

# MODELO ELECTROMAGNÉTICO PARA LVRPA EN EL PROCESO FOTOCATALÍTICO.

German Ramos<sup>1\*</sup>, Astrid Bolivar<sup>2\*</sup>, Elizabeth Ayala<sup>3</sup>.

<sup>1</sup> Universidad Cooperativa de Colombia.

<sup>2</sup> Fundación Universitaria Compensar.

<sup>3</sup> Fundación Universitaria Compensar.

*Recibido noviembre 2020; aceptado diciembre 2020*

## Abstract

An electromagnetic model for the determination of the photon absorption speed was developed based on the electrical and magnetic characteristics of the medium (Ramos & Velásquez, 2017), considering phase factors and attenuation of the suspension to be treated. The model is presented as a new alternative for photocatalytic processes and with a view to scalability of the process from the laboratory to the industry. For this purpose, the permittivity, permeability and conductivity of the suspension were experimentally evaluated. The six fluxes model was used to simulate photon absorption. Approximations were made in relation to the conductivity of the participating medium, in order to obtain models that allow establishing the scaling of the process at an industrial level.

## Resumen

Un modelo electromagnético para la determinación de la velocidad de absorción fotónica, se desarrolló en función de las características eléctricas y magnéticas del medio (Ramos y Velásquez, 2017), considerando factores de fase y atenuación de la suspensión a tratar. Dicho modelo se presenta como una alternativa nueva para los procesos fotocatalíticos y con miras a la escalabilidad del proceso del laboratorio a la industria. Para tal fin se evaluó experimentalmente la permitividad, permeabilidad y conductividad de la suspensión. Se empleó el modelo de seis flujos para simular la absorción fotónica. Se realizaron aproximaciones en relación con la conductividad del medio participante, para poder obtener modelos que permitan establecer el escalado del proceso a nivel industrial.

**Key words:** photocatalysis, attenuation factor, phase factor.

**Palabras clave:** Fotocatálisis, Factor de Atenuación, Factor de Fase.

## I. INTRODUCCIÓN

En los últimos años se ha producido un creciente interés por el desarrollo de nuevos métodos que conduzcan a la destrucción de determinados contaminantes del agua o del aire. Uno de los procesos que ha recibido mayor atención, es el basado en la acción de la radiación ultravioleta sobre partículas sólidas de un semiconductor (generalmente, dióxido de titanio). La acción combinada de la radiación UV y el fotocatalizador, en presencia de un oxidante (por ejemplo, aire, oxígeno u ozono), permite la transformación de los compuestos orgánicos presentes en el agua contaminada en productos no tóxicos, principalmente agua y dióxido de carbono (mineralización del contaminante).

El rendimiento cuántico se puede determinar cuándo las distribuciones espaciales y direccionales de intensidades de radiación se conocen en la suspensión, resolviendo en parte el problema de la velocidad de reacción. Esta relación es descrita mediante la velocidad de absorción local de fotones (LVRPA) que representa la distribución espacial o disponibilidad fotónica en el reactor. Las ondas electromagnéticas (fotones) que son las encargadas del proceso de activación del catalizador cuando penetran en el medio, son dispersadas, absorbidas y reflejadas por la suspensión. La descripción de este complejo proceso se realiza mediante un modelo físico matemático, al que se le conoce como ecuación de transferencia radiativa (ETR).

---

\* Autor para correspondencia: german.ramos@campusucc.edu.co

El objetivo del presente escrito, es la determinación de la velocidad de absorción fotónica con miras a la escalabilidad del proceso fotocatalítico a la industria. Para tal fin se realiza un análisis de las formas de afrontar el cálculo de la LVRPA.

