Idées directrices pour analyser les problèmes de compréhension dans l'apprentissage des mathématiques[1]

Raymond Duval
Université Côte D'Opale
France
duval.ray@wanadoo.fr

Abstract

In order to analyze the processes of comprehension underlying any mathematical activity we must start from the epistemological and cognitive characteristics that are specific to mathematics. The mathematical activity is based on transformation of semiotic representations in other semiotic representations. Solving problem in a mathematical way always requires mobilizing, explicitly or implicitly, two registers of semiotic representation. We can then observe the various kinds of threshold of comprehension that block many students at different levels of the curriculum.

Firstly there are two kinds of transformations of semiotic representations that are quite different sources of difficulties. But one ignores or rejects the one that requires shifting the register within a representation is produced for two reasons. Either because only one kind of transformation is important from a mathematical point of view, or because one believes that a multirepresentation, now obvious with computers, removes any difficulty of the representation conversion, as it is the case in other fields of knowledge. Secondly, for understanding when one learns mathematics one needs first to recognize and not to justify. The ability to solve problems, to explore them in a mathematical way, to anticipate possible treatments, to check by oneself the validity of a procedure is basically the ability to recognize the same object in two different representations or different objects in almost similar representations. This ability requires a coordination of various registers separated by cognitive gaps. The conceptualization in mathematics emerges only from this coordination.

We take several examples to give an insight both of the specific problems of comprehension in learning mathematics and of the cognitive way of analyzing them. And we highlight the need of an explicit and global cognitive approach in mathematics education so that learning mathematics means for all students to develop their ability to think, to see, to imagine and to organize information.

Key words

Mathematics education. Registers of semiotic representations. Problem analysis. Cognitive analysis.

L'apprentissage des mathématiques soulève des problèmes de compréhension qu'on ne rencontre pas dans les autres domaines de la connaissance. On y observe en particulier

[1] Este trabajo corresponde a una conferencia paralela dictada en la XIII CIAEM, celebrada en Recife, Brasil el año 2011.

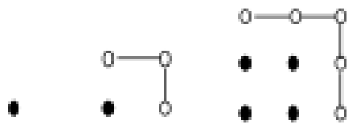
deux types de difficultés radicalement différents. A l'échelle de séquences d'activités sur quelques semaines, ou parfois sur une seule séance, il y a les difficultés locales. Elles sont relatives à chaque nouvelle notion ou chaque nouvelle procédure introduite. A l'échelle d'une année, et surtout d'un cycle ou du curriculum, il y a des difficultés globales et récurrentes. Elles sont relatives à la résolution de problème, au raisonnement, à la visualisation géométrique, à la visualisation graphique, à l'absence de transfert de ce qui est supposé avoir déjà été acquis à de nouvelles situations, à l'application de connaissances à la réalité. Ces difficultés récurrentes ne sont jamais surmontées par la grande majorité des élèves, et on ne les rencontre qu'en mathématiques, ou lorsqu'il faut utiliser des mathématiques. Pour en comprendre les raisons profondes, il ne suffit pas de regarder ce que les élèves font, ou ce qu'ils ne parviennent pas à faire, ou encore ce qu'ils réussissent à faire collectivement dans les tâches et les problèmes qu'on leur donne, il faut d'abord *s'interroger sur ce qu'est la connaissance mathématique* par rapport aux autres types de connaissance.

La situation épistémologique des mathématiques est totalement différente de celle des autres domaines de connaissance. Cela tient au rôle central que les représentations sémiotiques y jouent à la fois pour accéder aux objets de connaissance et pour le progrès des connaissances en mathématiques. En effet, l'accès aux objets mathématiques (nombres, fonctions, propriétés géométriques, etc.) se fait uniquement en utilisant des représentations sémiotiques, et non pas en partant de données qui auraient été observées ou constatées perceptivement, ou encore enregistrées à l'aide d'instruments, comme dans les autres domaines de connaissance scientifique. Mais surtout, l'activité mathématique de recherche et de preuve consiste à transformer des représentations sémiotiques, données dans le contexte d'un problème posé, en d'autres représentations sémiotiques. Et, de ce point de vue, une représentation sémiotique n'est intéressante que dans la mesure où elle peut se transformer en une autre représentation, et non pas en fonction de l'objet qu'elle représente. C'est pourquoi il faut partir de ce qui caractérise épistémologiquement et cognitivement la connaissance mathématique pour analyser les problèmes de compréhension dans l'apprentissage des mathématiques : la transformations de représentations sémiotiques en d'autres représentations sémiotiques. Et là une observation fondamentale s'impose immédiatement : la résolution mathématique d'un problème exige qu'on mobilise, explicitement ou implicitement, au moins deux types de représentations totalement différents. D'où une question qui nous conduit à la première idée directrice : toutes les transformations de représentations sémiotiques sont-elles cognitivement de même nature et d'un même intérêt du point de vue mathématique ?

