Resolución de problemas y estímulo del pensamiento optimizador en la educación básica[1]

Uldarico Malaspina Jurado
Pontificia Universidad Católica del Perú
Perú
umalasp@pucp.edu.pe

Resumen[2]

Se destacará la importancia de desarrollar, desde los primeros grados de educación, el pensamiento optimizador de los futuros ciudadanos; máxime considerando que tendrán que desenvolverse en entornos sociales competitivos. Ante la realidad, que por una parte muestra que los problemas de optimización están muy presentes en la vida cotidiana de cada niño, joven o adulto y por otra la ausencia – en los currícula, en las clases y en los textos – de problemas matemáticos cuyo objetivo es la obtención de un máximo o un mínimo, se mostrará la factibilidad de complementar y enriquecer experiencias de soluciones intuitivas, proponiendo secuencias didácticas con problemas de optimización que requieren pocos conocimientos matemáticos para resolverlos, en contextos lúdicos y con muchas potencialidades didácticas y matemáticas, aplicables en clases de educación básica y en cursos de formación de profesores. Como marco teórico para las propuestas, se usará el enfoque ontosemiótico de la educación matemática.

Palabras clave

Optimización, intuición, educación básica, resolución de problemas, enfoque ontosemiótico.

Abstract

The importance of the development, from the first school years, of optimizer thinking of future citizens, especially considering that they will have to grow up in competitive social environments, is highlighted. It is observed on the one hand that optimization problems are very present in the everyday lives of all children, teenagers and adults, and on the other hand the absence in the curriculum, in classes and in textbooks of math problems whose objective is to obtain a maximum or a minimum. In this context the possibility of complementing and enriching experiences with intuitive solutions, by proposing didactic sequences with optimization problems that require little math knowledge to solve them is shown. The problems are in the context of games and have high didactical and mathematical potential. They are applicable in elementary classes and teacher training courses. The ontosemiotic approach of math education will be used as the theoretical framework for the proposals.

Key words

[1] Este trabajo corresponde a una conferencia dictada en la XIII CIAEM, celebrada en Recife, Brasil el año 2011.
[2] El resumen y las palabras clave en inglés fueron agregados por los editores.

Optimization, intuition, elementary education, problem solving, ontosemiotic approach.

1. Importancia de la optimización

Es pertinente aclarar desde el inicio, que llamaremos *problema de optimización* a todo problema en el cual el objetivo fundamental es obtener un valor máximo o un valor mínimo de alguna variable. Ciertamente, éste es un nivel intuitivo y muy general de referencia a los problemas de optimización. Para mayores precisiones formales y rigurosas, se pueden revisar libros específicos de optimización matemática, o tener una visión panorámica leyendo Malaspina (2008), que tiene un enfoque matemático y didáctico, considerando diversos tipos de funciones y restricciones. Asimismo, consideraremos que en las personas está presente un *pensamiento optimizador*, si está en búsqueda de lo mejor, de lo óptimo, usando la inteligencia y la intuición.

Para dar una idea de problemas sencillos de optimización que pueden usarse en secuencias didácticas que estimulen el pensamiento optimizador desde la educación primaria, adelantamos el siguiente, comentado ampliamente en Malaspina (2007).

En las casillas de la figura 1, escribe dígitos diferentes entre sí, de modo que al efectuar la multiplicación indicada, el producto sea el mayor posible:

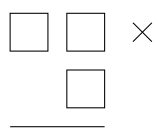

Figura 1

Presencia de la optimización

Podemos constatar que la optimización está muy presente en la vida cotidiana, en la naturaleza, en la tecnología, en las ciencias naturales, en las ciencias sociales y obviamente en la matemática misma.

En la vida cotidiana con frecuencia estamos afrontando muchos problemas de optimización; por ejemplo, buscamos el mejor camino para ir de un lugar a otro, (no necesariamente el más corto); tratamos de hacer la mejor elección al hacer una compra; buscamos la mejor ubicación cuando vamos a un cine o a un teatro; tratamos de enseñar lo mejor posible; escogemos al mejor candidato (o al menos malo) en una elección; buscamos un equilibrio entre el menor riesgo y la mayor rentabilidad si hacemos una inversión monetaria; etc. Evidentemente, en ninguno de estos casos usamos matemática formalizada y rigurosa para encontrar lo que nos proponemos, pues afrontamos los problemas con los criterios que nos dan la experiencia y la intuición, aunque no necesariamente encontremos la solución realmente óptima.

En la *naturaleza* encontramos soluciones óptimas de los animales. El caso más conocido es el de las abejas. En el libro sobre Darwin, escrito por Michael Ruse (2008), encontramos el siguiente párrafo:

> ...[Darwin] mostró que las abejas mieleras construyen panales que optimizan el resultado obtenido a partir del esfuerzo realizado. Las abejas necesitan miel para producir cera. A su vez, obtener miel les exige esfuerzo. Por consiguiente, las que mejor utilizan la cera están mejor adaptadas que otras. En ese sentido la abeja mielera se lleva las palmas. "No era posible que la selección natural superara este estado de perfección pues el panal de la abeja, hasta donde nosotros podemos juzgar, es totalmente perfecto para economizar cera" (p. 235). Esta frase preanuncia una forma de pensamiento que más tarde recibiría el nombre de "modelo de optimización". (p. 53)

En el resumen del artículo "A Bee Colony Optimization Algorithm to Job Shop Scheduling" de Chin Soon Chong y otros (2007), encontramos:

> This paper describes a novel approach that uses the honey bees foraging model to solve the job shop scheduling problem. Experimental results comparing the proposed honey bee colony approach with existing approaches such as ant colony and tabu search are presented.