MODELO DE DOS FLUJOS (TFM)

Cuando un fotón choca contra una partícula sólida opaca, puede ser absorbido o dispersado en varias direcciones (Brucatto y Rizzuti, 1997). Si la partícula es opaca y su superficie una esfera la dispersión es difusa, la probabilidad  $\Phi(\varphi)$  de ser disperso en una dirección que forma un ángulo de  $\varphi$  con la dirección incidente(Howell y Siegel, 1992), está dada por Ec. 1

$$\Phi(\varphi) = \frac{8}{3\pi} \{sen(\varphi) - \varphi cos(\varphi)\} \tag{2}$$

MODELO DE SEIS FLUJOS (SFM)

Con el fin de superar las limitaciones observadas en el TFM, fue creado un nuevo modelo, en éste se supone que los fotones serán dispersados en cualquiera de las seis direcciones principales con respecto a la radiación entrante ver Figura 1 y se consideran sus seis flujos (Brucatto, Cassano y Grisafi, 1959).

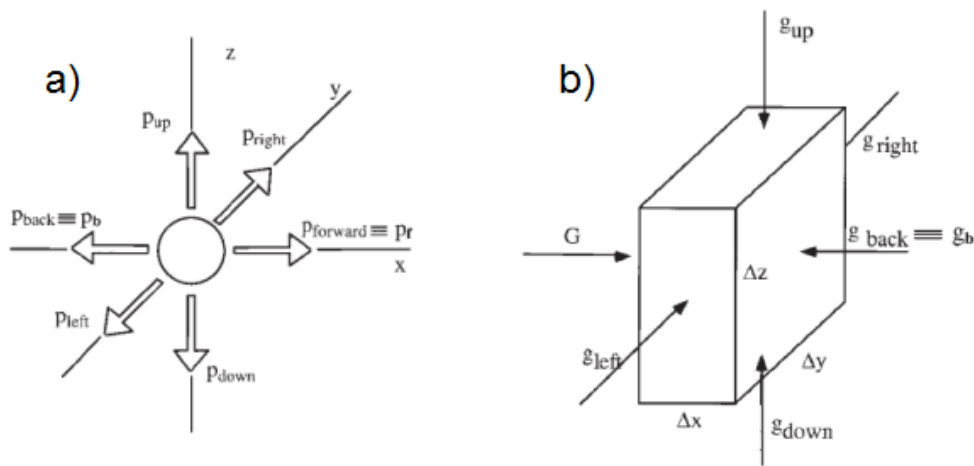


Figura 1. a). Representación de flujos dispersados en las seis direcciones (SFM) respecto a la partícula. b) Modelo diferencial para el balance de energía radiante (Brucatto, Cassano y Grisafi, 1959).

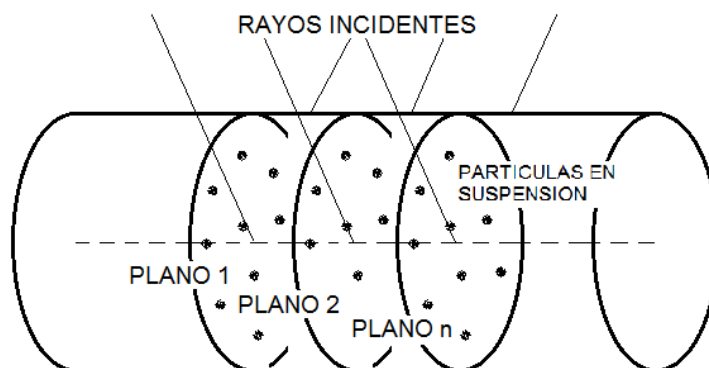
II. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

FORMULACIÓN DEL MODELO DE LVRPA

Se utilizó el enfoque de seis flujos SFM para la elaboración del modelo de la LVRPA (Local Volumetric Rate Photonic Absorption) propuesto. Utilizando la teoría electromagnética se presentó una forma de establecer la LVRPA a partir de las características del medio y de la frecuencia de los rayos incidentes sobre el medio participante, los cuales corresponden a los rayos reflejados por la superficie reflectante del colector.