1 Séparer deux types de transformations de représentations sémiotiques

Prenons l'exemple d'une activité d'exploration très simple : le développement de configurations polygonales d'éléments, qui peuvent être des jetons ou des points, en suivant une règle simple. La question est de prévoir le nombre d'éléments pour n'importe quelle configuration de la suite ainsi générée.

Une première règle de développement de manière à obtenir une disposition en carré



Une variante par « encerclement »

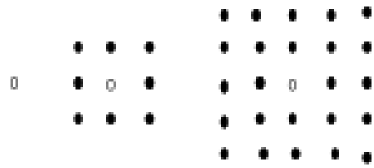


Figure 1: Deux variantes d'un même problème.

2 Analyse des transformations de représentations sémiotiques produisant la solution du problème

Nous allons nous limiter ici à la seule activité de description numérique sans aller jusqu'à sa généralisation dans une écriture littérale. Il y a évidemment deux descriptions numériques possibles : l'une qui consiste à dénombrer chaque configuration et l'autre qui se focalise sur l'augmentation d'une configuration à la suivante.

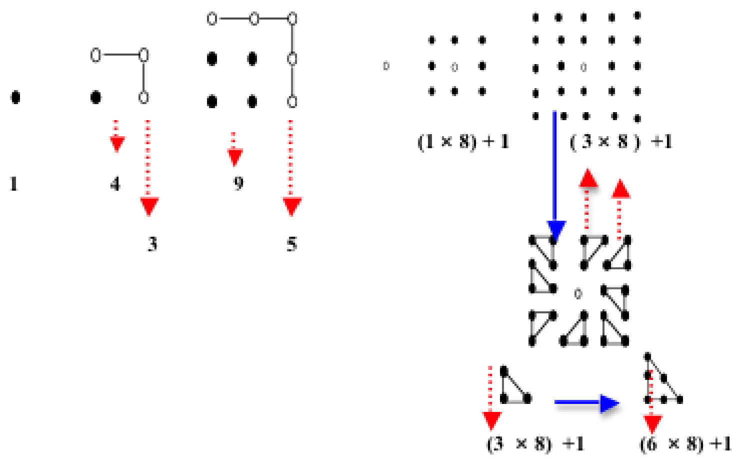


Figure 2: Analyse des transformations de représentation

Arranger matériellement ou dessiner les configurations successives n'est pas une activité mathématique, ni à proprement parler une transformation de représentation. On se contente d'appliquer une règle de production en fonction d'un critère perceptif. L'activité mathématique commence avec le dénombrement des élément, c'est- à dire avec leur description numérique que nous avons marquée par des flèches rouges en pointillé. Or ce dénombrement implique la mobilisation explicite d'un autre type de représentation sémiotique. Regardons maintenant la variante par « encerclement ». On voit qu'un deuxième type de transformation devient nécessaire. Il faut d'abord transformer les dispositions carrées d'élements en une configuration de sous-configurations triangulaires. Puis il faut regarder comment ces sous-configurations triangulaires se développent.

On remarquera qu'ici on ne change pas de type de représentation. Nous avons marquées ces transformations par deux flèches bleues en trait plein. C'est ensuite seulement qu'on peut décrire numériquement le développement (flèches rouges en pointillé).

Il y a évidemment d'autres variantes de cette activité et certaines conduisent à la formule qui donne le nombre d'hexagones réguliers pavant un disque de rayon n (Duval 2005a). Mais ces deux variantes suffisent pour voir la différence entre les deux types transformations qui constituent l'activité mathématique et que nous appellerons respectivement des conversions et des traitements. L'analyse de cet exemple permet de faire une seconde observation essentielle. Les traitements dépendent entièrement du type de représentation utilisé. Ici, on peut observer un traitement spécifique aux figures. Il faut décomposer la disposition carrée en sous-configurations triangulaires. C'est une opération de visualisation, qui n'est a priori guidée par aucun concept, et qui est la même que celle mise en oeuvre dans la célèbre preuve chinoise du théorème de Pythagore. Avec d'autres types de représentation sémiotique, les traitements sont évidement totalement différents. Ainsi les algorithmes de calcul pour les quatre opérations ne sont pas les mêmes avec un écriture décimale des nombres ou avec une écriture fractionnaire.

