

Cuarta parte

El nuevo currículo costarricense y la discusión internacional en la Educación Matemática

El diseño curricular costarricense utiliza algunos hallazgos, ideas y experiencias que han estado presentes por décadas en la comunidad educativa internacional. En esta parte se mencionan varios de estos elementos.⁹

12. Más allá del Constructivismo

La política educativa costarricense aprobada en los años 90 adoptó el Constructivismo como un fundamento, sin embargo, lo que se adopta es en esencia la búsqueda de un enfoque centrado en el estudiante (situación cognoscitiva, subjetividad y cultura) y su papel activo. Esto ha tenido gran influencia en los currículos de muchos países. Su énfasis en los aprendizajes como progresos cognitivos (particularmente estructurales) ha repercutido en una forma de enseñanza distanciada de los enfoques conductistas que dominaron durante mucho tiempo: una contribución elemental del constructivismo.

Con Confrey y Kazak (2006, p. 306–309) se podría señalar su ascenso situado entre los años 1986 y 1995, teniendo precedentes en al menos tres fuentes: la tradición de la resolución de problemas (desde al menos Polya), la tradición sobre errores, falsas creencias y obstáculos epistemológicos (que incluye los trabajos de Brousseau) y las teorías de desarrollo cognitivo (el mayor peso de Piaget, pero con la participación de Van Hiele y otros). Se trata de una corriente epistemológica que enfatiza el papel del sujeto en la construcción cognoscitiva. Una de sus fuentes centrales son los trabajos de Piaget (1950, 1970, 1973). Con Ruiz (2000) se coincide:

En Piaget: el sujeto es el factor activo. Para Piaget existe una “abstracción reflexiva”, que define como una generalización operatoria. Es esta clase de abstracción la que le permite proponer *etapas mentales* definidas por medio de estructuras mentales. Este asunto de las etapas es uno de los temas más conocidos sobre sus ideas epistemológicas. Para Piaget, las acciones del sujeto y no del objeto son las claves. El objeto posee un rol secundario: ofrecer circunstancias sobre las que el sujeto interviene. En este mundo teórico el sujeto puede coordinar y combinar sus acciones. ¿Qué crea el conocimiento matemático? Su respuesta es inequívoca: la acción y operación mentales.

Algunas de las principales definiciones de esta visión han sido condensadas, entre otros, por Von Glaserfeld (1984, 1987, 1989), Cobb (1983), Dubinsky (1992). Como sintetiza muy bien Radford (2008), tres premisas epistemológicas del constructivismo son: i) el

⁹ Esta parte está compuesta casi íntegramente por fragmentos que forman parte de algunas notas incluidas en el nuevo currículo de Matemáticas en Costa Rica. Todas las notas de investigación fueron elaboradas en los programas por el autor de este artículo.

conocimiento no se recibe de manera pasiva por el sujeto sino que es construido, ii) la función cognitiva es adaptativa y sirve a la organización de la experiencia y no a la descripción de una realidad ontológica, iii) el sujeto construye su conocimiento de manera autónoma. Estas últimas premisas poseen sus orígenes más antiguos en la filosofía de Kant: se asume la imposibilidad de conocer un mundo externo al sujeto, a lo único que se puede aspirar es a un conocimiento hipotético, cuyo valor lo da su "viabilidad" (Von Glaserfeld, 1995). El objeto epistémico es en el Constructivismo una oportunidad para la acción del sujeto.

La primera premisa es aceptada por doquier, como señala Kilpatrick (1987): "(...) la mayoría de científicos cognitivos fuera del Conductismo darían su asentimiento fácilmente, y casi ningún educador matemático activo vivo creería algo distinto" (pp.7-8).

Este Constructivismo enfatiza las construcciones cognitivas individuales. Es la variante teórica más conocida. Aquí se empuja una visión de la acción de aula donde tienen poco lugar la sociedad y la cultura, y se condiciona el papel docente.

Otra tradición epistemológica es la llamada *socioculturalista* emparentada con el pensamiento de Vygotsky (1978):

(...) toda alta función mental fue externa y social antes de ser interna. Fue primero una relación social entre dos personas. Podemos formular la ley general de la genética del desarrollo cultural en la siguiente manera. Toda función aparece dos veces o en dos planos... Aparece primero entre personas como una categoría intermental, y después dentro del niño como una categoría intramental.

Aquí hay también construcción de aprendizajes pero dentro de unidades sociales. Por el hecho de que hay construcción a veces se ubica también como una variante de Constructivismo. Se trata de dos énfasis epistemológicos que por supuesto han tenido influencia en las acciones que se proponen para el aula.

Los autores constructivistas cognitivos han buscado respuestas a la necesidad de salir del marco cognitivo individual y darle algún lugar a lo social y cultural, incluso alejándose definitivamente de esa variante de Constructivismo. Un ejemplo es la ubicación de la clase como *microcultura* donde las interacciones incluyen negociación de significados (Bauersfeld, 1994; cf. Cobb & Bauersfeld, 1994), con una orientación que se suele llamar "interaccionista". (Cf. Ruiz & Chavarría, 2003)

En la comunidad de Educación Matemática, desde mediados de los años 90 el foco de interés se ha distanciado de las investigaciones constructivistas "cognitivistas", se ha dado un papel importante al lenguaje, la cultura, los métodos, fines y medios que ha construido la sociedad (Artigue, 2011; D'Ambrosio, 1997, 2007, 2008; Valero, 2004; Radford, 2008). Este enfoque ha pesado en la acción de aula para fundamentar el papel docente y la interacción colectiva y social no sólo como medios para provocar construcciones cognitivas, sino como factores que intervienen para transmitir la cultura y el conocimiento de una sociedad. Las implicaciones de esta situación epistemológica para la práctica educativa pueden ser muchas. Una de ellas es que el maestro no sólo debe crear (y dirigir) las condiciones para la construcción cognoscitiva y el aprendizaje y dejar el estudiante un poco suelto (como haría el

constructivista típico), sino que además, es un comunicador de construcciones sociales y culturales que por su concurso penetran en la experiencia del estudiante. El maestro debe también permear al estudiante en torno a las prácticas matemáticas establecidas socialmente. Debe, por ejemplo, transmitir lenguaje, nociones y métodos aceptados por la comunidad matemática. (Ruiz, 2000). Como señala correctamente Artigue (2011):

Una constatación unánime es que la investigación, inicialmente centrada en el alumno, en la comprensión de su funcionamiento cognitivo y en la elaboración de organizaciones didácticas respetuosas tanto de la epistemología de la disciplina como del funcionamiento cognitivo, se ha desplazado hacia el docente, considerándolo como un actor esencial y problemático de la relación didáctica. La investigación se interesó en sus creencias, conocimientos y prácticas. Los investigadores trataron de identificar los conocimientos necesarios para realizar esa labor, entender sus características, sus interconexiones, la manera de cómo se forman y se desarrollan (Even & Ball, 2008). La distinción introducida en 1986 entre "content knowledge", "pedagogical content knowledge" y "pedagogical knowledge" (Schulmann, 1986) fue trabajada y revisada dando lugar a construcciones tales como aquella propuesta por Deborah Ball y sus colegas (Ball, Hill & Bass, 2005). Aproximaciones teóricas específicas también se han desarrollado, tales como la aproximación dual de las prácticas de enseñanza (Robert y Rogalski, 2002) que combina contribuciones didácticas y de ergonomía cognitiva para pensar la complejidad del trabajo docente o la teoría de la acción conjunta (Sensevy & Mercier, 2007). La investigación también se interesó en las prácticas de formación del profesorado y en sus efectos, analizando sus limitaciones y tratando de comprender las razones para el éxito de ciertas prácticas. Es emblemático de este interés el trabajo que se ha desarrollado internacionalmente en torno a la práctica japonesa dicha de "Lesson Study" (Isoda, Stephens, Ohara y Miyakawa, 2007). (pp. 3-4)

Hay asuntos muy valiosos que en el constructivismo cognitivo tampoco han sido integrados, como el papel de lo emocional en la construcción de los aprendizajes, algo que también fue propuesto por Vygostky (1986) y que ha sido objeto de varias investigaciones (cf. Ernest, 2011; cf. Rolf & Radford, 2011).