Con el fin de delimitar el estudio, (ver Figura 2), se realizaron las siguientes simplificaciones para llegar al modelo:

1. Sistema de coordenadas cilíndricas, describen de la mejor manera el comportamiento de los rayos reflejados por el colector, sobre el tubo cilíndrico de vidrio por el que discurre la suspensión.
2. La dirección de incidencia de los rayos es radial respecto al sistema de coordenadas cilíndrico propuesto ver Figura 2.
3. Existen  $n$  planos con la misma forma de distribución de partículas.
4. Los rayos incidentes serán reflejados con un ángulo  $\theta$  respecto a la dirección radial.
5. El catalizador absorbe toda la radiación local, debido a esto se hace necesario calcular el factor de atenuación de las ondas electromagnéticas en el medio.
6. No hay emisión por el sistema heterogéneo



**Figura 2.** Representación de los planos en el reactor cilíndrico. Rayos incidentes radiales y distribución del TiO<sub>2</sub> en suspensión

El procedimiento para la obtención del modelo se describe a continuación:

1. Elección de los modelos de flujos: El modelo de flujos representa una manera de describir la forma en cómo los fotones interactúan con la suspensión. El flujo de fotones fue modelado suponiendo que los fotones interactuando con el medio, presentaban solamente dos direcciones posibles de dispersión (adelante–atrás). El modelo de seis flujos representa el modelo de dos flujos llevado a tres coordenadas rectangulares de tal manera que existirían seis posibles direcciones de dispersión (seis flujos). Este hecho establece la posibilidad de tener el modelo de seis flujos ya no en coordenadas cartesianas sino en coordenadas cilíndricas.
2. Sustituto de la derivación: Se presentó un desarrollo matemático para establecer el sustituto adecuado a la derivación total (tasa de cambio en una dimensión). Se estableció que el sustituto adecuado para la derivada unidimensional es la divergencia.
3. Modelo propuesto: Los modelos de dos y seis flujos representan aproximaciones de cómo los fotones interactúan con el medio. Se propuso entonces que el flujo de fotones por unidad de área que impactan la partícula debe ser proporcional a la cantidad de fotones que penetran la suspensión.
4. Solución de la ecuación propuesta: Tomando la divergencia en coordenadas cilíndricas se solucionó la ecuación diferencial parcial utilizando el método de separación de variables de Fourier, donde apareció una constante (dependiente de las condiciones iniciales) y un valor propio (dependiente de las condiciones de frontera), las cuales debieron ser determinadas para la obtención del modelo electromagnético propuesto, que a todas luces representa una nueva forma de afrontar el problema.
5. Determinación de las constantes: Para determinar las constantes se aplicaron los conceptos de factor de atenuación, fase y de propagación, en un medio en donde la densidad o distribución de cargas no es significativa. Los factores de atenuación y fase están relacionados con las constantes.
6. Para delimitar el modelo se realizaron las consideraciones para los cuales, el medio presenta conductividad cero, conductividad pequeña (pero no despreciable) y conductividad alta.

### MODELO PROPUESTO PARA EL CÁLCULO DE LA LVRPA

Considérese un campo vectorial en  $\mathbb{R}^3$ , es decir

$$U(x, y, z) = u(x, y, z)\hat{e}_1 + v(x, y, z)\hat{e}_2 + w(x, y, z)\hat{e}_3 \quad (2)$$

En donde los vectores  $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$  son una base canónica en un sistema de coordenadas curvilíneas ortogonales (Spiegel, 1959).

Supóngase que  $U$  es un campo de fuerza. Supóngase además que  $\Omega$  es una región acotada de  $\mathbb{R}^3$  y adicionalmente la regularidad de la función  $U$  de  $\mathbb{R}^3$  en  $\mathbb{R}^3$  que define el campo. Esto quiere decir que  $U \in C^1(\mathbb{R}^3)$ , lo que significa que  $U$  y sus derivadas de primer orden son continuas.

Aplicando el teorema de Taylor, se tiene en la Ec. 2 que

$$U(\vec{x} + \vec{h}) = U(\vec{x}) + J_z U(\vec{x})\vec{h} + o(|\vec{h}|^2)$$

En donde  $\vec{x} = (x, y, z)$ ,  $\vec{h} = (h_1, h_2, h_3)$  y  $J_{\vec{z}}U(\vec{x})$  es el Jacobiano de  $U$  en el punto  $\vec{x}$ . Si  $\vec{h} \rightarrow 0$  se puede tomar a  $U(\vec{x}) + J_{\vec{z}}U(\vec{x})\vec{h}$  como el valor aproximado de  $U(\vec{x} + \vec{h})$ .