El siguiente es un párrafo del libro de Boyer (1986), que nos refiere un hecho histórico de la antigüedad y nos recuerda uno de los principios filosóficos de Aristóteles, que atribuye a la naturaleza un comportamiento optimizador:

> Herón parece haber sido el primero que demostró por medio de un sencillo razonamiento geométrico, en una obra sobre *Catóptrica* o estudio de la reflexión, que la igualdad de los ángulos de incidencia y de reflexión es una simple consecuencia del principio filosófico de Aristóteles de que la naturaleza procede siempre de la manera más sencilla o "económica". Es decir, si un haz de rayos luminosos parte de un foco S, se refleja en un espejo MM' y se dirige después hacia el ojo E de un observador, entonces la luz deberá recorrer el camino más corto posible SPE, que es exactamente aquel en que los ángulos SPM y EPM' sean iguales. (p. 229)

En la *ciencia y la tecnología* está claramente presente la optimización y consideramos que el pensamiento optimizador de los seres humanos acompañado de su creatividad, presentes al afrontar problemas y necesidades, son los motores que impulsan el avance tecnológico; así, seguramente que el pensamiento optimizador al cazar animales; es decir, la búsqueda de la mejor manera de cazar animales llevó a inventar armas para cazar; el pensamiento optimizador al cruzar los ríos llevó a inventar balsas, canoas, puentes; el pensamiento optimizador para desplazar cosas y para desplazarse llevó al invento de la rueda, la carreta, los vehículos motorizados; el pensamiento optimizador para comunicarse llevó al invento del telégrafo, el teléfono, los satélites, la Internet; el pensamiento optimizador ante la necesidad de protegerse de las enfermedades llevó al uso de las plantas, a la creación de los medicamentos y la medicina; el pensamiento optimizador ante la necesidad de guardar información, de examinarla, de procesarla, llevó a la estadística y la informática. Ciertamente, los avances tecnológicos y científicos continúan y seguramente que el pensamiento optimizador genera en cada campo de la tecnología una dinámica propia para su avance; así en la búsqueda del mejor computador, del mejor teléfono celular, del mejor video juego, del mejor televisor, etc., se generan competencias – también buscando las mayores ganancias – que actualmente hacen que los aparatos que compramos se hagan obsoletos cada vez en menos tiempo.

En cuanto a optimización y *matemática*, observamos que los problemas de optimización son parte fundamental de esta disciplina y ya estaban presentes en los tratados de los griegos de la antigüedad. Una muestra de ello es el libro V de la obra sobre cónicas escrita en ocho tomos por Apolonio – considerado uno de los griegos más importantes de la antigüedad, que vivió entre los años 262 y 190 a.C. – en el cual se dedica a estudiar segmentos de longitud máxima y longitud mínima trazados respecto a una cónica. Según Boyer (1986) Apolonio sostiene en su introducción, que "el tema es de los que parecen ser dignos de ser estudiados por su propio interés" (p. 203). Kline (1990), nos dice: Apolonio "demuestra que si O es cualquier punto en el interior de una cónica y si OP es el segmento de recta de longitud máxima o mínima desde el punto O a la cónica, entonces la recta perpendicular a OP en P es tangente a la cónica en P (…) Ahora se enuncia esta propiedad como la perpendicularidad entre la tangente y la normal." (p. 97). Este problema podemos verlo actualmente en un marco más general, como parte del estudio de las condiciones de transversalidad en problemas de cálculo de variaciones, que es una teoría creada por Euler en el siglo XVIII, en la cual se optimiza una funcional y el objeto optimizante es una función.

Otro hecho histórico interesante que nos hace ver cómo estaban presentes las ideas de máximo en una perspectiva correcta, aunque no necesariamente rigurosa y formal, es la obra de Pappus de Alejandría, que escribió un libro hacia el año 320 con el título de *Colección matemática*. Transcribimos un párrafo alusivo de Boyer:

"Pappus parece haber seguido de cerca una obra *Sobre figuras isométricas* escrita casi medio milenio antes por Zenodoro (ca. 180 a.C), de la que nos han llegado algunos fragmentos a través de los comentaristas posteriores. Entre las proposiciones que aparecían en el tratado de Zenodoro, había una que afirmaba que de todas las figuras sólidas con la misma superficie, la esfera es la que tiene un volumen máximo, pero evidentemente sólo se daba una justificación incompleta" (Boyer)

Los problemas isoperimétricos tienen un lugar importante en la historia de las matemáticas y en particular de los problemas de optimización. Cabe hacer mención a la leyenda según la cual la princesa Dido – personaje mítico de Fenicia, considerada fundadora de Cartago – cuando llegó en el siglo IX antes de Cristo a lo que actualmente es Túnez, y quiso comprar tierras para establecerse con su pueblo, sólo se le permitió hacerlo en una extensión tal que pudiera ser encerrada por una inmensa cuerda. Es claro que la princesa y los fenicios que la acompañaban, tuvieron que resolver un problema isoperimétrico: determinar la región de mayor área posible, encerrada por la cuerda (el perímetro dado). La solución intuitiva es una región circular, cuya circunferencia es de longitud igual a la de la cuerda; sin embargo la solución formal no es simple y fue escrita después de varios siglos. El destacado matemático germano-suizo Jacob Steiner (1796-1863) resolvió el problema asumiendo la existencia de la solución y considerando tres etapas en su demostración. Puede verse Honsberger, R (1977)