3 Deux sources indépendantes et profondes de difficulté pour les élèves

D'un point de vue mathématique, il y a une très grande réticence à séparer ces deux types de transformations. Et cela pour deux raisons différentes. Tout d'abord ce sont les traitements qui sont importants,et plus particulièrement les traitements faits avec des types de représentation qui permettent de développer des algorithmes. Ensuite on pense que la conversion ne peut plus être une difficulté avec la juxtaposition de de représentations différentes, comme cela devient le cas avec les ordinateurs, ou qu'elle serait la conséquence de la compréhension des concepts mathématiques. Ainsi presque toutes les recherches faites sur l'enseignement des mathématique ne prennent jamais la peine de séparer ces deux types de transformations comme pouvant être deux variables cognitives essentielles pour l'enseignement.

Quand on organise les observations de manière à pouvoir isoler ces deux variables, on voit alors que la conversion constitue le premier obstacle pour les élèves. Cela bien sûr implique méthodologiquement que l'on fasse varier le sens de conversion. Depuis que avons mis en oeuvre cette méthode en 1988, cette difficulté est régulièrement observée à tous les niveaux de l'enseignement général et dans les différents domaines des mathématiques enseignées (Duval 1988, 2004, 2006). Elle constitue le premier seuil de compréhension à franchir. Et ne pas franchir ce seuil entraîne un handicap sérieux dans la résolution de problème, que l'on peut observer non seulement en géométrie, mais aussi pour la mise en équations, ou pour l'application de connaissances mathématiques à des situations réelles.

Les difficultés liées au traitements ne sont évidemment pas les mêmes selon le type de représentation avec lequel on travaille. Car chaque type de représentation offre des possibilités spécifiques de transformation interne des représentations. Il y a donc ici autant de seuils de compréhension à franchir qu'il y a de types de représentation utilisés non pas seulement pour enseigner les mathématiques mais pour faire une démarche mathématique. Reprenons l'exemple de tranformation des figures carrés en un assemblage carré de sous-figures triangulaires. Voir heuristiquement une figure en géométrie exige que l'on puisse effectuer soi-même ce traitement. Sans cela on restera bloqué. Or nous avons pu mettre en évidence tous les facteurs gestaltistes qui très souvent emêchent de voir ou de reconnaître cette reconfiguration (Duval 1995b). La connaissance des figures de bases et de leurs propriétés ne sert absolument à rien pour cela. Elle laisse la très grande majorité des élèves aveugles.

4 Les registres de représentation

La notion de registre s'est imposée pour pouvoir rendre compte de ces deux types de tranformations de représentation sémiotiquen qui constituent la spécificité épistémologique du travail mathématique, et du fait qu'ils restent complétement incompris par la grande majorité des élèves après de nombreuses années d'enseignement. On appelle registre tous les types de représentations ou, plus exactement, tous les systèmes de représentation sémiotique, qui permettent des opérations de transformation interne de représentation , c'est à dire sans avoir à recourir à d'autres types de représentation ou à des sources externes d'information. Toutes les représentations sémiotiques, et en particulier les représentations iconiques, celles dont le contenu a une certaine ressemblance à l'objet représenté, ne relèvent pas d'un registre.

Cela soulève évidemment la question de savoir quels sont les registres de réprésentations. On se contentera de dire ici que la langue naturelle reste un registre de représentation, même si ce n'est pas un registre qui permet de développer des algorithmes et si elle reste le plus souvent à l'arrière plan de l'activité mathématique. Pour le montrer, il suffit de prendre l'exemple suivant en se demandant si ces quatres représentations graphiques représentent le même type d'objet mathématique : si oui lequel, et si non lesquels ?

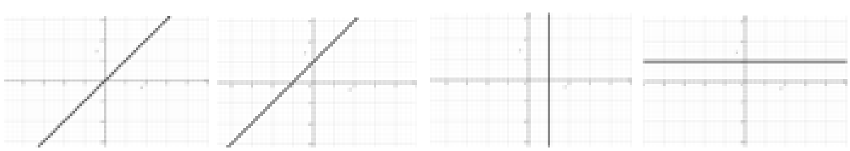


Figure 3: Comparaison de quatre représentations graphiques produites dans le même registre

Il y a quatre réponses différentes. Et seule la première est immédiatment évidente pour les élèves et tous les adultes cultivés non mathématiciens.

Perceptivement on reconnaît au premier coup d'oeil des droites, dont deux ont exactement la même orientation.