$U(\vec{x})$  Representa una translación, en tanto que  $J_{\vec{z}}U(\vec{x})\vec{h}$  se escribe como

$$J_{\vec{z}}U(\vec{x})\vec{h} = \begin{pmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} \equiv A\vec{h}$$

Considerando la parte simétrica y antisimétrica de A es decir,

$$D = \frac{1}{2}(A + A^t) \quad y \quad R = \frac{1}{2}(A - A^t)$$

El valor aproximado de  $U(\vec{x} + \vec{h})$  se puede expresar como

$$U(\vec{x}) = D\vec{h} + R\vec{h}$$

Además

$$D = \begin{pmatrix} u_x & \frac{1}{2}(u_y + v_x) & \frac{1}{2}(u_z + w_x) \\ \frac{1}{2}(u_y + v_x) & v_y & \frac{1}{2}(v_z + w_y) \\ \frac{1}{2}(u_z + w_x) & \frac{1}{2}(v_z + w_y) & w_z \end{pmatrix}$$

Por tanto

$$Traza(D) = \nabla \cdot U$$

Al aplicar un cambio de coordenadas curvilíneas ortogonales se puede cambiar la matriz D en una matriz diagonal  $\tilde{D}$  de la forma

$$\tilde{D} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix}$$

y se tiene que  $Traza(D) = \nabla \cdot U$ , puesto que la *Traza* es un invariante bajo la transformación de coordenadas curvilíneas ortogonales. Los valores  $d_i$  están relacionados con los factores de escala propios de cada sistema de coordenadas.

Así pues,  $D\vec{h}$  se interpreta de la siguiente manera. Sea  $P_0$  un paralelepípedo y  $P(t)$  la evolución de  $P_0$  en el tiempo  $t$  es decir, si  $\vec{h}(t) = (h_1(t), h_2(t), h_3(t))^t$  son los lados de  $P(t)$  y  $\vec{h}_0 = (h_{01}, h_{02}, h_{03})^t$  los lados de  $P_0$  se verifica

$$\begin{cases} \frac{d\vec{h}}{dt}(t) = D\vec{h}(t) \\ \vec{h}(0) = \vec{h}_0 \end{cases}$$

Los  $\tilde{h}_i, i = 1,2,3$  los transformados de los  $h_i$  factores de escala de la transformación de coordenadas curvilíneas ortogonales.

$$\frac{d\tilde{h}_i(t)}{dt} = d_i\tilde{h}_i(t), \quad i = 1,2,3$$

y por tanto,

$$\frac{d}{dt}Vol(P(t)) = \frac{d}{dt}(\tilde{h}_1(t), \tilde{h}_2(t), \tilde{h}_3(t)) = \left( \sum_{i=1}^3 d_i \right) (\tilde{h}_1(t), \tilde{h}_2(t), \tilde{h}_3(t)) = (\nabla \cdot U)Vol(P(t))$$

La divergencia mide la tasa de cambio de volumen asociada al campo  $U$ . Se ha podido establecer finalmente que el sustituto adecuado a la derivada como razón de cambio en  $\mathbb{R}^1$ , es la divergencia (Peral, 1995).

El flujo de campo es una cantidad escalar que expresa la medida del campo que atraviesa una superficie. Dicho campo puede ser campo de velocidades, campo eléctrico, campo magnético entre otros. El flujo neto de campo es una medida del número neto de líneas de campo que salen de una superficie cerrada.