Ciertamente, un hito histórico está marcado por el desarrollo del cálculo diferencial en el siglo XVII y el uso de derivadas para resolver problemas de máximos y mínimos, con lo cual se amplió aún más las aplicaciones de las matemáticas en diversos campos de la ciencia y la tecnología y gracias, sobre todo, a Euler se creó el cálculo de variaciones, considerando la obtención de funciones que optimizan funcionales, lo que proporcionó valiosas herramientas matemáticas para afrontar problemas más avanzados.

Para dar una idea de la presencia de la optimización en el avance de la matemática, mencionamos a continuación algunos avances importantes en el siglo XX:

La programación lineal, iniciada por Leonid Kantorovich (1939) y ampliada con los grandes aportes de George B. Dantzig (1947) con su método del simplex; de John von Neumann (1947) con la teoría de la dualidad; y de Narendra Karmarkar(1984) con su método del punto interior para resolver problemas de programación lineal. Cabe mencionar que Kantorovich y Koopmans recibieron el premio Nobel de economía en 1975, como reconocimiento a sus aportes a la teoría de la asignación óptima de recursos, con la teoría matemática de la programación lineal.

La teoría de control óptimo, cuyos orígenes podemos relacionarlos a problemas de finales del s. XVII e inicios del s. XVIII, que condujeron al Cálculo de Variaciones, como el problema de la braquistócrona, vinculado fuertemente Johann Bernoulli y Leonard Euler. De manera similar a los problemas de cálculo de variaciones, se trata encontrar una función que optimiza una funcional, pero considerando restricciones dadas por ecuaciones diferenciales. Son notables los aportes de Richard Bellman (1957) con su programación dinámica y los de Pontryangin (1962) con su "principio del máximo".

La teoría de juegos, de múltiples aplicaciones en sociología, psicología y economía. Algunos de los valiosos aportes son los trabajos de Ernst Zermelo (1913) en su artículo *Über eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachspiels*; los de John Von Neumann que en 1928 probó el teorema minimax en su trabajo Zur Theorie der Gesellschaftsspiele; los de John von Neumann y Oskar Morgenstern en el famoso libro *Theory of Games and Economic Behavior*, publicado en 1944; las diversas publicaciones de John Nash entre 1950 y 1953; los de Auman, en 1974, en su artículo *Subjectivity and Correlation in Randomized Strategies* en el que introduce el concepto de equilibrio correlacionado al estudiar el comportamiento optimizador de los jugadores. Cabe recordar que John Nash obtuvo el premio Nobel en Economía en 1994 por sus aportes a la teoría económica con el análisis del equilibrio en juegos no cooperativos, que marcó un hito en la Teoría de Juegos.

2. La optimización en la educación básica

Acabamos de dar unas pinceladas sobre la significativa y gran presencia de la optimización en la vida diaria, en la naturaleza y en diversos campos del conocimiento; sin embargo, la realidad nos dice que son muy pocos los problemas de optimización presentes en los textos de educación básica, son muy pocas las alusiones a temas o problemas de optimización en los diseños curriculares y son muy pocas las ocasiones en las que los profesores trabajan con sus alumnos problemas de optimización. En este sentido, por ejemplo en el Perú, el Diseño Curricular Nacional de Educación Básica vigente no tiene diferencias respecto a los anteriores. En primaria, las únicas ocasiones para trabajar con los conceptos de máximo y mínimo que proponen son – como ocurre desde hace muchos años – al considerar máximo común divisor y mínimo común múltiplo de números naturales. En secundaria, el único tema explícito para problemas de optimización es introducción a la programación lineal, que se incluyó por primera vez en el 2003, en quinto año de secundaria (Ministerio de Educación del Perú, 2003). Lamentablemente no hay pautas para desarrollar el tema poniendo énfasis en lo intuitivo, ni en la toma de conciencia, tanto de la obtención de un valor óptimo (máximo o mínimo) como de la importancia de éste, en el contexto dado, cuando se resuelve un problema de programación lineal. Una mirada a los textos de primaria y secundaria, confirma que se le da muy poca importancia a estos problemas en la educación básica. Veamos, por ejemplo, la tabla 1, en la que se presenta un cuadro comparativo de la cantidad de problemas de optimización (PO) que hay en dos colecciones de libros (llamadas A y B[3]) usados en secundaria en el Perú. Es claro que la cantidad de problemas de optimización encontrados – y con criterio bastante amplio – es muy pequeña, a pesar de que los diversos temas que se desarrollan en la secundaria – y también en la primaria – brindan ocasiones para proponer problemas interesantes de optimización.

Tabla 1
Cuadro resumen de información cuantitativa comparativa

	1er Grado		2º Grado		3er Grado		4º Grado		5º Grado	
	Total de Ejerc./ Probls	PO	Total de Ejerc./ Probls	PO	Total de Ejerc./ Probls	PO	Total de Ejerc./ Probls	PO	Total de Ejerc./ Probls	PO
A	792	17 (2,1 %)	820	9 (1,1 %)	562	4 (0,7 %)	1682	5 (0,3 %)	496	26 (5,2 %)
B	3922	22 (0,6 %)	3439	17 (0,5 %)	3730	27 (0,7 %)	4119	10 (0,2 %)	4145	79 (1,9 %)

Fuente: Malaspina 2008.