Iconiquement on voit que deux « montent » comme une route, que la troisième est « verticale » et la quatrième est « horizontale » ou « plate ». Et, pour souligner la ressemblance, on peut accompagner cela de gestes de la main !

Algébriquement, en mobilisant le registres des écritures symboliques, on pourra peut-être dire que les quatres correspondent à l'écriture $y = ax + b$, mais il sera peut-être plus difficile de donner l'écriture particulière de chacune ou alors il faudra se livrer à des calculs qui dureront souvent 20 minutes et au terme desquels on se trompera sans pouvoir s'en apercevoir. Car alors le graphique sert à rien !

Mathématiquement, pour « voir » que trois graphiques sont les graphes d'une fonction, mais non pas le troisième, il faut mobiliser, explictement ou implictement le registre de la langue dans lequel s'énonce la définition qui donne le critère distinctif : *pour tout* élément de l'ensemble de départ correspond *au plus* un élement dans l'ensemble d'arrivée. Car le langage naturel reste un registre fondamental en mathématiques pour la simple raison que la négation d'abord puis la quantification sont les possibilités de traitement qui caractérisent la langue !

Seule la première représentation graphique est immédiatment évidente pour les élèves et tous les adultes cultivés non mathématiciens. La seconde est facilement accessible. Mais la troisième, et la quatrième ? Or ces deux réponses ne peuvent pas venir à l'esprit si on ne mobilise pas le registre des écritures algébriques et celui de langue naturelle.

On ne peut pas vraiment faire de mathématiques si on ne mobilise pas explicitement ou implicitement deux registres de représentations et si ne on peut pas passer plus ou moins spontanément de l'un à l'autre. En d'autres termes l'activité mathématique ne se fait pas au niveau de l'utilisation d'un registre mais *à celui du fonctionnement en synergie d'au moins deux registres*. Et cela n'est plus une question de « contruction » de connaissances connaissances, une question de choix de représentation sémiotique, mais une question proprement cognitive de coordination des registres. Et cette question nous conduit à la deuxième idée directrice.

5 Les processus cognitifs propres à l'activité mathématique et la distance cognitive entre les registres.

La difficulté que les élèves rencontrent pour passer d'un registre de représentation à un autre peut se formuler dans les deux questions suivantes. Comment reconnaitre un même objet mathématique (nombre, fonction, et) dans deux représentations différentes ? Comment savoir si deux représentations, presque totalement semblables, représentent un même objet ?

En dehors des mathématiques, ce n'est pas véritablement un problème cognitif. Car il y toujours la possibilité d'avoir un accès non sémiotique aux objets représentés, soit directement ou indirectement par des instruments ou des représentations iconiques (photos,vidéos). On peut donc comparer chaque représentation sémiotique à ce qu'elle représente. Or ce n'est pas possible en mathématiques et cette limitation nous renvoie à l'exigence épistémologique qui est à la base de toute connaissance et donc de toute compréhension : comment ne pas confondre l'objet et l'une de ses représentations si les représentations sémiotiques sont les seuls moyens d'accès possibles aux objets ? C'est ce que nous avons appelé le paradoxe cognitif des mathématiques.

6 Une distinction clé pour l'analyse des représentations sémiotiques

La distinction entre le contenu d'une représentation et l'objet représenté est essentielle pour expliquer le progrès de connaissance que l'activité mathématique apporte comme Frege l'a montré (Duval 2008) ! Deux représentations d'un même objet n'ont pas du tout le même contenu. Cela implique évidemment que l'on puisse reconnaître un même objet dans deux représentations différentes, surtout si elle ne sont pas produites dans le même registre. Or c'est cela qui arrête les élèves et qui constitue la première difficulté cognitive des mathématiques. Avant même de chercher quelles activités proposer aux élèves pour faciliter cette reconnaissance, il faut s'interroger sur les processus cognitifs qui permettent cette reconnaissance. Et là l'idée même de contenu d'une représentation doit être précisée. Le contenu d'une représentation, que ce soit une phrase (énonçant une définition ou une instruction), une figure en géométrie, une équation, ou même un tableau, fusionne des unités de sens qui ne ne relèvent pas toutes du même niveau d'organisation.

Prenons l'exemple des figures en géométrie. Le problème n'est pas la reconnaissance de formes correspondant aux polygones remarquables (triangles, carrés, parallélogrammes, etc.) dans une configuration complexe, mais celui de la déconstruction dimensionnelle des formes qui conduit à distinguer des unités figurales 2D, 1D ou 0D qui sont comme autant d'unités de sens à distinguer ou à reconnaître dans une figure.