Bajo el supuesto que el sustituto adecuado en  $\mathbb{R}^2$  para la derivada es la divergencia, se puede expresar que la divergencia del campo es proporcional a la magnitud del mismo es decir, es una extrapolación 3D a lo que comúnmente se conoce como ley de absorción de Lambert en 1D. Bajo esta suposición y las enumeradas en el modelo propuesto, estas hipótesis llevan a la ecuación propuesta.

$$\frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (rI) + \frac{\partial}{\partial \theta} (I) + \frac{\partial}{\partial z} (I) \right\} + kI = 0$$

Que tiene por solución, empleando el método de separación de variables de Fourier:

$$I(r, \theta) = I_0 r^{(\lambda-1)} e^{-(kr+\lambda\theta)} \quad (3)$$

Los valores de  $\lambda$  y  $k$  corresponden a los valores propios de la Ec.3 relacionada con las condiciones de frontera y las características electromagnéticas de la suspensión respectivamente.

Las leyes de Maxwell son un conjunto de descripciones físico-matemáticas que representan cualquier fenómeno de carácter eléctrico, magnético o electromagnético de la naturaleza. La identidad vectorial aplicada a las leyes de Maxwell (Spiegel, 1959). con la que se deducen las expresiones matemáticas, se describe en la Ec. 4.

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} \quad (4)$$

donde  $\vec{A}$  es un campo vectorial

Aplicando el rotacional a la ley de Ampere Maxwell, y combinando con Ec.4 se obtiene:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{H}) - \nabla^2 \vec{H} = (\sigma + j\omega\epsilon)\vec{\nabla} \times \vec{E} \quad (5)$$

Por la ley de Gauss para el campo eléctrico se tiene:

$$-\nabla^2 H = -j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)H \quad (6)$$

De la misma forma, aplicando el rotacional a la ley de Faraday y aplicando la Ec. 4, se obtiene:

$$-\nabla^2 E = -j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)E \quad (7)$$

definiendo

$$\gamma^2 = j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon) \quad (8)$$

las ecuaciones 6 y 7 toman la forma:

$$\nabla^2 E = \gamma^2 E \quad (9)$$

$$\nabla^2 H = \gamma^2 H \quad (10)$$

que se conocen como ecuaciones de ondas electromagnéticas (Edminister, 1992).

A  $\gamma^2$  se conoce como factor de propagación de la onda electromagnética, y de acuerdo con EC. (8) es un número complejo, del cual la parte real, corresponde a  $\alpha$  que se conoce como factor de atenuación de la onda electromagnética. La parte imaginaria del número complejo  $\gamma$  es  $\beta$  que se conoce factor de fase, es decir que  $\gamma = \alpha + j\beta$ .

De la teoría electromagnética, los factores de atenuación y fase se calculan mediante

$$\alpha = \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} \left[ \sqrt{1 - \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2} - 1 \right]}$$

$$\beta = \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} \left[ \sqrt{1 - \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2} + 1 \right]}$$

Aplicando el factor de atenuación y fase al modelo y teniendo en cuentas las consideraciones del modelo, se obtuvo la solución que es el modelo propuesto:

$$I(r, \theta, t) = I_0 e^{-\omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} \left[ \sqrt{1 - \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2} - 1 \right]} r} e^{-j \left( \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} \left[ \sqrt{1 - \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2} - 1 \right]} \right)} e^{j\omega t} \quad (13)$$

El medio participante se puede examinar, a nivel electromagnético, mediante el análisis de la conductividad eléctrica, lo cual supone explorar las características electromagnéticas del medio tales como la permeabilidad magnética, permitividad eléctrica, conductividad eléctrica, y frecuencia de la onda electromagnética incidente.

El factor de propagación de una onda electromagnética en cualquier medio, con densidad de carga despreciable, está dado por:

$$\gamma = [j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)]^{1/2} \quad (14)$$

En un medio sin conductividad,  $\sigma = 0$  la Ec. 14, toma la forma

$$\gamma = [j\omega\mu(j\omega\epsilon)]^{1/2} = j\omega\sqrt{\mu\epsilon}$$

Lo que indica que la onda electromagnética no presenta atenuación y por tanto Ec. 13 toma la forma

$$I = I_0 e^{-j(\omega\sqrt{\mu\epsilon})} e^{j\omega t}$$

En un material de conductividad baja  $\sigma < \omega\epsilon$ , reescribiendo 14

$$\gamma = \sqrt{-\omega^2\mu\epsilon \left[1 - j \frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right]} \quad (15)$$

