Paseo por el universo de las irracionalidades aritméticas[1]

Carlos Sánchez Fernández
Universidad de la Habana
Cuba
csanchez@matcom.uh.cu

Resumen[2]

En este brevísimo paseo por el universo de los números irracionales se pretende mostrar cómo un tema tan elemental como la aritmética presenta numerosas curiosidades que pueden ofrecerse de forma atractiva a estudiantes del nivel preuniversitario y de los primeros años de las universidades.

Nuestro objetivo no es profundizar en temas esotéricos, enrevesados; ni nos pondremos a “vagabundear” entre fórmulas y ecuaciones. No pretendemos mostrar cómo se hacen cuentas con los números, nos interesa más hacer cuentos sobre los números, sobre sus propiedades maravillosas y las desafiantes conjeturas aun sin solución. Pasearemos entre irracionalidades enteras, algebraicas y trascendentes; observaremos de cerca a los números metálicos y a sus vecinos los números plásticos. Siempre con la guía de la Historia de la Matemática. Nos gustaría que participaran reflexivamente y que con las ideas extraídas que consideren adecuadas después condimenten sus clases para que sus alumnos piensen y amen la matemática.

Palabras clave

Historia de los números irracionales, números metálicos y plásticos, números algebraicos y trascendentes.

Abstract

In this brief walk through the world of irrational numbers it is shown how a topic as elementary as arithmetic has many curiosities that can be offered attractively to high school and first-year university students. Our goal is not to delve into esoteric, convoluted issues; nor do we want to "roam" among formulas and equations. We do not intend to show how you can do accounting numbers, we are more interested in giving accounts (telling stories) about numbers, about their wonderful properties and challenging conjectures still unresolved. We will stroll among whole, algebraic and transcendental irrationalities; closely observe metallic numbers and their neighbors, plastic numbers. Always with the guidance of the History of Mathematics. We would like you to participate thoughtfully and extract ideas deemed appropriate to spice your own classes to help students think and love mathematics.

[1] Este trabajo corresponde a un mini curso ofrecido en la I CEMACYC, celebrada en Santo Domingo, República Dominicana el año 2013.

[2] El resumen y las palabras clave en inglés fueron agregados por los editores.

Key words

History of irrational numbers, metal and plastic numbers, algebraic and transcendental numbers.

1 Introducción

Los números enteros positivos aparecieron muy temprano por las necesidades naturales de contar y medir. Poco después, sobre todo por la repartición de tierras, herencias y mercancías, aparecieron las fracciones, cocientes entre enteros positivos no nulos, que los helenos llamaron "números racionales", con la convicción que eran los números suficientes para satisfacer todas las necesidades razonables y no solo contar o medir. Pasaron miles de años antes de que los seres humanos comprendieran que no todas las "magnitudes razonables" se podían medir de manera exacta con números racionales. Por supuesto que desde épocas remotas se sabía que algunas magnitudes geométricas asociadas a figuras simples como triángulos, rectángulos o círculos no se podían *medir fácilmente* a través de enteros y fracciones. Pero resolvían el problema práctico con una medida aproximada y se quedaban harto satisfechos. Es decir, que la consideración de números no racionales era innecesaria para las primeras civilizaciones que basaban la matemática en premisas empíricas, no especulativas. La necesidad de tomar en cuenta números que no son racionales, apareció junto con las civilizaciones cuya base económica les permitió el desarrollo de clases sociales con suficiente tiempo para especular sobre asuntos esotéricos como la existencia de números *no racionales,* mientras otras clases "inferiores" hacían el trabajo racionalmente necesario para vivir.

Pero, ¿en qué problemas matemáticos concretos aparecieron las irracionalidades aritméticas? ¿Existen varios grados de irracionalidad aritmética? y ¿Cuántos tipos de irracionalidades hay? ¿Son acaso mejores unos números irracionales que otros? ¿Cuáles son los números irracionales más famosos? ¿Son muchos los números irracionales comparados con los racionales? ¿Existen números con naturaleza enigmática, que no sabemos hoy si son o no son irracionales? Para intentar responder a esas preguntas y otros cuestionamientos naturales que puedan aparecer en el estudio de las irracionalidades, lo mejor, en nuestra opinión, es hacer un paseo en el tiempo, con la guía de la Historia de la Matemática.

2 Magnitudes inconmensurables y números inexpresables

No se sabe exactamente cuándo surgieron los números irracionales, pero su origen se achaca al supuesto descubrimiento de las magnitudes inconmensurables por los antiguos pitagóricos. Recordemos que ellos basaban su filosofía en la sentencia "Todo es número". Los pitagóricos estaban convencidos de que la razón entre las longitudes de dos segmentos cualesquiera es siempre un número racional, lo cual resumían con el planteamiento de que "todos los segmentos son conmensurables". Es decir, que se puede encontrar una unidad común a ambas longitudes, siendo éstas múltiplos de dicha unidad.