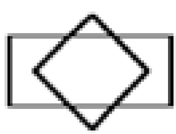
Figure 2D *Comment la voir ?*	Deux décompositions visuellement incompatibles *en unités figurales 2D*		Déconstruction dimensionnelle en *unités figurales 1D*
	Assemblage par *juxtaposition de* **5** formes polygonales : deux triangles, deux pentagones, un hexagone	Assemblage par *superposition de* **3** polygones réguliers	le réseau des droites support : **8** côtés que l'on peut prolonger en sortant des contours fermés

Figure 4: Les différentes unités figurales d'une figure (sans compter les points remarquables)

Ainsi l'une des grandes illusions de l'enseignement de la géométrie, dès le niveau de l'enseignement primaire, est de faire comme si la déconstruction dimensionnelle des formes, qui est requise par les premières définitions de propriétés était normale, alors qu'elle est contre-perceptive (Duval, 2005b).

Nous pouvons maintenant indiquer le processus cognitif de reconnaissance d'un même objet dans deux représentations différentes. Il consiste dans la mise en correspondance entre certaines unités de sens des contenus respectifs de ces deux représentations.

Ce qui, évidemment suppose que l'on soit capable de discriminer les différentes unités de sens possibles qui constituent le contenu de chaque représentation. Ainsi , dans le deuxième schéma de la Figure 2 ci-dessus, les mises en correspondances à faire entre les unités figurales et les expressions numériques sont marquées par les quatre flèches rouges en traits pleins. L'élève qui ne prend pas conscience de ces mises en correspondance ne peut ni réussir à décrire la progression, ni même à comprendre la réponse, car il ne peut pas voir pourquoi les deux représentations sont deux représentations de la même progression.

Reprenons maintenant le deuxième exemple, celui de la reconnaissance de ce que les différents graphiques représentent (supra Figure 3). Elle repose sur deux mises en correspondance différentes qui mobise deux couples de registres : {Graphiques, écriture symbolique d'une relation} et {Graphiques, langue naturelle}. Pour le premier couple, la mise en correpondance à faire est entre les valeurs visuelles du graphique et l'écriture symbolique de la relation. Pour le second, il s'agit de distinguer les graphiques qui représentent des fonction et ceux qui ne le sont pas, ou de décrire le graphique en fonction de l'équation qui la représente. Or, de manière étrange, l'introduction du registre des graphiques cartésiens est faite au coup par coup, selon les objets enseignés. Ainsi leur première introduction est pour représenter la fonction linéaire . Cela revient à passer sous silence le fonctionnement des représentations graphiques comme visualisation. Un graphique ne peut alors plus être distingué d'un graphe. En outre, la fonction linéaire étant souvent introduite en relation avec la proportionalité, cela revient à privilégier une seule unité de sens dans les équations : le coefficient.

7 La nécessité de tâches de reconnaissance

Pour que les élèves prennent conscience des différentes unités de sens possibles dans le contenu des représentations et pour qu'il puissent reconnaître les correspondances et les non correspondances entre deux représentations de registre différents, il faut des tâches de reconnaissane qui ne sont ni les exercices classiques ni des problèmes. Ces tâches doivent organiser *l'observation en parallèle des variations de contenus de représentation dans deux, ou même trois registres à la fois.*