O, lo que es lo mismo

$$\gamma = \sqrt{-\omega^2\mu\epsilon \left[1 + \frac{\sigma}{j\omega\epsilon}\right]} \quad (16)$$

Realizando una expansión en binomio de Newton

$$(a + b)^{1/2} = a^{1/2} + \frac{1}{2}a^{-1/2}b - \frac{1}{8}a^{-3/2}b^2 + \frac{1}{16}a^{-5/2}b^3 + \dots \quad (17)$$

Aplicándolo en 4

$$\gamma = j\omega\sqrt{\mu\epsilon} \left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\sigma}{j\omega\epsilon}\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{\sigma}{j\omega\epsilon}\right)^2 + \frac{1}{16}\left(\frac{\sigma}{j\omega\epsilon}\right)^3 + \dots\right] \quad (18)$$

Entonces

$$\gamma = j\omega\sqrt{\mu\epsilon} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\sigma + j\frac{\sqrt{\mu\epsilon}\sigma^2}{8\omega\epsilon^2} - \frac{\sqrt{\mu\epsilon}\sigma^3}{16\omega\epsilon^3} \quad (19)$$

Así, el factor de propagación, tendrá la forma

$$\gamma = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\sigma \left[1 - \frac{1}{8}\left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2\right] + j\omega\sqrt{\mu\epsilon} \left[1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2\right] \quad (20)$$

Y la Onda electromagnética en el medio, se propagará como

$$I = I_0 e^{-\omega\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\sigma \left[1 - \frac{1}{8}\left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2\right] r} e^{j\omega\sqrt{\mu\epsilon} \left[1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2\right] e^{j\omega t}}$$

Y la onda electromagnética en el medio en el cual la conductividad sea alta se propagará como

$$I = I_0 e^{\pm\omega(r+1)\sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}}\sqrt{\frac{(\frac{\sigma}{\omega\epsilon})-1}{2}}} e^{\mp j\omega(r+1)\sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}}\sqrt{\frac{(\frac{\sigma}{\omega\epsilon})+1}{2}}} e^{j\omega t} \quad (21)$$

Estas condiciones son un punto de partida para la posibilidad de escalar el proceso a nivel industrial, para ello basta solamente establecer si el agua requerida sea para regadío, por ejemplo, de esta manera se puede pasar de agua con conductividad cero, a agua con conductividad baja. El proceso en general, pasará por etapas que en relación con las características electromagnéticas y su variación temporal, permitirán establecer tiempos de descontaminación y escalado industrial.

### III. CONCLUSIONES

Al presentar este modelo para la absorción de fotones, se realizó un cambio radical de enfoque. Las propiedades eléctricas y magnéticas del fluido, tales como permeabilidad, permitividad y conductividad, asociadas al medio junto con la frecuencia de la radiación UV presentan una alternativa interesante de obtener la LVRPA, a todas luces importante en el moldeamiento de los foto reactores.