La idea es la siguiente: Supongamos que tenemos dos segmentos de longitudes diferentes A y B. Si consideramos que A es el número mayor, podemos sin dudas colocar al segundo segmento sobre el de longitud A una cantidad finita de veces sin que llegue a sobrepasarlo. En lenguaje matemático, lo que hemos hecho es multiplicar B por un entero n, de modo que $nB < A < (n+1)B$. Al hacerlo resta un segmento de longitud R_1 y se observa fácilmente que $R_1 = A - nB$ es un número positivo menor que B o $R_1 = 0$. En éste último caso A es un múltiplo entero de B, por lo que la unidad de medida común es precisamente B. En el primer caso ($R_1 = A - nB > 0$) repetimos el procedimiento considerando ahora los segmentos $B > R_1$. Nuevamente queda un resto R_2, que, si es cero, nos indica que el resto anterior (R_1) constituye la unidad de medida común y si no es cero, nos obliga a repetir el procedimiento. Pero los restos que van quedando son todos positivos y cada vez menores. Es así que los pitagóricos suponían que en algún momento se debía llegar a un resto $R_n = 0$, siendo así R_{n-1} la buscada unidad de medida común. Pero ¿qué nos garantiza que realmente lleguemos alguna vez a obtener cero? Por ejemplo pudiera ser que cada resto fuera la mitad del anterior y, en ese caso, nunca se obtendría el valor 0, de modo que ¿cuál es la unidad común?

Irónicamente, se supone que son los propios pitagóricos (y al parecer un tal Hipaso de Metaponte), que negando su propia filosofía, descubren los inconmensurables (entre 450 a.n.e. y 375 a.n.e.), y con ellos los números irracionales, que eran unos *números inexpresables* en el lenguaje de los números pitagóricos racionales. Cuenta la leyenda que Hipaso fue lanzado al mar por los disgustados pitagóricos, no solo castigado por haber hecho público su descubrimiento, lo cual violaba las estrictas leyes de los pitagóricos, sino también por la forma en que lo descubrió a partir del pentagrama, que era uno de los símbolos sagrados de esa secta. (Fig.1).

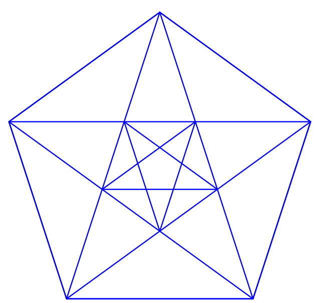

Figura 1: Pentagrama Pitagórico

En este caso la inconmensurabilidad está asociada al número inexpresable cuyo cuadrado es 5. Este número en notación actual es $\sqrt{5}$, no es representable como cociente de dos números enteros, aunque hoy usamos la aproximación racional que nos ofrece rápidamente cualquier calculadora electrónica en el sistema decimal hasta con 20 cifras exactas,

$$\sqrt{5} \approx 2,2360679774997896964 1.$$

Es decir, podemos confiar en este valor decimal en todos los problemas que no precisen de un error menor de $\frac{1}{10^{20}}$, pero si queremos deducir resultados exactos que dependen de su valor irracional, entonces usamos el símbolo $\sqrt{5}$ y en los cálculos aritméticos lo consideramos como un número tal que al elevarlo al cuadrado obtenemos el valor entero 5.

La mayoría de los textos actuales coloca como primer ejemplo de inconmensurabilidad la de la diagonal del cuadrado con relación a su lado (ver Fig 2) que posee la misma complejidad de la hallada por Hipaso en el pentagrama, pero es más fácil de argumentar con el uso de la propiedad pitagórica.

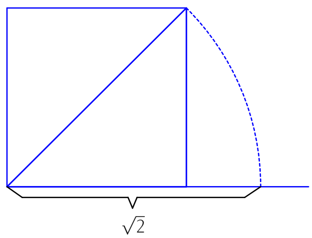

Figura 2: Diagonal inconmensurable

La historia que exponemos a continuación es la que induce la afirmación de que Pitágoras es el padre de la teoría de los irracionales. Recordemos que el teorema de Pitágoras plantea que en un triángulo rectángulo el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los lados. Una de sus aplicaciones constituye una de las primeras demostraciones conocidas de la existencia de irracionalidades y que aparece en el libro X de "Los Elementos" de Euclides. Dicha demostración –con un razonamiento por reducción al absurdo– se basa también en el hecho trivial de que el producto de un número par por cualquier número es también un número par.