Cabe destacar que, de manera general, en el aspecto de resolución de problemas, lo más frecuente es encontrar un enfoque que brinda al alumno pasos específicos para obtener la respuesta y no una orientación o acompañamiento en el análisis de la información y del uso de los recursos matemáticos disponibles para resolverlo, que estimulen su intuición y creatividad. En Malaspina (2008) se hace un estudio de aspectos cualitativos y se examina algunos problemas que ilustran las deficiencias encontradas en los textos al trabajar problemas de optimización.

Considerando la significativa presencia de la optimización en la vida diaria y en los diversos campos del conocimiento, las deficiencias encontradas y comentadas muestran una gran inconsistencia entre la realidad y los significados institucionales considerados para la enseñanza y el aprendizaje de la matemática en la educación básica; más aún considerando que los problemas de optimización tienen valiosas potencialidades didácticas, como veremos al comentar algunos problemas propuestos y experimentados con niños, inclusive del segundo grado de primaria.

[3] Colección A: Textos del 2005. repartidos por el MINEDU a colegios estatales de secundaria
Colección B: Textos de la Editorial Santillana, del 2005.

Otro aspecto a considerar es la formación de los profesores de educación básica, ya que ellos – si son profesores de educación secundaria –, lo más probable es que, en lo que se refiere a problemas de optimización, hayan tenido experiencias solo como parte de un curso de cálculo diferencial, usando criterios que no ponen énfasis en lo intuitivo y quizás – en el mejor de los casos – al estudiar funciones de segundo grado. Si son profesores de educación primaria, podríamos afirmar que sólo excepcionalmente habrán tenido alguna experiencia con problemas de optimización.

¿Es posible incluir problemas de optimización en la educación básica?

Nuestra respuesta es afirmativa, basada en los análisis hechos en investigaciones sobre la intuición optimizadora (Malaspina & Font, 2009) y en las experiencias realizadas con niños y jóvenes con diversos problemas, inclusive de carácter lúdico (Malaspina 2002, 2008; Malaspina y Font 2010). A continuación hacemos propuestas de problemas de optimización para primaria y secundaria, destacamos la importancia de crear problemas, damos características de un "buen" problema, teniendo en cuenta la experiencia docente y los criterios de idoneidad didáctica del enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática (EOS) y hacemos algunas recomendaciones a tener en cuenta al trabajar con problemas de optimización.

Algunos problemas de optimización

Enunciaremos algunos problemas, que evidencian la factibilidad de estimular el pensamiento optimizador desde los primeros grados de primaria y haremos algunos comentarios. En general no se presentan a los alumnos tal como están enunciados, sino como una secuencia de actividades individuales y grupales, de dificultad graduada, de modo que una de ellas sea el problema propuesto, con las adecuaciones del caso. Algo fundamental en la propuesta es lograr que a partir de la experiencia tenida al resolver la secuencia de actividades, los alumnos examinen casos particulares, consideren generalizaciones e inventen problemas similares. Por las limitaciones de espacio no mostramos las adecuaciones correspondientes al nivel en el que se desea aplicar cada problema. Posteriormente, nos detendremos en una experiencia didáctica con el problema 3.

Problema 1. En las casillas de la figura 2, escribe cuatro dígitos, diferentes entre sí, de modo que al efectuar la suma indicada, el resultado sea el mayor posible.

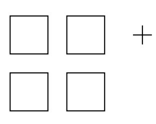

Figura 2

Comentario: Este problema lo creamos pensando en clases de los primeros grados de primaria. Una actividad previa puede ser escogiendo los dígitos de un conjunto de cuatro o más dígitos previamente dado. Favorece que los alumnos inventen problemas similares con diversos conjuntos de dígitos, considerando tres sumandos, sumandos con más de dos cifras, etc. Un nivel de dificultad mayor es proponer problemas similares con otras operaciones. Un ejemplo con la multiplicación es el que dimos al inicio de este artículo y está ampliamente tratado, usando el EOS, en Malaspina (2007).

Problema 2. En un zoológico, las jaulas están identificadas por letras y los animales están ubicados en cada jaula como se muestra en la figura 3:

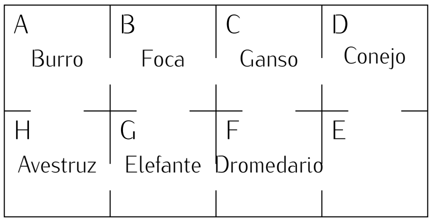

Figura 3

Halla el número mínimo de movimientos que se necesitan hacer para ubicar a cada animal en la jaula que tiene la letra inicial del nombre del animal, teniendo en cuenta que un movimiento es el traslado de un animal a una jaula adyacente y que nunca deben estar dos animales al mismo tiempo en una jaula. (Este problema lo conocimos por intermedio del profesor André Antibí, del IREM de Toulouse).