Hay otros elementos que provocan tensión en las filas constructivistas. Por ejemplo, la existencia de aprendizajes que no requieren construcciones cognitivas independientes por el estudiante (por ejemplo, notaciones, convenciones sobre procedimientos, etc.). Autores como Lesh y Doerr (2008) aportan:

Existen al menos cuatro cualitativamente distintos tipos de objetivos instruccionales que son importantes en la Educación Matemática y que no todos necesitan construirse independientemente por los estudiantes: ellos son: (a) *objetivos de conducta* (OC) como los simples hechos y destrezas, (b) *objetivos de proceso* (OP) como los hábitos de mente que no están

conectados a ningún constructo particular matemático, (c) *objetivos afectivos* (OA) como actitudes, creencias, sentimientos y (d) *objetivos cognitivos* (OC) como los modelos y sistemas conceptuales que los acompañan (constructos) para construir, describir, explicar, manipular, y controlar matemáticamente (o estructuralmente) sistemas interesantes... (p. 532-533)

La perspectiva en la que coinciden muchos autores es que un nuevo "paradigma" emergerá integrando Constructivismo y las perspectivas socioculturales, así como los influjos provocados por las tecnologías en la educación. La modelización -se afirma- puede ser fuente de esta nueva perspectiva (Confrey y Kazak, 2006, p. 334). También las elaboraciones semióticas (Gravemeijer, 2010, p. 8). Podemos señalar con Ruiz (2000) algunas de las características que encuentran consenso:

- el papel de la clase como centro de la actividad educativa,
- el estudiante como constructor activo de su conocimiento, es decir el aprendizaje como una forma de reconstrucción individual que hace referencia a la experiencia individual y a las condiciones personales del sujeto, pero en interrelación activa con los otros estudiantes y el maestro,
- el papel del maestro no sólo como facilitador sino también como comunicador de construcciones socioculturales,
- la clase como centro de *negociación* entre estudiantes, entre estudiantes y maestro.

Epistemología

Dentro de la perspectiva que fundamenta el currículo costarricense se asumen premisas epistemológicas que dan lugar a una participación específica de tres componentes: sujeto, objeto y lo social. En Ruiz (2000) se resume una posición manifestada por este autor desde los años 1980:

(...) hemos afirmado la conveniencia de considerar 3 extremos epistemológicos en lugar de dos (tres factores funcionalmente importantes): el sujeto, la sociedad (marco social), y el objeto material. Para nosotros el conocimiento es resultado de una síntesis dialéctica del movimiento de estos tres factores en una relación-proporción de influencias de difícil precisión cuantitativa. Es decir, el "porcentaje de influencia" o "determinación de cada factor en el "output" cognoscitivo es difícil de establecer e, incluso, no existe todavía suficiente evidencia científica para tener criterios definitivos. Pero recordemos nuestro punto. El sujeto epistémico, cuyas determinaciones de base se encuentran en lo biológico y lo físico, es activo. Pero esto es así en una relación con el objeto material también dinámico y activo (aunque no de la misma forma). Ambos factores son activos de maneras diferentes y condiciones, incluso temporales, distintas. Los movimientos autónomos de cada uno intervienen en el otro. La resultante sólo se puede aprehender en la relación conjunta. Esta relación epistemológica es en sí una realidad incluso material diferente a cada uno de los constituyentes.

Esto es decisivo. La relación adquiere un sentido especial al sumergirse en el contexto social (en las relaciones entre los hombres, la cultura, etc.). Este "contexto" influye en el movimiento del sujeto y, a veces, incluso modifica la realidad del objeto. La referencia a lo social como factor epistemológico implica de una manera más precisa una referencia a la historia misma, le da una dimensión histórica a los procesos del conocimiento. (p. 35)

Ruiz (1995a) señalaba: "En Costa Rica, hemos acuñado la expresión *Constructivismo Empírico* para tratar de condensar este tipo de aproximación a la naturaleza de las matemáticas." (p. 5).

Esta visión sustenta la integración de un accionar estudiantil en la construcción de sus aprendizajes, da lugar a la experiencia del sujeto con el objeto y con realidades (el influjo empírico), y a lo social (que incluye desde cultura, saberes, o reglas de conducta) que subraya el papel del docente como trasmisor de elementos externos a la clase.

Identificación con Teorías

En la discusión anterior se puede apreciar la perspectiva pragmática que fundamentó el diseño curricular costarricense. Esto parte de que para nutrir un currículo y la acción de aula lo más pertinente parece ser no identificarse drásticamente con ninguna teoría o paradigma de una manera radical. Y más bien conviene asumir un criterio amplio, integrador pero coherente, que utilice los elementos teóricos que se requieren en correspondencia con las necesidades educativas, incluso acercándose a lo que suele llamarse "pragmatismo realista". Es lo que Cobb (1994) ya expresaba: "el aprendizaje matemático debe verse como un proceso de construcción activa individual a la vez que un proceso de enculturación de prácticas matemáticas de una sociedad más amplia" (p. 13), idea que recientemente sigue sosteniendo (cf. Cobb, 2011, p. 16). En ese sentido, por ejemplo, se deben ver los aprendizajes como resultantes dinámicas de construcciones cognitivas y de influjos socioculturales que provocan aprendizajes también por otros medios (imitación, repetición procedimental, etc.). Y esto nos lleva a asumir las acciones didácticas y pedagógicas que se requieren.

En la resolución de problemas (que resalta contextos reales e instrumentos tecnológicos), precisamente es adecuado poner en práctica esta visión. A la fortaleza de ver los aprendizajes como construcciones de los sujetos de manera activa (que ha acordado la política educativa costarricense), se añade la presencia de un docente que transmite las influencias socioculturales y los constructos de la disciplina, todo a través de un medio escolar que posee sus propias reglas.

13. La Resolución de problemas y los contextos reales

Resolución de problemas

El tema de la resolución de problemas tiene unos 30 años de estar en las discusiones educativas internacionales desde que el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) planteó *An agenda for action* en 1980; se trataba de una respuesta a la etapa que se denominó de “Back to Basics” que se dio como reacción a las dificultades que tuvo la reforma de las Matemáticas modernas durante los años 1960–1970 en varios países. A finales de esa década se realizaron precisiones sobre esta temática por el mismo NCTM, que por ejemplo se expresaron en *Curriculum and evaluation standards for school mathematics* de 1989. Se subrayaba desde entonces el provocar aprendizajes a través de la resolución de problemas. Los antecedentes de las propuestas de la década de los ochenta eran trabajos como los de G. Polya (1945). Schoenfeld (1985) ofreció una influyente reformulación de las ideas de Polya lo que constituyó un nuevo punto de partida para el tema en la comunidad de Educación Matemática. Stanic y Kilpatrick (1988) escribieron una síntesis hasta ese momento de la resolución de problemas que constituye un “clásico”. Una versión más general de la resolución de problemas la aportó hace poco Schoenfeld (2011).