Los tríos pitagóricos (ternas de números enteros positivos que constituyen las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo, es decir, que cumplen la relación $a^2 + b^2 = c^2$) y los ya conocidos números figurados o poligonales parecen haber abierto el camino al descubrimiento de los números irracionales, al asociar los números y las figuras, a través de la acción de medir magnitudes geométricas. No fue hasta el siglo XIX que se comprendió cabalmente la diferencia esencial entre los números y las magnitudes, al aparecer teorías rigurosas de los números reales, unión de los números racionales e irracionales, teorías "puras" sin hacer mención a consideraciones geométricas ni físicas. Pero, repetimos, el uso de los irracionales se hizo necesario en la resolución de problemas vitales antes de definirlos con rigor y mucho antes de sumergirlos en cuerpos algebraicos, no geométricos.

Ya en la Matemática prehelénica, en Egipto y Babilonia surgen dos problemas cuya solución es reconocida hoy en día entre los números irracionales notables. Ellos son el problema de la razón entre la longitud de la circunferencia y su diámetro, a partir del cual conocemos hoy a la constante "pi" π, y la referida relación pitagórica en los triángulos rectángulos con la que se introdujeron inconscientemente infinidad de irracionalidades cuadráticas como $\sqrt{2}$. De hecho los babilonios utilizaron la relación pitagórica en triángulos con hipotenusa irracional y sus aproximaciones a las raíces cuadradas pueden considerarse pasos hacia el descubrimiento que nunca hicieron. En una tablilla de arcilla que se conserva en la Universidad de Yale aparece una buena aproximación en sistema sexagesimal (muy parecida al valor que hoy conocemos en sistema decimal):

$$\sqrt{2} \approx 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} \; (= 1,414213).$$

Teodoro de Cirene (siglo V a.n.e.), uno de los maestros de Platón, es de los primeros en plantear una teoría de números irracionales que será recogida en los Elementos de Euclides. En particular demostró que los lados de los cuadrados cuya área era un número primo era inconmensurable con el lado del cuadrado de área unidad. También fue el autor de la conocida espiral que representa longitudes irracionales $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, …, $\sqrt{17}$ como hipotenusa de triángulos rectángulos de lados 1 y 1, 1 y $\sqrt{2}$; 1 y $\sqrt{4} = 2$, y así hasta llegar a representar $\sqrt{17}$ (vea fig. 3).

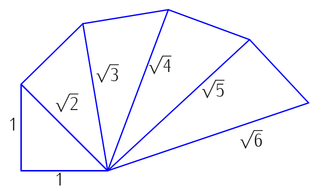

Figura 3: Espiral de Teodoro

Ejercicio 1: ¿Por qué Teodoro no continuó con la representación geométrica de $\sqrt{18}$, $\sqrt{19}$ y otras raíces sucesivas?

El alumno de Teodoro, Teeteto de Atenas (s. IV a.n.e.) clasificó las irracionalidades. No consideraba lo mismo $\sqrt{17}$, que $\sqrt{17}+\sqrt{13}$ o $\sqrt[3]{1+\sqrt{17}}$. Esto tiene fácil comprensión si lo llevamos al campo del álgebra de los polinomios: $\sqrt{17}$ es raíz de un polinomio de segundo grado, $\sqrt{17}+\sqrt{13}$ es raíz de uno de cuarto grado y no menos, $\sqrt[3]{1+\sqrt{17}}$ satisface un polinomio de sexto grado como mínimo. De tal forma hoy se clasifican las irracionalidades algebraicas (porque están asociadas a un polinomio de grado mínimo). Así $\sqrt{17}$ es algebraico de grado 2, $\sqrt{17}+\sqrt{13}$ es de grado 4 y $\sqrt[3]{1+\sqrt{17}}$ es una irracionalidad algebraica de sexto grado.

Ejercicio 2: Encuentre los polinomios mínimos referidos arriba y compruebe la certeza de las aseveraciones formuladas.

Eudoxo de Cnido (siglo IV a.n.e.) que aprendió tanto de las especulaciones platónicas en la escuela de Atenas, como de los cálculos aproximados de los astrónomos egipcios, introduce una teoría de la proporcionalidad y no tiene reparos para manipular los inconmensurables en su "Método de exhausción", que constituye una de las primeras teorías sobre cálculo de magnitudes geométricas por aproximación.

Todas estas ideas fueron recogidas por Euclides en sus Elementos. Por ejemplo, la teoría de Eudoxo aparece entre los Libros V y X. Por mucho tiempo el libro X fue considerado el más complicado de todos. aun en el siglo XVI, el talentoso ingeniero flamenco Simón Stevin se refería a él como "La cruz de los matemáticos". Precisamente fue Stevin quien hizo popular el uso de la representación decimal para facilitar la manipulación en los cálculos de los números irracionales.