Comentario: Evidentemente, no se requiere conocimientos matemáticos para resolverlo, pero es atractivo y estimulante del pensamiento optimizador. Al resolverlo encontramos que una de sus virtudes es ilustrar un método de solución de problemas de optimización: encontrar lógicamente una cota inferior k del conjunto de posibles valores de la función objetivo y luego mostrar un caso particular que corresponde precisamente al valor k. La solución detallada puede encontrarse en Malaspina (2008)

Problema 3. Se tiene dos láminas rectangulares: una de 9 cm de largo por 7 cm de ancho y otra de 6 cm de largo por 2 cm de ancho, como se ilustra en la figura 4. Moviendo libremente las láminas en el plano y juntándolas de modo que uno de los lados de una lámina esté completamente unido a uno de los lados de la otra lámina, se forman nuevas figuras planas. Dibuja una de esas figuras: la que tú consideras que tiene el mayor perímetro. Escribe cuál es ese perímetro y explica por qué consideras que es el mayor.

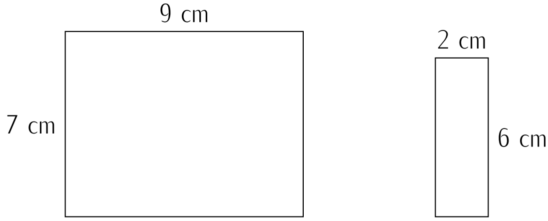

Figura 4

Comentario: Con las adecuaciones del caso, hemos desarrollado experiencias didácticas con alumnos de primaria y de secundaria, con alumnos universitarios y con profesores, y en todos los casos hemos encontrado que brinda ocasiones importantes de aprendizaje, de estímulo de la intuición, y de formación matemática. Por sus potencialidades didácticas y por haberlo aplicado en diversos niveles educativos, nos referiremos a él más ampliamente.

Problema 4. Expresa el número 24 como una suma, usando como sumandos únicamente números del conjunto {1, 3, 5, 7, 9}. Cada sumando se puede repetir a lo más tres veces y el número total de sumandos debe ser el menor posible.

Comentario: Así formulado, es un problema de programación lineal entera con 5 variables. Lo creamos con el propósito de mostrar que el usual método gráfico para resolver problemas de programación lineal no es aplicable y que es importante ir más allá de los algoritmos, sin reducirse a rutinas, y buscando el desarrollo de la intuición optimizadora. Convenientemente adaptado y en un contexto lúdico, fue resuelto por niños de segundo grado de primaria de Perú y de España. La experiencia didáctica fue expuesta en la *34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (PME 34) y está publicada en las actas (Lacasta, Malaspina y Wilhelmi, 2010)

Problema 5. Llamamos "paso" aplicado a un número, cuando se le multiplica por 2 ó cuando se le disminuye en 3 unidades. Hallar el menor número de pasos que se deben aplicar para obtener el número 25, partiendo del número 11.

Comentario: Problema de optimización discreta, de carácter lúdico, que también ilustra un método de resolución de problemas de optimización, que es el pensar en el camino inverso a aquel que se busca para resolverlo. Puede fácilmente plantearse en términos de funciones. Es uno de los problemas que creamos para una experiencia didáctica en el marco del estudio del papel de la intuición en la solución de problemas de optimización, una de cuyas conclusiones es la consistencia de la conjetura de la existencia de la intuición optimizadora. El artículo fue publicado en Educational Studies in Mathematics (Malaspina & Font, 2010).

Problema 6. Se desea construir una caja de base cuadrada, sin tapa, usando una lámina cuadrada cuyos lados miden 18 cm de longitud. Para hacerlo se recortará en cada esquina de la lámina un cuadrado y luego se harán los dobleces necesarios, como se ilustra en la figura 5. ¿Cuál debe ser la longitud de los lados de los cuadrados que se recorten, para que el volumen de la caja que se construye sea el máximo posible?

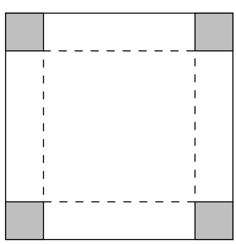

Figura 5

Comentario: Es un problema conocido e infaltable en los textos y cursos universitarios de cálculo diferencial. Lo consideramos acá porque usualmente es reducido a una solución empleando cálculo diferencial, pero tiene muchas potencialidades didácticas. Puede proponerse actividades experimentales en secundaria y aun en primaria para hacer mediciones e ir encontrando los valores del volumen y ejercitar la percepción de la existencia de un valor máximo por la forma en que va variando el volumen conforme va variando la longitud del cuadrado que se recorta. Más aún, usando software de geometría dinámica, puede mostrarse muy claramente cómo al variar la longitud de los cuadrados que se recortan en las esquinas, van variando la base y la altura del paralelepípedo y simultáneamente el recorrido de un punto en la función volumen, de modo que se ve el punto de máximo y el paralelepípedo correspondiente (González, 2006). Otro aspecto interesante a considerar en este problema es que puede resolverse rigurosamente sin usar cálculo diferencial, sino la desigualdad entre media aritmética y media geométrica, que siendo tan importante, usualmente no es tratada en la educación básica. Para la creación de problemas, se puede considerar el caso general con base cuadrada y casos de cajas cuya base sea un polígono regular convexo.

Una experiencia didáctica con el problema 3.