Se coincide con Cai y Lester (2010), en una reseña reciente sobre el enfoque de generar aprendizajes a través de la resolución de problemas:

El ambiente de aprendizaje de **enseñar a través de la resolución de problemas** ofrece un medio natural para que los estudiantes puedan presentar varias soluciones a su grupo o clase y aprender matemáticas a través de interacciones sociales, negociación de significados, y alcanzar un entendimiento compartido. Estas actividades ayudan a los estudiantes a clarificar sus ideas y a adquirir perspectivas diferentes del concepto o la idea que están aprendiendo. Empíricamente, enseñar matemáticas a través de la resolución de problemas ayuda a los estudiantes para ir más lejos de adquirir ideas aisladas hacia el desarrollo de sistemas de conocimientos crecientemente conectados y complejos (p. 3). Énfasis añadido.

El planteamiento de la resolución de problemas fue asumido en los currículos de diversos países, entre ellos Japón, Corea y Singapur. Por ejemplo, desde los 80 Singapur lo colocó como el corazón de su currículo de Matemáticas; las diferentes modificaciones curriculares hasta ahora han dejado intacto ese planteamiento (Ministry of Education of Singapore, 2006a; Soh, 2008). A la vez, “...ha sido un elemento importante en los currículos matemáticos de Finlandia por más de 20 años” (Pehkonen, Hannula & Björkqvist, 2007, p. 121). Una de las conclusiones relevantes del estudio de las pruebas TIMSS en el año 1999 es precisamente que en todos los países estudiados, Australia, República Checa, Hong Kong (SAR), Japón, Holanda y Suiza (seleccionados por su exitoso rendimiento en pruebas internacionales), se trabajaba más de un 70% del tiempo de clase con resolución de problemas (Hiebert, Gallimore, Garnier, Givvin, Hollingsworth, Jacobs, Chui, Wearne, Smith, Kersting, Manaster, Tseng, Etterbeek, Manaster, Gonzales y Stigler, 2003).

Japón asumió ideas del NCTM en los ochenta, pero en ese país la resolución de problemas posee un sentido esencialmente pragmático alrededor de la acción de aula: significa una lección que genere entendimiento (aprendizajes). Los estudios comparativos internacionales sobre la lección han consignado las características y puntos fuertes de la lección japonesa. Precisamente, en Ruiz (2011) se analizan esas características en su relación con la experiencia de otros países; varias de sus conclusiones sobre la lección japonesa fueron valiosos insumos de la visión sobre la resolución de problemas que se incorpora en este currículo.

Para Shimizu (2007, p. 185), las características únicas de las lecciones de Matemáticas japonesas son, resumidamente¹⁰:

- presentación de problemas matemáticos que valen la pena introducir en el aula (que son relevantes o interesantes matemáticamente),
- énfasis en la realización de conexiones matemáticas dentro de la lección y a lo largo de varias lecciones (coherencia cognoscitiva e interrelaciones),
- presentación e intercambio sobre los métodos diversos de solución dados por los estudiantes (participación activa de éstos),
- clarificación de los objetivos de la lección (resumen por parte del profesor, cierre intelectual y pedagógico de la lección).

De alguna manera, se puede percibir la dinámica de esta lección. Shimizu (2009) resume sus conclusiones sobre la lección en Japón:

- Los profesores organizan la lección alrededor de soluciones múltiples de un problema dentro de una modalidad dirigida a toda la clase (p. 312); reafirma lo que Stigler y Hiebert (1999) afirmaron: una clase “estructurada por la Resolución de problemas”, pero con el aporte de soluciones múltiples por parte de los estudiantes.
- En todas las fases de la lección se da un involucramiento sustancial del estudiantado (p. 314).
- Es posible evocar la metáfora de la lección como una obra de teatro con la necesidad de tener un clímax: KI-SHO-TEN-KETSU, que resume el punto de inicio KI hasta el resumen de la historia KETSU.
- Existe una correlación directa entre los valores, objetivos e intenciones deseadas por el profesor para el desarrollo de la lección y aquellos por parte de los estudiantes: la respuesta directa a las acciones instruccionales de los maestros, en armonía, es la forma en que se desarrolla la práctica construida de manera compartida por profesores y estudiantes en el aula (p. 317).
- La valoración del pensamiento estudiantil se incorpora, también, directamente en los “Estudios de Lecciones” (lección-estudio), el mecanismo privilegiado para la formación continua y para el diseño de buenas lecciones en el Japón. En el “Estudio de lecciones”, uno de los rasgos centrales es la anticipación de la conducta y reacción de los estudiantes, de las formas posibles de su pensamiento, para así diseñar o

¹⁰ Los siguientes párrafos de esta subsección “Resolución de problemas” han sido tomados casi íntegramente de Ruiz (2011, pp. 107-109).

planificar bien las lecciones: la discusión general de toda la clase depende de las soluciones aportadas por el estudiantado, y por lo tanto la anticipación de lo que pueda aportar el estudiante es central. Esto es “el aspecto crucial del planeamiento de la lección en el enfoque japonés para la enseñanza de la Matemática a través de la resolución de problemas” (p. 318).

Sin duda, la naturaleza de la lección japonesa sólo puede comprenderse en relación con las estrategias de resolución de problemas, y donde se involucran también varios factores, que incluyen no sólo lo cultural y contextual, sino los mecanismos de formación continua e investigación acción. Pero hay otros aspectos.

El lugar central de la resolución de problemas es un asunto que se incorporó en Japón en la década de los 80 en el siglo pasado, precisamente cuando en los EUA el National Council of Teachers of Mathematics lanzaba su *Agenda for Action*, si bien una primera mención se puede consignar desde 1951 (Hino, 2007, p. 504). Este influjo se corporalizó en un contexto educativo que se alejaba de las premisas de la reforma de las “Matemáticas modernas” (como sucedía en muchas partes del mundo), y constituyó el principal mecanismo para reexaminar la Educación Matemática en el Japón. Si bien se dio un “Back to Basics”, como también sucedió en otras latitudes, Hino (2007) sostiene que quedó como un principio que debían incorporar las Matemáticas más modernas en el currículo para potenciar la creatividad y el pensamiento matemático. Sin embargo, tal vez lo más interesante de mencionar es que los primeros *First and Second International Mathematics Studies* revelaron que si bien los estudiantes japoneses mostraban buenas destrezas de cómputo no era así en cuanto al pensamiento matemático. La resolución de problemas se percibía también como la orientación para enfrentar esa situación de debilidad (Hino, 2007, p. 504).

Nagasaki (1990), reseñado por Hino (2007), afirmaba la existencia de 3 enfoques hacia la resolución de problemas: 1) como un objetivo de instrucción en la educación matemática hacia el desarrollo de la destreza en la resolución de problemas para potenciar el pensamiento, 2) como el proceso mismo de instrucción, para la adquisición de destrezas de pensamiento directamente relacionadas con la Matemática, y 3) como el contenido de la instrucción, es decir, los procedimientos, fases o estrategias metodológicas de la resolución de problemas se enseñan como contenido. Para Nagasaki, este último enfoque es el que se apuntala en los años 80. Durante los años 1980-1995, se condujeron numerosas y amplias investigaciones científicas sobre resolución de problemas. De igual manera, muchas investigaciones prácticas, desarrolladas por maestros y profesores en servicio (en espacios como los “Estudios de la lección”) se multiplicaron (Hino, 2007, p. 507). Estas últimas orientadas en dos direcciones: construcción de materiales de enseñanza para potenciar las destrezas estudiantiles, y por otra parte, hacia la organización de la lección. Debe decirse, sin embargo, que la investigación sobre la organización de las lecciones no empezó en estos años por la resolución de problemas; ya desde los años 1960 se pueden consignar investigaciones. Sin embargo, la resolución de problemas jugó un papel fundamental en la profundización y generalización de este tipo de investigaciones.