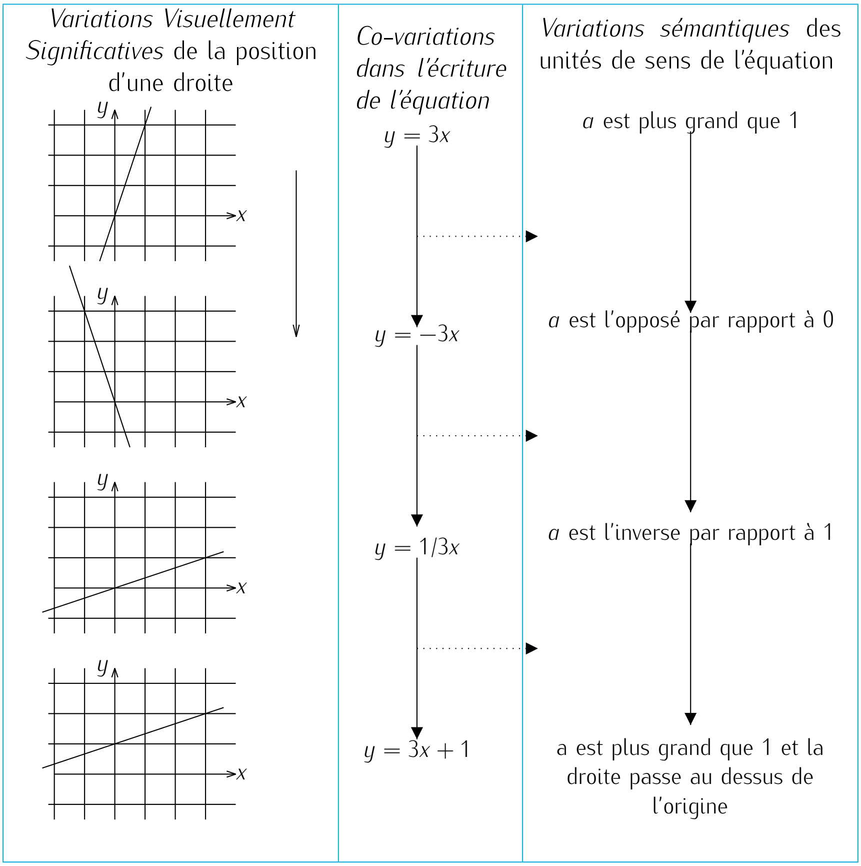


Figure 5: Organisation d'une tâche de reconnaissance.

L'organisation d'une tâche de reconnaissance requiert que l'on respecte deux conditions pour les variations d'une représentation dans le registre de départ. Les variations visuelles du graphique doivent correspondre à des contrastes visuels, car sémiotiquement les unités de sens se distinguent par des oppositions. Et il faut respecter la règle fondamentale de la méthode expérimentale qui consiste à ne faire varier qu'un seule unité de sens à la fois et non pas plusieurs en même temps. L'observation consiste alors à anticiper, ou à reconnaître si on propose plusieurs choix, les variations correlatives que chaque variation dans le registre de départ entraîne dans le registre d'arrivée.

Il s'agit évidemment là d'une activité d'exploration qui, à la différence de celles présentées plus haut (Figures 1 et 2) n'est pas d'abord centrée sur les objets mathématiques représentés. Mais elle a ceci de commun avec toutes les analyses des exemples que nous avons présenté : on ne présente jamais une représentation ou un problème sans en présenter des variantes et sans faire réfléchir les élèves sur ces variations.

La langue naturelle a une place particulière et importante dans l'enseignement des matthématiques où on fait deux utilisations complétemment différentes : l'une selon les pratiques spontanées de communication, d'explication ou d'argumentation, et l'autre selon les exigences propres aux définitions et au raisonnement mathématiques (Duval 1995a). Or cela est une source d'incompréhension entre les élèves et les enseignants chaque fois que la langue est utilisée soit comme registre de départ pour poser des problèmes soit comme registre de traitement, en géométrie, pour justifier ou prouver. Pour faire prendre conscience des différences de fonctionnement discursif entre ces deux utilisations de la langue naturelle, il faut recourir à des représentations auxiliaires qui donnent aux élèves un moyen de visualiser et de contrôler eux-mêmes les opérations de traitement des énoncés qui sont propre aux mathématiques. C'est en sens que nous avons fait travailler sur le raisonnement déductif en géométrie fait dans la langue naturelle, la conversion se faisant ensuite des représentations auxiliaires vers la formulation en langue naturelle (Duval 1991, 2007).

L'enjeu de toutes les activités visant à faire prendre conscience des correspondances de contenu entre des représentations de registres différents et, aussi, du fonctionnement propre à chaque registre est le développement chez les élèves de la coordination des registres. C'est la condition nécessaire pour que les différents registres de représentation sémiotique fonctionnent cognitivement en synergie. Sans cette coordination les élèves ne peuvent pas comprendre, c'est à dire reconnaître de quoi on parle ou prendre la moindre initiative. De plus, en mathématiques, la conceptualisation émerge seulement au niveau de cette coordination, en raison même du paradoxe cognitif qui leur est propre.

8 L'application des mathématiques à la réalité : séparer deux « modélisations» confondues dans des représentations mixtes

Un changement important s'est opéré dans l'enseignement des mathématiques au cours de ces quinze dernières années. On donne la priorité à *une approche empirique des objets étudiés* dans le contexte de problèmes correspondant à des situations réelles. Cela soulève la question importante suivante : *Passe-t-on directement de données* constituant une situation réelle à l'utilisation de connaissances mathématiques et donc de représentations sémiotiques permettant de modéliser la situation, et inversement ?