Con el propósito de indagar reacciones de alumnos de secundaria ante problemas de optimización, sin que hayan tenido experiencias previas ante estos problemas, aplicamos el problema 3 a 57 alumnas de primero y segundo grado de secundaria de un colegio parroquial de un distrito de clase media en Lima, preparando un instrumento ad hoc. A continuación resumimos en las tablas 2 y 3 parte de la importante información recogida:

Tabla 2
Percepciones y reacciones ante el problema

		%
Percepciones iniciales	El problema me parece interesante	98.2
	El problema me parece útil	93.0
	El problema me parece fácil de entender	50.9
	El problema me parece fácil de resolver	42.1
	Me gusta (n = 56)	76.8
Reacciones ante el problema	Intenta el problema	82.5
	Halla lo pedido	10.5
	Presenta dibujo correcto	22.8

Comentarios

1. Es claro que hay una percepción positiva del problema.
2. El bajo porcentaje que halla lo pedido debemos entenderlo teniendo en cuenta que solo un 3,5 % identifica claramente los conceptos previos necesarios para resolver este problema y sólo el 36,6 % revela con claridad esos conocimientos previos. Demás, debemos considerar lo atípico del problema, la falta de experiencia de las alumnas en problemas de optimización y el estar respondiendo en una evaluación y no como parte de una secuencia de actividades.

3. Coherentemente con la buena percepción, hay un alto porcentaje que intenta resolverlo y un 22.8 % que presenta un dibujo correcto, lo cual está revelando una solución gráfica o intuitiva del problema y una dificultad para hallar el perímetro, por la no convexidad de la figura y por no tener explícitas las medidas de algunos lados (como lo manifestaron verbalmente algunas alumnas)

Tabla 3
Conceptos, procedimientos y argumentos

			%
Conocimientos previos	Identifica	No	38.6
		Vagamente	57.9
		Con claridad	3.5
	Revela	No	33.3
		Parcialmente	29.8
		Con claridad	36.8
Procedimiento	No presenta		15.8
	Hace cálculos o dibujos iniciales		45.6
	Tantea (examina por los menos dos opciones)		5.3
	Muestra sólo su resultado		33.3
Explica que su resultado es óptimo (n = 49)	No		53.1
	Correctamente		8.2
	Incorrectamente		38.8

Comentarios:

1. En cuanto a procedimientos, predomina el hacer un dibujo mostrando una de las posibilidades y hacer algunos cálculos. Un porcentaje considerable (33,3 %) sólo muestra su resultado y son muy pocas las que muestran el análisis de varios casos o de casos representativos de las diversas posibilidades.

2. En cuanto a argumentos, que el 53,1 % no dé explicación alguna de que su resultado es óptimo (independientemente de que realmente lo sea), a pesar de que se les pide claramente esta explicación, consideramos que revela por una parte no tener experiencias con el concepto de máximo y por otra un contrato didáctico en el aula que no enfatiza la justificación de los resultados.

3. Consideramos que esta experiencia enriquece las que hemos tenido en grupos pequeños con alumnos de varios niveles educativos y con profesores de primaria y secundaria, en las cuales hemos presentado este problema en un contexto de aprendizaje y en el marco de una secuencia de actividades, y ha mostrado sus bondades didácticas.

Situación y actividades

A continuación presentamos actividades individuales y grupales propuestas a partir de una situación descrita, en el contexto del problema presentado al inicio de este artículo, a alumnos de primaria y secundaria y en talleres de resolución de problemas con profesores de educación básica. Ciertamente, los enunciados y las actividades que se proponen, varían según el nivel educativo de los participantes.

Situación

María escribió en la pizarra los dígitos 2, 7 y 5. La profesora le pide a Pedro que escriba estos dígitos en las casillas ubicadas como en la figura 6, en cualquier orden, pero sin repeticiones, y que haga la multiplicación indicada.

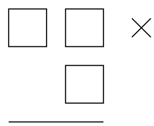

Figura 6

Actividades individuales

¿Es posible que Pedro escriba los dígitos de modo que el producto que obtenga sea mayor que 140? En caso afirmativo mostrar y en caso negativo explicar.

¿Cuántos números pares podría obtener Pedro como resultado de las multiplicaciones, según las diversas maneras de ubicar los dígitos en las casillas?

Actividades grupales

Comparar y examinar los resultados obtenidos en las actividades individuales.

Hallar el mayor número que se puede obtener como resultado de una de las multiplicaciones posibles.

Explicar por qué están seguros que el número encontrado en la actividad anterior es efectivamente el mayor producto que se puede conseguir.

Que uno de los integrantes del grupo dé tres dígitos diferentes cualesquiera, todos mayores que cero. Escribir tales dígitos en las casillas, de modo que se obtenga como producto el mayor número posible.

Encontrar y explicar una regla que permita hacer la actividad anterior sin necesidad de hacer multiplicaciones de tanteo.

Inventar un problema inspirado en la situación dada.

Creación de problemas

Crear problemas es parte fundamental de la tarea docente. Cada profesor sabe la realidad específica en su aula y en consecuencia los estímulos y desafíos que debe brindar a sus alumnos mediante problemas adecuados, que no siempre se encuentran en los textos. Surge entonces el desafío para el propio profesor de crear los problemas matemáticos y las secuencias de actividades con las que debe presentarlos a sus alumnos. Consideramos que la actividad de crear problemas matemáticos complementa muy bien la de resolver problemas, porque estimula aún más la creatividad y contribuye a precisar la situación-problema, el lenguaje, los conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos, que se espera manejen los estudiantes, en el marco de una configuración epistémica adecuada.