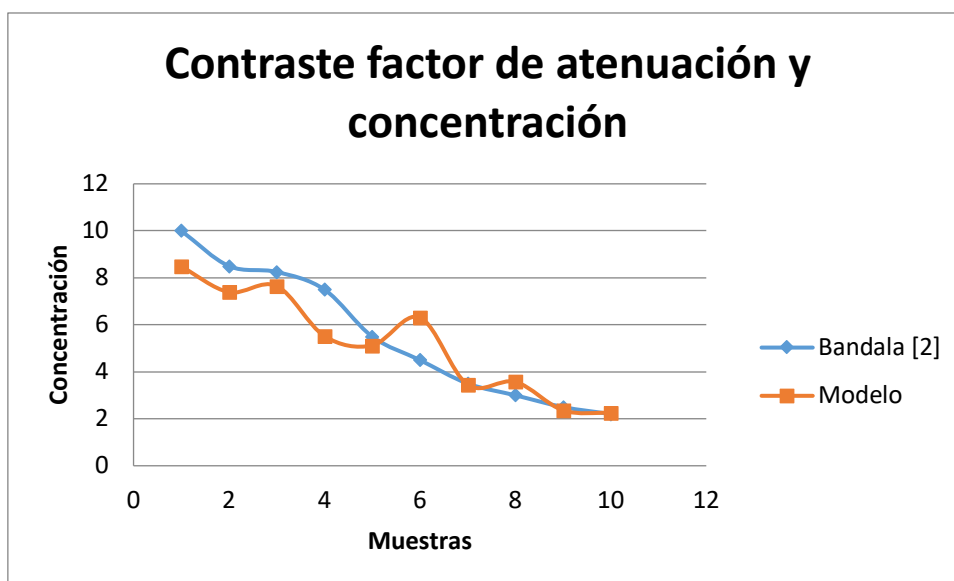


Figura 3. Comparación entre el factor de atenuación y la concentración (Bandala *et al.*, 2004)

Existe una clara relación entre el factor de atenuación de la onda electromagnética con la concentración de ácido oxálico, lo que se ajusta con lo reportado por Bandala *et al.* (2004).

El modelo desarrollado se contrastó con los datos reportados (Bandala *et al.*, 2004) ver Figura 3, los que se ajustaron aproximadamente en un 85%, que representa un buen ajuste.

Las características electromagnéticas, claramente se relacionan con las características químicas de la suspensión, para el caso reportado por Bandala *et al.* (2004) las características electromagnéticas se relacionan con la concentración de ácido oxálico. Dicho de otra forma, las características de permeabilidad, conductividad y permitividad reflejan las características químicas de concentración de la solución, es decir, se puede medir la concentración de ácido oxálico o medir las características electromagnéticas para obtener el factor de atenuación del medio.

Se presentó una tendencia evidentemente decreciente en el factor de atenuación obtenido mediante el modelo desarrollado, lo que se ajusta con lo esperado, ya que el medio al acuoso contaminado en su proceso de foto degradación deja de ser “opaco” a la luz solar, motivo por el cual el factor de atenuación decrece.

En la naturaleza de la reacción, las características electromagnéticas cambian en forma permanente debido a los cambios sucesivos del medio contaminado. Con el modelo desarrollado y las restricciones impuestas en relación a la conductividad eléctrica, se puede entonces predecir los cambios en el medio, conocidos algunos puntos para el factor de atenuación, lo que permite predecir el tiempo necesario para la foto degradación total.

#### IV. REFERENCIAS

- Bandala, E., Arancibia-bulnes, C., Orozco, S., & Estrada, C. (2004). Solar photoreactors comparison based on oxalic acid photocatalytic degradation. *Solar Energy*, 77, 503–512.
- Brucato, A., & Rizzuti, L. (1997). Simplified Modeling of Radiant Fields in Heterogeneous Photoreactors. 1. Case of Zero Reflectance. *Ind. Eng. Chem. Res*, 36, 4740-4747.
- Brucatto, A., Cassano, A., & Grisafi, F. (15 de Setiembre de 2006). Estimating Radiant Fields in Flat Heterogeneous Photoreactors by the Six-Flux Model. Obtenido de Wiley InterScience: [www.interscience.wiley.com](http://www.interscience.wiley.com)
- Edminister, J. (1992). *Electromagnetismo*. Estados Unidos: McGraw Hill.
- Howell, J., & Siegel, R. (1992). *Thermal radiation heat transfer*. Washington. National Aeronautics and Space Administration- NASA.
- Peral, A. (1995). *Primer curso de ecuaciones diferenciales parciales*. Madrid: Addison-Wesley/Universidad Autónoma de Madrid.

- Ramos, G., Velásquez, P., Acevedo, P., Santis, A., Rincón, J., & López, A. (2017). Electromagnetic model for determining the speed of absorptive photonic in a solar collector in v (v-collector). *Chemical Engineering Transactions*, 1609-1614.
- Spiegel, M. (1959). *Vector analysis* 1959. New York: McGraw Hill.