Se dio entonces una imbricación entre investigadores de universidades y educadores en servicio en torno al uso de la resolución de problemas, una unidad de propósitos colectivos. Casi todas las lecciones que se desarrollan en los “Estudios de lecciones” se

realizan desde entonces siguiendo la resolución de problemas (Hino, 2007, p. 509). Los japoneses se “casaron” con la resolución de problemas, la ampliaron y la potenciaron. Se puede decir que la misma estructura y organización de la lección, aparte de los influjos culturales o las tradiciones de planeamiento e implementación de la lección, se deben asociar con el uso de esta estrategia y política educativa. Esta visión nutre el currículo costarricense.

Contextos reales

El lugar de los contextos reales en la enseñanza de las Matemáticas juega un papel central en el nuevo currículo costarricense: “El enfrentar situaciones reales que suponen estrategias varias de matemáticas, lógica, de lectura cuidadosa e incluso sentido común son muy valiosas: experiencias cercanas a la vida real y cotidiana. La llamada *contextualización* de las matemáticas juega un papel especial.” (Ruiz, 2000). Pero de una forma distanciada de las “contextualizaciones” artificiales y triviales que muchas veces se realizan:

No se trata de simplemente “revestir de entorno” una operación, es más complejo y estimulante: enfrentar una realidad, hacer un *tratamiento de la información*, determinar los límites y los métodos matemáticos para abordar la situación. Aquí se han dado muchos equívocos: no se trata de colocar la operación $8 + 15$ como 8 naranjas más 15 naranjas para visualizarla o darle contenido real; eso sería un disparate. De lo que se trata es de ofrecer al estudiante una *situación-problema* que le permita usar su mente de manera amplia, tomando en cuenta las variables posibles y escoger los recursos e instrumentos apropiados. (Ruiz, 2000, p. 39).

El énfasis en contextos reales para los problemas es también una característica del mismo marco teórico de PISA; éste encuentra fundamento en las orientaciones de la *Educación Matemática Realista* (EMR) iniciada por Hans Freudenthal (1973, 1991) como respuesta a algunas tendencias dominantes en su momento en la Educación Matemática (como la “Reforma de las Matemáticas Modernas” y el Conductismo). En esa corriente se afirma la matematización de dos maneras: horizontal y vertical. La primera refiere a la organización de los elementos reales, casi empíricos, del contexto mediante modelos. La segunda es la organización, estructuración y refinamiento de los modelos a través de las formas de pensamiento y lenguaje matemáticos. En la primera se va del mundo de la vida al mundo de los símbolos, en la segunda se mueve sólo en el de los símbolos. Existe una fuerte interacción e intersección entre ambas formas de matematización. Ambos tipos de actividad se encuentran en la práctica del matemático y justamente se busca trasladarlos a la acción escolar, aunque con adecuaciones. La Educación Matemática debe proporcionar contextos adecuados para que se puedan desarrollar ambas formas de matematización. Si los problemas que se ofrecen son abstractos, solamente se le da la oportunidad de una matematización vertical.

En este currículo se acepta como conveniente la orientación general de la EMR, sin embargo se hacen dos acotaciones: en primer lugar, se considera relevante la presencia de problemas abstractos en la lección como elementos para construir aprendizajes y promover competencias. En segundo lugar, los problemas en contextos reales deben

seleccionarse con cuidado y disponer de suficientes ejemplos y recursos que requerirá el país durante varios años. Se propone aquí, entonces, una estrategia dominante en problemas en contextos reales pero sin debilitar el papel de los problemas abstractos (que son esenciales para el dominio de temas matemáticos). Sobre esto último, se acepta que:

La enseñanza-aprendizaje de las matemáticas se debe permear del tipo de condiciones que establece la naturaleza de la disciplina, y especialmente ajustarse y construir pedagógicamente la abstracción, pero no para evadirla, sino para comprenderla mejor. En un marco teórico que establece vasos comunicantes con la realidad física y social, la Educación Matemática debe fortalecer las diferentes formas de abstracción y operación mental que constituye esta ciencia. La abstracción es importante, es fundamental. Desarrollar la capacidad de abstracción en los alumnos es darles las condiciones para realizar un pensamiento abstracto, independiente, crítico y capaz de ascender a lo mejor de la cultura y el conocimiento universales. (...) La acción abstracta, sin contextualizar o revestir de entorno, fortalece las destrezas calculatorias, y el pensamiento abstracto. Si se hace lo contrario, y se exagera en la contextualización, se abusa en la presentación y uso de las matemáticas como inducciones y generalizaciones del entorno, y, entonces, se debilita el desarrollo de la capacidad de abstracción de los estudiantes. (Ruiz, 2001, p. 3).

Se concibe una visión de las Matemáticas y de su enseñanza:

Las matemáticas son ciencias de lo abstracto y trabajan los aspectos más generales de lo que existe. Se debe encontrar en los elementos específicos la estructura de conocimiento y la abstracción de la disciplina; es decir, establecer un puente entre lo particular y lo abstracto, no quedarse en lo particular. Se trata de enfatizar los conceptos de alta calidad y pertinencia matemática que puedan dar sentido al tópico tanto para el estudiante como dentro de los objetivos de desarrollo de competencias y aprendizajes generales en la disciplina. Ahora bien, debe existir un equilibrio estratégico con el "andamiaje": se requiere de andamios pedagógicos y pasos cognoscitivos y de aprendizaje, con "variación", o como se quiera conceptualizar, que pavimenten el camino hacia la abstracción. (Ruiz, 2011, p. 115).

Es así como: "Todo apunta a una estrategia educativa que sepa colocar las dimensiones abstractas y las no abstractas en el lugar que le corresponde a cada una, de acuerdo a los mejores fines de fortalecer la formación matemática de la población con vista al mundo que hoy enfrentamos." (Ruiz, 2001, p. 3).

Se adopta en este currículo una convergencia valiosa entre la enseñanza de las Matemáticas a través de la resolución de problemas, la orientación de la EMR y planteamientos de este autor.

14. La lección para construir aprendizajes

La propuesta costarricense identifica cuatro momentos en la acción de aula para construir aprendizajes. Lo que ha predominado hasta ahora en la educación Secundaria de Costa Rica es un estilo de organización de la lección que subraya una secuencia de pasos o momentos: Teoría→Ejemplo→Práctica Rutinaria, y a veces la introducción como apéndice de un ejercicio contextualizado:

1. En el paso de la teoría se proporcionan las definiciones y los principales conocimientos asociados al tópico curricular.
2. En el siguiente paso se hace la descripción de los ejemplos que muestran o ilustran los conceptos o procedimientos asociados.
3. El tercer paso corresponde a la presentación de ejercicios similares a los ejemplos en su grado de dificultad pero con ligeras variaciones.
4. Es posible que se añada al final algún ejercicio contextualizado, cuyo nivel de complejidad no dista del utilizado en los ejemplos y ejercicios.

Este estilo se puede ver en la siguiente figura.

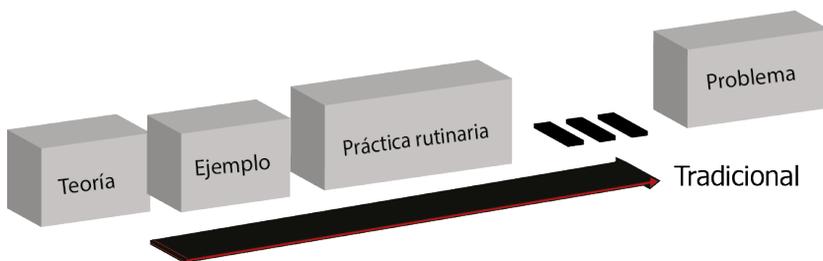


Figura 6: Estilo tradicional en la enseñanza de las Matemáticas.