Además, la tarea de crear problemas no debe ser actividad exclusiva de los profesores, sino también estimulada por estos a sus alumnos, como parte de las actividades en la solución de problemas, buscando variaciones al problema dado, casos particulares, generalizaciones, conexiones y contextualizaciones. Se genera así una dinámica interesante en las clases, pues generalmente se llega a nuevas dificultades creadas por los mismos estudiantes, que requieren la introducción de nuevos conceptos o técnicas para superarlas, o a ser conscientes de las limitaciones de los recursos matemáticos disponibles y de la importancia de conocer nuevos campos de la matemática.

Si bien es cierto que puede ser muy subjetivo considerar un problema como bueno – porque esto depende no sólo de quien resuelve o crea el problema, sino de los objetivos y del contexto en el que se propone – los criterios de idoneidad establecidos en el EOS pueden ayudar a valorar la "bondad" o "idoneidad de un problema". Dichos criterios son la idoneidad epistémica, cognitiva, interaccional, mediacional, emocional y ecológica. Teniendo en cuenta estos criterios de idoneidad y, sobre todo, por las experiencias desarrolladas en diversos niveles educativos, consideramos que un "buen" problema desde el punto de vista didáctico, debería cumplir con lo siguiente:

a. La dificultad no es demasiado grande y se percibe que la solución es alcanzable. (idoneidad cognitiva)

b. Favorece intuir un camino para obtener la solución o conjeturar una solución. (idoneidad interaccional, emocional y cognitiva)

c. Favorece hacer algunas verificaciones – eventualmente con ayuda de calculadoras o computadoras – para mantener o rechazar las conjeturas. (idoneidad interaccional y mediacional)

d. Se percibe que es interesante o útil resolver el problema. (idoneidad emocional y ecológica)

e. Favorece establecer conexiones matemáticas, ya sea entre varios temas matemáticos, con situaciones reales o con otros campos del conocimiento. (idoneidad epistémica y ecológica)

f. Se percibe claramente en qué consiste el problema (determinar algo, demostrar, mostrar, etc.). (idoneidad interaccional y cognitiva)

g. Favorece el uso de relaciones lógicas antes que el uso mecánico de algoritmos (idoneidad epistémica)

h. Favorece crear nuevos problemas, haciendo de manera natural algunas variaciones que llevan a situaciones significativas, tanto didáctica como matemáticamente. (idoneidad epistémica)

Comentarios:

1. La idoneidad epistémica tiene que ver con "hacer matemáticas". Es en este sentido su vinculación con *e, g* y *h*, pues establecer conexiones matemáticas, usar relaciones lógicas y crear nuevos problemas es esencial en la actividad matemática.

2. La idoneidad interaccional tiene que ver con el "camino" que permite superar las dificultades para hallar la solución. Es en este sentido su vinculación con *b, c* y *f*: la *f* permite ver el inicio del camino, la *b* el camino, y la *c* "hacer el camino".

3. La característica *b*, además de su vinculación con la idoneidad interaccional la vinculamos con la emocional, pues consideramos que si se intuye un camino para resolver el problema, no habrá frustración, ya que algo se intentará. También – en cierta medida – cognitiva, porque abre las posibilidades para resolver el problema.

4. La idoneidad ecológica tiene que ver con el proyecto educativo y con el entorno y por eso su vinculación con las características *d* y *e*.

Algunas recomendaciones para el trabajo con problemas de optimización

Daremos una lista con algunos procedimientos que suelen utilizarse en la solución de problemas de optimización; sin embargo, damos antes algunas recomendaciones de carácter más general, para el trabajo en estos problemas con los alumnos:

1. Partir de situaciones muy sencillas y con problemas de dificultad baja.

2. Hacer modificaciones al problema introduciendo dificultades mayores gradualmente.

3. Dar tiempo para que los estudiantes tengan aproximaciones intuitivas a una solución del problema.

4. Proponer inicialmente actividades individuales y luego actividades grupales.

5. Estimular a que los alumnos den razones para afirmar que el resultado que encuentran es el máximo o el mínimo que se pide encontrar en el problema.

6. Tratar de educar en el rigor, pero sin sacrificar la intuición. Las exigencias de rigor y de formalización deben ser de acuerdo al nivel de los estudiantes.

7. Estimular a que los alumnos propongan problemas similares al que resuelven, considerando otros casos, haciendo algunas modificaciones, buscando generalizaciones, etc.

A partir de las experiencias tenidas con los problemas trabajados en diversas ocasiones, mencionamos algunos procedimientos que pueden servir de orientación al resolver problemas de optimización, complementarios a los métodos y recomendaciones para la resolución de problemas en general. Entre paréntesis, a manera de ejemplos, nos referimos a algunos problemas de optimización expuestos anteriormente, o a algunos ampliamente conocidos

- Identificar casos y usar cuadros (Problemas 1 y 4. El problema de las torres de Hanoi)
- Hacer representaciones gráficas y visualizaciones geométricas (Problemas 2, 5 y 6)
- Usar la desigualdad entre medias aritmética y geométrica (Problema 6 y problemas isoperimétricos y sus "duales" de área dada y perímetro mínimo)
- Si se busca un camino para llegar a determinado objetivo, "pensar en el camino inverso" (Problema 5)
- Usar diagramas de árbol (Problema 5 y problema de las torres de Hanoi)
- Identificar situaciones equivalentes en el conjunto en el que se busca el máximo o el mínimo (Problema 3)
- Definir una función objetivo, graficarla y hacer operaciones algebraicas (Problemas 3 y 6)
- Mostrar una cota inferior k del conjunto C en el que toma valores la función objetivo y luego exhibir un caso que corresponde a esa cota. La consecuencia es que el mínimo es k. (Problema 2)
- Argumento similar, con las adecuaciones del caso, se puede aplicar a algunos problemas de búsqueda de máximo.