Pour analyser les processus cognitif de ce passage nous allons prendre une exemple classique, celui de l'utilisation du théorème de Thalès. L'analyse cognitive montre que l'utilisation de ce théorème pour calculer des distances inacessibles mobilise explicitement ou implicitement trois types de représentations que nous devons séparer. Et deux correspondent à des modélisations différentes — ici la schématisation de la situation de visée et la visualisation géométrique — pour pouvoir appliquer le théorème et pour reconnaître comment l'appliquer.

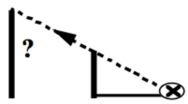
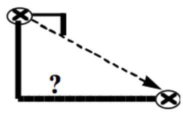
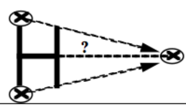
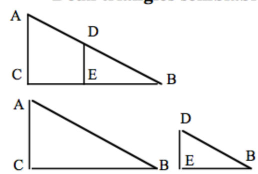
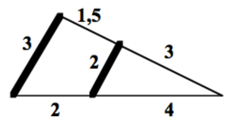
	Visualisation Iconique	Visualisation Géometrique
Image, plan, photo...	Schématisation DES TROIS SITUATIONS DE VISÉE D'UN POINT à partir d'un autre *pour relever des mesures accessibles.*	Configurations géométriques
Montrent les **positions respectives** de **points de repères** sur un site ou un paysage (immeubles, phares, objets éloignés (bateau))	Visée d'un sommet à partir du sol :  Visée d'un objet éloigné à partir d'un sommet  *Double visée* à partir de deux point distants 	**Deux triangles semblables**  Avec **l'hypothèse du parallélisme** : **sept égalités de rapport** 

Figura 6: Séparation des représentations mobilisées pour utiliser un théorème dans la réalité

Dans beaucoup de manuels on trouve maintenant des représentations mixtes, qui superposent une photo et/ou un des trois schémas avec une figure géométrique codée. Et cela est donné comme s'il s'agissait d'une seule et même représentation ou comme si les schémas et les figures étaient des représentations équivalentes !

Les deux visualisations superposées en une représentation mixte renvoient chacune à des fonctionnement cognitifs différents. Elles remplissent également des fonctions différentes. Ainsi l'image schématisée peut être convertie en une description verbale des phénomènes n'ayant rien de commun avec l'énonciation mathématique des propriétés du théorème. Cela entraîne une conséquence importante pour l'enseignement. Donner d'emblée des représentations mixtes ou se limiter aux seules figures géométriques, même dans une approche empirique ou pragmatique, c'est maintenir chez les élèves un fossé cognitif infranchissable entre les « connaissances» géométriques et les situations réelles dans lesquelles ils seront appelés à les appliquer.

Des activités portant sur la production de l'image schématisée et sur son articulation avec la figure d'un théorème sont donc aussi fondamentales que celles portant sur les calculs à faire pour appliquer un théorème. Car on ne peut pas laisser aux élèves la charge de deviner les différentes situations et les différentes représentations à mettre en relation pour qu'ils deviennent capables de reconnaître où et comment appliquer des connaissances mathématiques.

Cet exemple nous conduit à la troisième idée directrice pour l'analyse de la compréhension des mathématiques en relation avec des situations réelles, physiques, économiques ou autres. L'application des mathématiques à la réalité n'est jamais directe. Elle requiert la supeprosition de deux modélisations différentes qu'il faut soigneusement séparer, l'une non mathématique et l'autre mathématique. L'enjeu de cette séparation est un développement de l'imagination et de la compétence pour savoir comment appliquer des connaissances de géométrie dans des situations totalement différentes.

9 Conclusion

Il y a deux approches totalement différentes pour analyser les problèmes de compréhension que l'enseignement des mathématiques soulève.

La première est celle du point de vue mathématique. Elle se focalise sur l'ordre des contenus et des procédures mathématiques à introduire et, surtout, elle ne prend pas en compte la situation épistémologique à part des mathématiques. On part de l'idée que les processus cognitifs d'acquistion seraient les mêmes en mathématiques que dans les autres domaines de connaissance. La seconde est une approche cognitive qui prend en compte la situation épistémologique particulière des mathématiques dans la manière d'accéder aux objets de connaissance, dans les méthodes de travail et dans les démarches de preuve.

La différence profonde entre les deux approches porte sur la nature du travail mathématique et du fonctionnement de la pensée en mathématiques. Consistent-ils en la mobilisation de « concepts » et en l'utilisation des capacités communes de raisonnement et de voir, de visualiser ou, au contraire, dépendent-ils du type des représentations sémiotiques mobilisées et des démarches de pensée spécifiques aux mathématiques ?