En el mejor de los casos se utiliza un verdadero problema (uno que implica algún nivel mayor de demanda cognitiva). Se usaría sin embargo para completar el proceso de aprendizaje, y el problema actuaría como un espacio para hacer aplicaciones (los estudiantes usarían lo aprendido en abstracto).

En ese estilo de organización de la lección se da una acción docente básica que suministra la información y los conocimientos matemáticos (procedimientos, algoritmos, demostración de propiedades, graficación de figuras, resolución de ecuaciones, etc.), las personas reciben pasivamente las explicaciones y en algunos momentos –cuando sea necesario– pueden externar sus dudas. Este estilo no favorece la interrelación activa entre estudiante–docente, estudiante–estudiante, ya que posee un sentido unidireccional en el flujo de significados y conocimientos y no provoca el aporte y compromiso estudiantil en el desarrollo mismo de la lección.

En muchas ocasiones la parte de teoría se reduce sustancialmente ofreciendo una variante disminuida del estilo: Ejemplo→Práctica rutinaria, que a veces incluye un ejercicio contextualizado. En ocasiones se reduce aún más, Ejemplo y Práctica Rutinaria, otras, aún peor, sólo Ejemplo.

El predominio de este estilo responde a varias razones. Una de ellas es la ausencia de tiempo suficiente para el desarrollo de fines curriculares en el aula, debido por ejemplo a un abarrotado conjunto de contenidos a cumplir en un cronograma muy rígido. Por el otro lado, obedece a una falta de elementos de apoyo para abordar estrategias pedagógicas distintas que requieren, entre otras cosas, insumos y materiales específicos (textos adecuados y manipulables). Además, existe la ausencia de formación docente en enfoques alternativos asociados de manera específica a la labor de aula en la enseñanza de las Matemáticas. Finalmente, interviene la distorsión provocada por las pruebas nacionales que se efectúan en Costa Rica hacia una concentración en el aula en ejemplos y ejercicios similares a los que aparecerían en esas pruebas. Todos estos elementos intervienen de distinta manera.

En la educación Primaria este estilo no se ha dado de la misma manera debido a la naturaleza de la enseñanza en estos niveles donde se busca trabajar con elementos manipulables físicamente, mediante la intuición, y donde los aspectos de definición y teoría ocupan un lugar menor. Sin embargo, sí domina la dirección "Ejemplo→Práctica Rutinaria".

El estilo de lección que se sugiere en este currículo se fundamenta en varias fuentes. En primer lugar, en la experiencia e investigación que se han llevado a cabo en Costa Rica. Ruiz (2000) plantea:

(...) la clase, vista como una pequeña "comunidad científica" dotada de sus reglas, es el corazón de la experiencia educativa. Aquí es donde el alumno se enfrenta a los "problemas" y *construye* o, mejor dicho, *reconstruye* conceptos. El alumno es activo, aunque también el maestro. Es necesario romper con los esquemas tradicionales en lo que el profesor dicta sin real interacción con el alumno, romper con la pasividad del alumno. No es que un profesor no participa "porque el niño puede construir el conocimiento solo". Es quien debe suministrar las situaciones adecuadas (los problemas), organizar las discusiones y apenas sugerir procedimientos de validación para el nuevo conocimiento. (p. 38).

Y además:

El sujeto construye un concepto "nuevo" por medio de un proceso complejo que parte de un conflicto "cognoscitivo" entre las concepciones que posee originalmente el sujeto y el que va a resultar de la experiencia cognoscitiva. Resulta en esto importante entender que el aprendizaje no debe verse con la dirección típica de la educación programada: de lo simple a lo complejo; más bien es al revés: de lo complejo a lo simple. (p. 38)

Es esencial en la acción de aula la colocación de problemas suficientemente complejos que desafíen al estudiante.

Por otra parte, en la misma dirección se encuentran ideas dentro del marco teórico de las pruebas PISA, los planteamientos teóricos de la corriente de Educación Matemática Realista (EMR) iniciada hace más de 30 años por H. Freudenthal (1973, 1983, 1991) y que fundamentan la acción educativa en Holanda desde hace varias décadas, la amplia experiencia exitosa de Japón y otros países asiáticos, así como en algunos resultados de investigación de la escuela de didáctica de las Matemáticas en Francia.

La OECD en PISA propone un enfoque que:

(...) contrasta con el concepto tradicional de las matemáticas escolares, a menudo más limitado. En los centros de enseñanza, el contenido matemático se enseña y evalúa frecuentemente de forma que se abstrae de los contextos reales, por ejemplo, a los alumnos se les enseñan técnicas de aritmética y luego se les presenta una operación aritmética para que la completen; se les enseña a resolver un determinado tipo de ecuaciones y luego se les presentan ecuaciones similares para que las resuelvan; se les enseñan las propiedades y relaciones geométricas y luego se les pide que demuestren un teorema. Una vez aprendidos los conceptos en cuestión, se les suele pedir que resuelvan problemas matemáticos inventados que exigen la aplicación de dicho conocimiento. Las matemáticas requeridas son, por lo general, evidentes. **Puede que los alumnos dominen las técnicas requeridas o no. Probablemente no se presta la atención suficiente a la utilidad de las matemáticas en el mundo real.** (OECD, 2005, p. 38). Énfasis añadido.

En el marco teórico para las pruebas comparativas internacionales se declara un enfoque de problemas en contextos reales:

La intención es promover un enfoque de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas que haga especial hincapié en los procesos asociados al planteamiento de problemas en contextos reales, procurando que dichos problemas adopten una forma apta para la aplicación de métodos matemáticos, que se utilice el conocimiento de las matemáticas para resolverlos y que se evalúe su solución en el contexto del problema original. Si los alumnos aprenden a hacerlo así, estarán mejor preparados para utilizar sus conocimientos y habilidades matemáticas durante toda su vida; serán competentes en matemáticas. (OECD, 2005, p. 38).

La propuesta recoge también ideas expresadas en la perspectiva de la EMR. Se trata de una larga trayectoria en el diseño instruccional para la enseñanza de las Matemáticas (Treffers, 1987; Cobb, Gravemeijer, & Yackel, 2011, pp. 75-82). La influencia de estos planteamientos ha trascendido Holanda, se han adoptado en varias partes del mundo y constituyen precisamente un referente teórico central de la OECD en las pruebas PISA. EMR se separa de lo que considera un enfoque "mecanicista" de desarrollar la enseñanza: trabajar las Matemáticas en abstracto (desnudas de contexto) para luego -en el mejor de los casos- aplicar lo aprendido en problemas reales: "en lugar de empezar con ciertas abstracciones o definiciones que serán aplicadas luego, uno debe empezar con

contextos ricos que demanden organización matemática o en otras palabras contextos que pueden ser matematizados” (Van den Heuvel-Panhuizen, 2000, p. 5). En EMR los problemas contextualizados son fuente para el proceso de aprendizaje. Trabajando con esos problemas se desarrollan los conceptos e instrumentos matemáticos y el entendimiento. Hay un punto de partida: los estudiantes no se consideran receptores pasivos de matemáticas ya hechas sino participantes activos del proceso educativo. De igual manera:

Es importante: ofrecer oportunidades para compartir sus estrategias e invenciones entre ellos. Escuchando lo que otros descubren y discutiendo esos hallazgos, los estudiantes pueden obtener ideas para mejorar sus estrategias. Más aun, la interacción puede evocar reflexión que permite a los estudiantes alcanzar un nivel más alto de comprensión.

(...) los estudiantes necesitan espacio para construir sus ideas e instrumentos matemáticos. Para hacer eso, los docentes deben proveer a los estudiantes con el ambiente de aprendizaje en el cual este proceso de construcción puede emerger. (Van den Heuvel-Panhuizen, 2000, p. 5-7).