3. Comentarios finales

Las experiencias didácticas desarrolladas, nos muestran que los problemas de optimización adecuadamente presentados ofrecen valiosas oportunidades para desarrollar el pensamiento optimizador de nuestros alumnos y que tienen muchas potencialidades didácticas, entre las que podemos mencionar

- Estimular el hábito de fundamentar y de demostrar
- Practicar la estimación y el tanteo inteligente
- Ejercitar el pensamiento algorítmico
- Elaborar criterios de comparación de medidas considerando los valores extremos
- Ejercitar el pensamiento relacionado con la existencia de un objeto matemático. En este caso con la existencia de un valor máximo o un valor mínimo, deducida a partir del comportamiento creciente y luego decreciente de una función y del comportamiento decreciente y luego creciente de una función, respectivamente.

Consideramos muy importante lo siguiente:

- Incluir los problemas de optimización en la formación y capacitación de docentes, estimulando su uso y su creación en diversas situaciones didácticas.

- Incluir problemas de optimización, en diversos contextos y estableciendo conexiones intramatemáticas, en los diseños curriculares, en los textos y en las clases de matemáticas desde la educación primaria.
- Modificar contenidos y formas de tratar temas relacionados con la optimización, actualmente existentes en los planes curriculares de la educación básica, como son las funciones, mínimo común múltiplo e introducción a la programación lineal, enfatizando lo constructivo y lo intuitivo y haciendo tomar conciencia de la importancia de los conceptos de máximo y de mínimo.

Consideramos posible, formativo y entretenido, incluir en la educación básica nuevos contenidos vinculados con la optimización, como elementos de teoría de juegos y temas seleccionados de matemáticas discretas; entre estos últimos podría considerarse elementos de teoría de grafos y elementos de teoría de números, incluyendo ecuaciones diofánticas lineales[4].

Referencias y bibliografía

Bellman, Richard (1957). *Dynamic Programming.* Princeton University Press.

Boyer, C. (1986). *Historia de la Matemática*. Madrid, España: Alianza Editorial.

González, M. (2006). *Solución de problemas de optimización usando geometría dinámica*. Conferencia en el III Congreso Iberoamericano de Cabri. Bogotá, Colombia.

Honsberger, R (1977). *El ingenio en las matemáticas.* Madrid, España: La tortuga de Aquiles.

Kline, M. (1990). *Mathematical though from ancient to modern times.* Tomo I, New York: Oxford University Press, Inc.

Lacasta, E.; Malaspina, U.; Wilhelmi, M. (2010). Optimization through measurement situations in Grade 2. En Pinto, M. M. F. & Kawasaki, T.F. (Eds.). Proceedings of the 34th Conference of the International *Group for the Psychology of Mathematics Educaction*. Belo Horizonte, Brazil: PME. 3, 201- 208.

Malaspina, U. (2002). *Elements for teaching game theory,* Proceedings of the 2nd International Conference on the Teaching of Mathematics. University of Crete.

Malaspina, U. (2007). El rincón de los problemas. Unión. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática* 11, 197-204.

Malaspina, U. (2008). *Intuición y rigor en la resolución de problemas de optimización*. Un análisis desde el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática. Tesis doctoral. Pontificia Universidad Católica del Perú. www.pucp.edu.pe/irem/Tesis_Doctoral_Uldarico_Malaspina_Jurado.pdf

Malaspina, U.; Font, V. (2009). Optimizing intuition. En M. Tzekaki, M. Kaldrimidou, & H. Sakonidis (Eds.), Proceedings of the 33 rd Conference of the International Group for the *Psychology of Mathematics Education.* Thessaloniki, Greece: PME. 4, 81?88.

Malaspina, U.; Font, V. (2010). The role of intuition in the solving of optimization problems. *Educational Studies of Mathematics*, 75:107?130 DOI 10.1007/s10649-010-9243-8, Springer.

[4] Problemas creados con ese fin, analizados didáctica y matemáticamente se pueden encontrar en la sección "El Rincón de los problemas" de la revista UNIÓN, desde el año 2005 (Malaspina).

Malaspina U.; Font, V. (2010). *Intuition and optimization problems in the teaching-learning processes in basic education*. Abstracts of the International Congress of Mathematicians, Hyderabad, India, pp 649-650.

Nash, J (1950). Equilibrium points in n-person games. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* 36 (1): 48?49

Pontryagin, L. et al. (1962). *The Mathematical Theory of Optimal Processes.* Interscience, vol. 4.

Ruse, M. (2008). *Charles Darwin*. Buenos Aires: Katz Editores.

Soon Chong, C. et al (2007). *A Bee Colony Optimization Algorithm to Job Shop Scheduling*. En Simulation Conferenc. WSC 06. Proceedings of the Winter, pp 1954-1961

Zermelo, E. (1913). *Über eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachspiels.* 501-504 in Proceedings of the Fifth International Congress of Mathematicians, Volume II (E. W. Hobson and A. E. H. Love, eds.), Cambridge: Cambridge University Press.