos focalizamos para finalizar esta ponencia en el momento 4, suponiendo que la habilidad en su extensión plena, se construye mediante un recorrido de ejercicios de complejidad diversificada. El trabajo inicial se apoya en tareas de la Zona A y en las más fáciles de la Zona B (es decir, con un número limitado de adaptaciones y que solo involucran otros conocimientos familiares), pero continua con un recorrido no lineal de problemas de las cuatro zonas, con un número variable de adaptaciones, y sin olvidar la Zona C. Que los estudiantes encaren efectivamente esta variedad de problemas depende del docente en dos niveles (Robert y Rogalski, 2002): primeramente, de su selección de tareas propuestas, luego, de su gestión del trabajo estudiantil. De hecho, a través de sus intervenciones, el docente puede trasformar una tarea con muchas adaptaciones en una tarea sencilla. Las investigaciones del Enfoque Doble han documentado sólidamente la frecuencia de este comportamiento docente en las clases francesas de matemáticas. Se evidenció también que es más eficaz para los estudiantes buscar en grupos un número limitado de ejercicios más difíciles que solucionar muchos ejercicios con pocas adaptaciones, muy similares entre sí: evaluados sobre la resolución de tareas de nivel de complejidad baja, los primeros estudiantes son más exitosos que los segundos (vea la contribución de J. Horoks, pp.159-178 in Vandebrouck 2008).

Para concluir, destacamos que, en nuestro parecer, es menester que las herramientas presentadas en esta ponencia formen parte de la formación docente. Son útiles, no solamente para orientar la selección de problemas que proponen los manuales escolares, sino también para sostener el trabajo docente de organización de la actividad de sus estudiantes: elegir las tareas a partir de un análisis preciso de su contribución al estudio de la praxeología (construcción de la habilidad), manejar en el aula el trabajo estudiantil de resolución con un sistema de indicaciones que no destruya completamente el interés formador del ejercicio, concebir evaluaciones con una conciencia acertada del nivel de complejidad de las tareas que las componen.

VIII. REFERENCIAS

Bosch, M.; Espinoza, L. & Gascón, J. (2003) "El profesor como director del proceso de estudios: análisis de organizaciones didácticas espontáneas", *Recherches en Didactique des Mathématiques* 23(1): 79-136.

Castela, C. (2016) "Cuando las praxeologías viajan de una institución a otra: una aproximación epistemológica del "boundary crossing"", *Revista Educación Matemática* 28(2): 8-29.

Castela, C. (2008) "Travailler avec, travailler sur la notion de praxéologie mathématique pour décrire les besoins d'apprentissage ignorés par les institutions d'enseignement", *Recherches en Didactique des Mathématiques 28*(2) : 135-182.

Chevallard, Y.; Bosch, M.; Gascón, J. (1997) *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. Barcelona: ICE/Horsori.

Chevallard, Y. (1999) "L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique", *Recherches en Didactique des Mathématiques* 19(2) : 221-266.

Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (2012). *Programas de Estudio Matemáticas. Educación General Básica y Ciclo Diversificado*. Costa Rica. Descargado de http://www.mep.go.cr/sites/default/files/programadeestudio/programas/matematica.pdf

Douady, R. (1987) "Jeux de cadres et dialectique outil-objet", *Recherches en Didactique des Mathématiques* 7(2) : 5-31.

Duval, R. (1993) "Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée », *Annales de Didactique et de Cciences cognitives* 5 : 37-65.

Robert A. ; Rogalski M. (2002) "Comment peuvent varier les activités mathématiques des élèves sur des exercices – le double travail de l'enseignant sur les énoncés et sur la gestion en classe", *Petit ,* 60 : 6-25. Recuperado de http://www-irem.ujf-grenoble.fr/spip/spip.php?rubrique25&num=60

Vandebrouck, F. (Ed.) (2008) *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques enseignantes*. Toulouse: Octarès Editions. Translation in English: (2013). *Mathematics classroom: students' activities and teacher's practices.* Université Paris Diderot. Rotterdam: Sense Publisher.

Manuales escolares

Matemática Octavo Nivel (2015), Edición Lebombo
Matemática 8°: Desarrollando habilidades. Segunda edición (2016). Edición PIMAS.
Mathématiques. Terminale S (2006). Collection Math'x. Editions Didier.