En ese sentido: “la lección debe favorecer la participación de los estudiantes con métodos de solución alternativos, múltiples estrategias, falibilidad y diversidad. Es una visión sobre la construcción cognoscitiva y el aprendizaje”. (Ruiz, 2011, p. 116).

Se propone en EMR una forma de organización de la lección que se separa del estilo tradicional que se ha señalado en este currículo (teoría→ejemplo→práctica→ejercicio contextualizado) y plantea otra en que se invierte el esquema: se parte de problemas, se brinda espacio a los estudiantes para elaborar y construir sus estrategias y soluciones, se realiza una socialización de los resultados. Es un estilo que posee gran convergencia con la organización de la lección japonesa. La diferencia reside en que para EMR se enfatizan problemas de partida reales o imaginados por el o la estudiante de esa forma, mientras que en el caso de Japón se ha favorecido el uso de los problemas abstractos (si bien se están dando cambios en los últimos años). En este currículo se beneficia el planteo de problemas en contextos reales pero se proponen también problemas abstractos como relevantes.

En tercer lugar, se usa una amplia comparación realizada por Ruiz (2011) de los resultados de tres estudios comparativos internacionales realizados con videos por TIMSS en 1995 y 1999, y por un grupo independiente desde el 2005 encabezado por D. Clarke, C. Keitel, Y. Shimizu, E. Jablonka, J. Emanuelsson y I.A.C. Mok. Estos estudios condensaron sobresalientes resultados sobre el desarrollo de las lecciones, en particular sobre Japón (Clarke, Emanuelsson, Jablonka & Mok, 2006; Neubrand, 2006; Shimizu, 2006 y 2009; Stigler y Hiebert, 1999, 2004). Es posible observar variaciones de estos cuatro pasos e incluso realizar la introducción de otros, pero de manera general se consigna una forma de organizar la lección donde se incluyen estos 4 momentos sugeridos por este currículo. Esta organización de la lección constituye fundamento de lo que se denomina “estudio de las lecciones”, un mecanismo poderoso para el desarrollo profesional que se realiza en Japón y que se ha expandido a muchos países. Este componente ha sido central en un sistema educativo que exhibe niveles de éxito muy significativos en todas las pruebas comparativas internacionales y ha

influenciado muchas experiencias en el mundo. Con Ruiz (2011) se valora este esquema de organización como una estrategia exitosa que condensa de manera muy práctica en la gestión de aula el propósito principal de la resolución de problemas: enseñar las Matemáticas a través de los problemas.

Una cuarta fuente del estilo de organización de las lecciones que se sugiere lo constituye la teoría de las situaciones didácticas TSD, elaborada por G. Brousseau desde la década de los sesenta del siglo pasado y extendida por varios investigadores principalmente francófonos. Es una teoría que posee una gran influencia y aceptación en España, Francia y en toda América Latina. En esa teoría se propone la noción de situación, que en esencia es:

... un sistema de relaciones entre algunos estudiantes, un docente y algún conocimiento matemático. El aprendizaje de los estudiantes resulta de interacciones que se dan dentro de estos sistemas y es altamente dependiente de las características de ellos. La teoría busca entender estas relaciones y determinar las condiciones para el funcionamiento óptimo de ellos. (Artigue & Houdement, 2007).

Se trata de una teoría que busca dar un modelo de lo que es la acción de aula y en ese sentido es sobre todo un instrumento de investigación (no de diseño curricular), bien que propone algunos lineamientos para que ésta sea adecuada e incluso una estrategia: la ingeniería didáctica (Cf. Artigue, Douady, Moreno & Gómez, 1995). En la situación didáctica los estudiantes pueden lograr o construir aprendizajes, y aquí se subraya la existencia de momentos en que el estudiante debe enfrentarse solo al problema (sin intervención del docente en cuanto a la solución del mismo): "situaciones adidácticas". Éstas son esenciales para el aprendizaje y deben ser provocadas por el docente y aceptadas por el estudiante (un proceso que se denomina la "devolución"). Es algo que Ruiz (2000) consignaba así: "Si se prescribe, sugiere, recomienda, guía, métodos antes de la experiencia directa del alumno, se debilita considerablemente ese espacio de libertad decisivo para la acción y el *involucramiento* profundo del estudiante". (p. 38). Este espacio permite precisamente promover estrategias diversas:

Se abre la posibilidad de promover el pensamiento crítico, creativo y la imaginación cuando inteligentemente se da la posibilidad de enfrentarse a las *situaciones problema* con estrategias variadas. Son inapropiados los esquemas que afirman una sola estrategia; es esencial abrir el camino para que se intenten varios procedimientos. (Ruiz, 2000, p. 38).

Otro momento relevante es lo que Brousseau (1998) llama "institucionalización", cuando la docente "... define las relaciones que se pueden dar entre el comportamiento "libre" del estudiante o su producción con el conocimiento cultural o científico y el proyecto didáctico: ella brinda una forma de "lectura" de estas actividades y de darles un estatus." (p. 56). Es una etapa que "cierra" la situación didáctica. Estos dos elementos se consideran en este currículo como muy importantes. En cuanto al último:

Es esencial que se haga explícito el razonamiento matemático que se desarrolla, el pensamiento y la estructura intelectual involucrados. De-

jar explícito el sentido de las lecciones (los tópicos analizados) señala la participación-influjo del educador, que es el actor que posee un conocimiento más amplio del tema y es capaz de hacer síntesis y trazar las perspectivas de la materia que se enseña. El cierre y la guía de la lección son de las principales acciones que debe asumir el educador en una orientación que favorece la construcción cognoscitiva del aprendizaje. Si bien resulta apropiado que el estudiante lo obtenga como un proceso propio de abstracción, el cierre intelectual y formativo es tarea del profesor. Este cierre intelectual y pedagógico que expresa explícitamente el significado de los conceptos vistos en la lección ... no necesariamente tiene que darse en cada una de las clases consideradas de manera aislada; puede resultar conveniente en otro momento, considerado adecuado por el profesor, dentro de una secuencia de lecciones. (Ruiz, 2011, p. 115).

La situación didáctica es un concepto más general que el problema, lo incluye, refiere a toda la actividad del aula (Brousseau, 2006).

Como con toda teoría, se pueden aceptar algunos de sus planteamientos y otros no. Por ejemplo, en este caso se coincide con Radford (2008) en cuanto a que dentro de esta teoría se dan varias asunciones: existe una familia de situaciones que corresponden a cada pieza de conocimiento matemático, la que se denomina situación fundamental; se asume que el sujeto (epistémico, no concreto) construye de una manera óptima los conocimientos para resolver el problema específico planteado en la situación didáctica (esta construcción se ve como una adaptación cognitiva a circunstancias, en el sentido constructivista), se asume que hay una Matemática establecida con la que el sujeto se relaciona, y que sin la fase autónoma no hay aprendizajes. En este currículo:

- Se acepta la relevancia de la fase autónoma (que se denomina “independiente”) para los aprendizajes. Sin embargo se posee una visión amplia de lo que pasa en el aula: no es sólo un asunto individual cognitivo, el estudiante puede aprender también por el concurso del docente y de los compañeros del grupo (pesa lo que Vygotsky (1987) llama “zona próxima de desarrollo”). Por eso la acción del docente (no sólo inhibiéndose de dar soluciones) debe jugar un papel central, para impedir que esa fase pueda terminar en un fracaso educativo si el estudiante no es suficientemente activo; y de igual manera es esencial el influjo de la clase (los compañeros).
- No se afirma aquí que todo pedazo de conocimiento matemático sea susceptible de tener una situación fundamental, lo que significa que no se plantea proporcionarlas en todos los tópicos matemáticos de este currículo (y no sólo porque no se pueda, en ocasiones se podría pero otras consideraciones logísticas o pedagógicas lo inhiben).
- No se visualizan aquí las Matemáticas como un cuerpo rígido con el que dialoga un sujeto epistémico, las Matemáticas son constructos sociales e históricos. En la TSD hay un conocimiento “sabio” dado que se busca transmitir a un sujeto que es epistémico (no concreto). Con fuerza, en el sustrato de este currículo se le da relevancia al sujeto concreto metido en contextos socioculturales, y se valoriza la socialización estudiantil tanto en la construcción de soluciones o estrategias

como en la contrastación de las mismas como factores para constituir aprendizajes. Por eso se subraya en este currículo el tercer paso en la organización de la lección.