En réalité les deux approches ne considèrent pas le même côté de l'activité mathématique. Cela apparaît nettement dans l'analyse de ce qu'on appelle de manière souvent trop générale la « résolution de problème » et dans l'explication des difficultés de compréhension. Du point de vue mathématique, ce qu'on analyse, c'est toujours la résolution d'un problème posé et, pour cela, *on part de sa solution* pour expliciter les différentes connaissances et procédures permettant de le résoudre. L'analyse est donc rétroactive et chaque fois particulière au problème posé. Et on tend à expliquer toutes les difficultés de compréhension comme étant des difficultés spécifiques aux concepts et aux objets enseignés. Du point de vue cognitif, ce qu'on analyse ce sont les processus qui permettent de reconnaître soi-même les connaissances mathématiques à utiliser dans le cadre du problème posé, quel qu'il soit. Car il ne sert à rien qu'on vous explique la solution, si vous ne voyez pas comment vous auriez pu y penser vous-même. Le plus souvent, d'ailleurs, les élèves ne sauront pas comment transférer à un problème proche. En d'autres termes *la question cognitive porte sur les gestes intellectuels qui font le travail mathématique*, avant même que l'on ait la moindre idée de la solution cherchée, quel que soit le problème. C'est là que les véritables difficultés surgissent. Ce sont les difficultés récurrentes qui viennent de l'incompréhension ou de l'ignorance des gestes intellectuels propres aux mathématiques.

Aussi bien dans l'organisation des programmes que dans les recherches sur l'enseignement, l'approche mathématique est la seule qui est réellement prise en compte. Elle est d'emblée d'emblée considérée comme évidente, même si on se soucie de l'organisation des activités en classe. Mais cela se fait d'abord du point de vue des enseignants. Le travail des élèves n'est envisagé que localement, par rapport à l'organisation des activités. Et on ne se pose pas vraiment la question : en quoi l'apprentissage des mathématiques aide – t-il les élèves à développer leur capacité à penser, à voir, à imaginer, à organiser l'information, au delà de l'acquisition de telle connaissance ou telle technique particulières ?

Pour pouvoir répondre positivement à cette question, ou plus exactement que pour la grande majorité des élèves eux-mêmes puissent répondre eux-mêmes à cette question, il faut voir et enseigner les mathématique autrement (Duval, 2011). En d'autres termes, il faut que l'enseignement montre et prenne en charge l'autre face de l'activité mathématique.

Bibliographie et références

Duval, R., (1988). Graphiques et Equations : larticulation de deux registres. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *1*, 235-255

Duval, R. (1991). Structure du raisonnement déductif et apprentissage de la Démonstration. *Educational Studies in Mathematics*, *22(3)*, 233-261.

Duval, R. (1995a). *Sémiosis et pensée humaine*. Berne, Peter Lang

Duval, R.(1995b). Geometrical Pictures : kinds of representation and specific processing. In (Ed. R. Suttherland & J. Mason), *Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematics Education* (Ed. R. Suttherland & J. Mason). Springer, Berlin, 142-157

Duval R (2004) *Los problemas fundamantales en el Aprendizaje de las Matematicas y las Formas superiores en el Desarrolo cognitivo*. Cali : Universidad del Valle.

Duval, R.(2005a). Transformations de représentations sémiotiques et démarches de pensée en mathématiques. *Actes du XXXIIe colloque COPIRELEM*. IREM, Strasbourg, 67-89.

Duval, R. (2005b). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, (10), 5-53.

Duval, R. (2006) The cognitive analysis of Problems of comprehension in the learning of mathematics. In (A Saenz-Ludlow, and N.Presmeg (Eds.), *Semiotic perspectives on epistemology and teaching and learning of mathematics*, Sépcial issue, *Educational Studies in Mathematics* , 61, 103-131

Duval, R. (2007). Cognitive functioning and the understanding of the mathematical processes od proof. In (Ed. P. Boero) *Theorems in schools*. Rotterdam/Tapei, Sense Publishers, 137-161

Duval, R. (2008). Eight Problems for a Semiotic Approach in Mathematics Education. In (Eds. L. Radford, G. Schubring, F. Seeger*) Semiotics in Mathematics Education ; Epistemology, History, Classroom and Culture*. Sense Publishers, 39-61

Duval, R. (2011). *Ver E Ensinar a matemática de Outra forma.* (I) Entrar no modo matemático de pensar : os registros de repreentações semióticas. Sao Paolo : Proemeidtora.