La lección japonesa y los planteamientos de la EMR, PISA, TSD nutren un enfoque distinto al tradicional (teoría→ejemplo→práctica→ejercicio contextualizado). EMR no acepta de ese estilo ni siquiera aquellas situaciones donde se aplican matemáticas en verdaderos problemas contextualizados (no sólo ejercicios); propone una dirección contraria, igual que PISA. Brousseau, por su parte, considera que mucho de ese estilo tradicional está lleno sólo de las “institucionalizaciones” y que carece de esas fases decisivas “adidácticas”. En todos los casos se plantea crear “medios” para la producción (o reinención) de conocimientos: problemas que despierten actividades cognitivas y brinden espacios a estudiantes para el desarrollo de esas actividades. EMR, PISA y la lección japonesa subrayan la contrastación social (en grupos o toda la clase) de los resultados de esas actividades. TSD y la lección japonesa destacan las relaciones de validación con la cultura matemática.

Entonces, se podría decir que en este currículo la sugerencia de organización de las lecciones, con base en los aportes de los investigadores costarricenses, asume el enfoque de PISA y usa como base la experiencia japonesa aunque con algunos énfasis nutridos por EMR y TSD:

- Problema: se asume la relevancia de construir aprendizajes a través de la resolución de problemas, se promueve aquellos en contextos reales (EMR + PISA), se acepta que debe haber algún nivel de “reinención” de los tópicos matemáticos en juego (EMR) y se busca que las matemáticas que intervendrán respondan de manera óptima al problema (TSD), pero hasta donde sea posible.
- Trabajo estudiantil independiente: se subraya la importancia para el desencadenamiento de acciones cognitivas y el aprendizaje del espacio que debe darse al trabajo autónomo (EMR + TSD + lección japonesa), se acepta que el docente no debe obstaculizar esa autonomía (TSD) pero se acepta que en la práctica educativa real la acción del grupo y del docente contribuyen al aprendizaje (no es inadecuado para aprender que se debilite la autonomía en algunos casos).
- Comunicación y contrastación: se propone como fase esencial para el aprendizaje (EMR + lección japonesa).
- Clausura o cierre: un momento indispensable para “institucionalizar” los conocimientos (TSD + lección japonesa) y conectar con la cultura matemática.

A esto debe añadirse:

(...) no dejar de realizar las conclusiones y las interrelaciones cognoscitivas de los temas enseñados, no concentrarse en prácticas rutinarias, repetitivas ni privilegiar conceptos de baja calidad matemática, no caer en el hábito de solo enunciar o listar sin desarrollar en profundidad los conceptos y temas, y no debilitar la participación activa y cooperativa de los estudiantes en particular potenciando soluciones únicas. (Ruiz, 2011, p. 116).

Este estilo materializa los fines de la política educativa costarricense aprobada en los años 90, que subrayan la construcción de los aprendizajes, puesto que una manera de

asumir los mismos es precisamente ofrecer desafíos interesantes en la clase, fomentar la acción estudiantil en el diseño y realización de estrategias, en la contrastación y comunicación colectivas de éstas así como fortalecer una intervención docente inteligente, estimulante y apropiada.

15. Competencias, procesos matemáticos y niveles de complejidad

Competencias

Un enfoque propio de este currículo es que no se introducen las competencias como organizadoras del programa de estudios, sólo se utilizan como una perspectiva general que busca la formación matemática, pero se reconoce su relevancia. Las competencias dentro de un currículo escolar ofrecen visiones renovadoras que permiten redireccionar el significado de los aprendizajes y sustentar premisas constructivistas cruciales, apoyando que la educación aporte al progreso social. Se coincide con Rico y Lupiáñez (2008):

Al optar por este marco, el sistema educativo apuesta por la necesidad de dar un sentido a los aprendizajes. Un sentido en este caso constructivista, ya que se contempla al alumno como constructor de sus aprendizajes; no basta con la transmisión del saber. Adquirir y desarrollar competencias es el modo de atender los fines formativos del currículo que, esencialmente, consiste en aprender a hacer lo que se hace, haciéndolo. Complementariamente, el marco de competencias contribuye al desarrollo social, ya que proporciona respuesta avanzada a las necesidades del mundo económico y laboral, y garantiza el logro de una política escolar democrática. (p. 150).

Aquí, sin embargo, se usan las competencias de una manera precisa en atención a los fines educativos nacionales y las posibilidades de docentes y estudiantes en el actual momento histórico: como una perspectiva que nutre decisiones curriculares y la acción de aula, con la propuesta de procesos (acciones transversales) que poco a poco se vayan introduciendo en los quehaceres educativos.

Un planteamiento por competencias pleno significaría su introducción operativa en el planeamiento o la evaluación cotidiana. Proponer eso último habría significado al menos dos cosas:

i) Introducir las explícitamente en los instrumentos de planeamiento oficiales, y pedir que se reporten los resultados de su introducción en el aula: grados de avance de las competencias en cada uno de los estudiantes (lo que podría consignarse por medio de rúbricas para la observación). En esa perspectiva la planificación se debería hacer no por medio de conocimientos o habilidades específicas sino “por medio de la resolución de tareas no convencionales” (Rico y Lupiáñez, 2008, p. 157). Más aún:

La planificación debe establecer las expectativas de aprendizaje. También debe incorporar criterios para su seguimiento y desarrollo, considerando

niveles de dominio para cada una de las competencias. Parámetros importantes para planificar el nivel de dominio que se puede esperar en una determinada competencia son el tipo o familia de tareas que las movilizan, su nivel de dificultad y su grado de complejidad (Rico y Lupiáñez, 2008, p. 157).

ii) Incorporar en la evaluación “tareas para evaluar el uso conjunto” de conocimientos, habilidades y actitudes, comprendiendo que las competencias son “interdependientes”, y que debe haber una “valoración holista, que tenga en cuenta el ejercicio conjunto de sus componentes en distintos contextos” (Rico y Lupiáñez, 2008, pp. 155–156). Implicaría “reconocer el nivel o grado de logro alcanzado”, y por tanto proponer instrumentos con escalas de logro (como por ejemplo, los seis niveles que utiliza PISA (OECD, 2005, pp. 46–47).

Esto no se propuso hacer en este currículo.

Procesos

Con el propósito de desarrollar la competencia general o las competencias vistas como capacidades cognitivas superiores, el currículo emplea “procesos matemáticos”, que conceptúa de una manera muy precisa.

La idea de proceso que se adopta en este currículo es muy parecida a la que aplica el *National Council of Teachers of Mathematics* NCTM, de los Estados Unidos. Esta organización profesional plantea *estándares de procesos*, a la par de *estándares de contenido*. Los estándares de proceso “enfatan modos de adquirir y usar conocimientos” (NCTM 2000, p. 29). Los estándares de proceso son también expectativas de logro en actividades transversales distintas a las áreas matemáticas. En este currículo el concepto de proceso posee un sentido más práctico, menos general: son “familias” o tipos de actividades. *Conectar*, por ejemplo, podría verse como una familia de actividades que se propone realizar en la implementación del currículo y que propulsan el desarrollo de una o varias competencias. Igual sucede con *Plantear y resolver problemas*. De hecho, el NCTM ha evolucionado y considerado más recientemente una manera más práctica de usar los estándares de proceso en su colección *Focus in High School Mathematics* (NCTM, 2009). Una forma aún más práctica y precisa de trabajar con este tipo de actividades es la que ha propuesto el llamado *Common Core State Standards for Mathematics* CCSSM, una formulación distinta a la del NCTM que ha logrado tener recientemente un extraordinario impacto en los Estados Unidos. CCSSM propone como “Estándares para la práctica matemática”: *Dar sentido a problemas y perseverar en resolverlos, Razonar abstractamente y cuantitativamente, Construir argumentos viables y criticar el razonamiento de otros, Modelizar con matemáticas, Usar herramientas apropiadas estratégicamente, Poner cuidado a la precisión, Buscar y usar la estructura, Buscar y expresar regularidad en razonamientos repetidos*. (National Governors Association Center for Best Practices, Council of Chief State School Officers, 2012). Una comparación de coincidencias y diferencias entre el NCTM y el CCSSM en cuanto a procesos se puede ver en NCTM (2010, p. 12 y sgtes.).

Hay, por otro lado, una diferencia relevante en los procesos aquí seleccionados. En el currículo costarricense se selecciona *Plantear y resolver problemas*, igual que el NCTM (no insiste en el planteamiento, pero es implícito en el enfoque del NCTM), bien que se acentúa la resolución de problemas en contextos reales, que involucra necesariamente la modelización. Se asume aquí que la dimensión realista y la modelización (matematización) son imprescindibles para darle a la resolución de problemas un sentido más vigoroso. Se coincide con English, Lesh y Fennewald (2008) cuando ven los modelos y la modelización como una perspectiva notable para relanzar la resolución de problemas. En este currículo la modelización es parte de *Plantear y resolver problemas*, mientras que en el NCTM se incluye dentro del proceso que llaman "Representaciones". Puesto que los procesos actúan de manera coligada, no es tan relevante dónde se coloca la modelización.

La necesidad de introducir en el currículo las capacidades matemáticas y no sólo contenidos se expresa en la idea de "estándares de proceso" en el NCTM, de "competencia matemática" en PISA, "Estándares para la práctica matemática" del CCSSM, también se refleja en la propuesta del *National Research Council* de los Estados Unidos (2003): *Comprensión conceptual, Fluidez en procedimientos, Competencia estratégica, Razonamiento estratégico, Disposición productiva*. Igual sucede con los "procesos clave" del Currículo Nacional de Matemáticas en el Reino Unido: *representar, analizar, interpretar y evaluar*. Singapur, otro ejemplo, también usa procesos en su currículo: *razonamiento, comunicación y conexiones, habilidades de pensamiento y heurísticas, y aplicación y modelización* (Soh, C. K., 2008).

Se considera más eficaz trabajar con procesos y no con competencias directamente, pues en primer lugar, se desea privilegiar las acciones a desarrollar en la acción de aula. Si el propósito en juego fuera la evaluación del sistema educativo (como pretende PISA), el uso exclusivo de competencias sería apropiado. Pero aquí se trata de algo distinto: se busca aportar instrumentos a realizar en la acción de aula que promuevan esas competencias. Y ese es el sentido de la introducción de procesos matemáticos.

En segundo lugar, colocados los cinco procesos del currículo costarricense directamente en asociación con la acción de aula, su selección y la forma como se conceptúan ofrecen una perspectiva propia de lo que se asume adecuado promover en Costa Rica en esta etapa histórica. Con estos procesos se ordenan, integran o enfatizan las competencias matemáticas (las 8 de PISA 2003 o las 7 de PISA 2012) de una manera específica. Estos elementos expresan también una perspectiva de lo que se considera debe ser la Educación Matemática (por ejemplo, al destacar la relación entre resolución de problemas y modelización).

En tercer lugar, el trabajo con estos cinco procesos y no ocho o siete competencias simplifica y facilita la implementación del currículo (siete u ocho parámetros son más difíciles de incorporar en la labor de aula).

La utilización específica de las competencias por medio de los procesos de este currículo se hace de varias maneras. En un primer momento se estableció un proceso que refiere a dos competencias. La competencia *El diseño de estrategias para resolver problemas* no supone necesariamente la competencia *Matematización*. Son competencias independientes. Sin embargo, se insiste: se busca aquí que exista una relación

estrecha entre ambas. Por lo tanto, se sugiere que una buena parte de los problemas que se trabajen sea contextualizada y llame al uso de modelos.

Por otro lado, se plantea otro proceso que involucra dos competencias que aparecían en PISA 2003: *Pensamiento y razonamiento matemático* y *Argumentación matemática*. Se propone trabajar con actividades que integren la búsqueda por robustecer éstas de manera asociada. Para PISA 2012 esas competencias se integraron en una sola.

El proceso *Conectar* no se asocia de manera directa a una competencia o a una combinación de ellas, no obstante pone en movimiento acciones cognitivas asociadas a varias competencias. Su realización en el aula promueve valiosas relaciones significativas entre las áreas matemáticas pero también con otras materias, y refuerza la asociación con contextos reales. Esto ha sido considerado esencial para la educación costarricense.

Comunicar y Representar sí se vinculan directamente con competencias mencionadas. En el caso de *Comunicar* posee un alcance más amplio: se pretende desarrollar actividades de comunicación donde participen las Matemáticas y otros conocimientos.

Con este esquema se operacionalizan los procesos en el plan de estudios: se seleccionan tópicos que favorecen mejor la participación de procesos y se dan indicaciones puntuales y generales para realizarlos.

Niveles de complejidad

PISA 2003 señaló tres niveles de complejidad en las situaciones donde participan las competencias matemáticas:

(...) organizó las actividades cognitivas que engloban las competencias antes mencionadas en torno a tres *grupos de competencias* denominados: *grupo de reproducción*, *grupo de conexiones* y *grupo de reflexión*. Estos grupos han demostrado servir de base adecuada para el análisis del modo en que las distintas competencias son requeridas como respuesta a los diferentes tipos y niveles de demandas cognitivas planteados por los diferentes problemas matemáticos. (OECD, 2005, p. 40-41).

En este currículo no se asumen los términos “reproducción”, “conexión” y “reflexión” como tipos de competencias. Se usan como niveles de complejidad de los problemas. Es decir, como niveles distintos de demandas cognitivas en los problemas que se presentan en el aula.

En PISA 2012 se abandonan los conceptos “reproducción”, “conexión” y “reflexión” y se pasa a un enfoque más cercano a los “procesos” que intervienen en la matematización: “formular, emplear, interpretar.” (OECD, 2010a, p. 14). Para los propósitos de este currículo se preserva el sentido de las complejidades que se derivó de aquellos términos en PISA 2003. Aquí se entenderán no como grupos de competencias sino como niveles de complejidad caracterizados de manera precisa, lo que resulta pertinente para el currículo.

Demandas cognitivas y capacidades matemáticas distintas participan de manera combinada y específica en cada uno de estos niveles.

Trabajar en distintos niveles de complejidad es primordial en un enfoque en que se busca el desarrollo de capacidades cognitivas superiores: "La consecución de competencias en el aula debe buscar su desarrollo mediante el avance y la progresión en los niveles de cada una de ellas, avance que **se lleva a cabo mediante secuencias de tareas de complejidad creciente**". (Rico y Luptiáñez, 2008, p. 153). Énfasis añadido.