Curiosidad 1: **¿quien fue el autor intelectual de la representación decimal?**

En Occidente se consideró por mucho tiempo que Simón Stevin era el creador del método de representación decimal de los números fraccionarios hasta que en 1948 se hicieron públicas las obras de Al Kashi, un famoso astrónomo musulmán, que trabajó en Samarcanda bajo la protección del gran kan turco mongol Ulug Beg, también aficionado a las matemáticas y la astronomía. Este asombroso musulmán escribió varios tratados sobre astronomía y otros muchos temas, pero su obra más impresionante es "La llave de la Aritmética" que completó en marzo de 1427. En el Libro IV "Sobre las mediciones", en su último capítulo "Midiendo estructuras y edificaciones" Al Kashi usa su talento aritmético para la optimización de los cálculos de salarios y materiales de construcción para un determinado proyecto arquitectónico y para estimar el precio de la edificación terminada. Son muchas las operaciones numéricas y el sistema sexagesimal que ha sido tan útil en los cálculos astronómicos no ayuda a simplificar el trabajo. Entonces Al Kashi decide introducir las *fracciones decimales* sobre todo para realizar aproximaciones más precisas de magnitudes geométricas como la superficie y el volumen de la cúpula de diferentes mausoleos y mezquitas musulmanas.

Debemos agregar que hoy es sabido que tampoco Al Kashi es el creador de las fracciones decimales, puesto que se han encontrado también en monografías de otros sabios islámicos como Al Uqlidisi (s. X) y Al Samawal (s. XII), pero ninguno como Al Kashi realizó aplicaciones tan valiosas y precisas.

Por supuesto que la obra de Simón Stevin fue definitiva para el establecimiento en Occidente de la representación decimal ya que durante mucho tiempo no se justipreció el magnífico legado de las culturas orientales en una época cuándo los occidentales no se preocuparon por ampliar el bagaje teórico del legado helénico. Y no fueron solo los musulmanes árabes los orientales interesados en las irracionalidades aritméticas.

Curiosidad 2. ¿Cómo sumar irracionalidades numéricas expresadas por radicales?

El célebre sabio indio Bashkará que vivió en el siglo XII planteó unas reglas perspicaces para operar con números irracionales. Por ejemplo, da dos formas de sumar irracionales que en nuestra notación actual serían equivalentes a:

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}} \quad (\sqrt{2}+\sqrt{8}=\sqrt{2+8+2\sqrt{16}}=\sqrt{18})$$

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{2\left(\sqrt{\tfrac{b}{a}}+1\right)^2}, \text{ siendo } a<b\,(\sqrt{2}+\sqrt{8}=\sqrt{2\left(\sqrt{\tfrac{8}{2}}+1\right)^2}=\sqrt{18}).$$

Ejercicio 3: Comprueba que los dos algoritmos de Bashkará son equivalentes

Curiosidad 3: ¿Qué irracionalidades aritméticas son construibles geométricamente?

Una forma de clasificar las irracionalidades es considerando las que son "construibles" y las que no lo son. Precisemos la idea. Fijado un segmento de longitud unidad, entendemos por construir una irracionalidad a usar sucesivamente la regla y el compás para llegar a un segmento inconmensurable con el segmento unidad original. No es difícil darse cuenta que con estas herramientas podemos construir segmentos de longitudes irracionales cuadráticas como $\sqrt{2}$, o también $\sqrt{17}$ y $\sqrt{1+\sqrt{17}}$ y $\sqrt[8]{5}$. Un poco más difícil es comprobar que las de un orden diferente a $m = 2^n$ no son construibles, por ejemplo, $\sqrt[3]{2}$ y $\sqrt[5]{3}$ no son construibles. Pero, aun más difícil resulta demostrar cuáles son las únicas irracionalidades construibles con regla y compás. Al parecer la primera "demostración" se debe al filósofo francés René Descartes a mediados del siglo XVII. No obstante no es hasta el siglo XIX que se logra encontrar una demostración aceptable por la comunidad matemática. Esta demostración se consiguió al traducir el problema al lenguaje del álgebra. El talentoso Karl Gauss (1777-1855) en sus *Disquisitiones Arithmeticae* ya señalaba que los problemas clásicos de construcción: duplicación de un cubo, trisección de un ángulo, cuadratura del círculo y construcción de polígonos regulares se podían plantear en lenguaje algebraico y de tal forma encontrar los criterios de construcción con las herramientas clásicas. Así encontró la famosa fórmula para determinar que un polígono regular podía ser construido con regla y compás. Según demostró Gauss, si N es el número de lados de un polígono cualquiera regular, entonces dicho polígono puede ser construido con regla y compás solamente en el caso en que sea $N = 2^k p_1 p_2 \ldots p_m$, siendo $p_i = 2^{2^n} + 1$ un número primo de Fermat para $i = 1, \ldots, m$ y k, m enteros positivos. Los únicos primos de Fermat conocidos hasta ahora (agosto de 2013) son 3, 5, 17, 257 y 65 537, no se ha podido encontrar otro. Por tanto, los polígonos regulares de 7, 9, 11, 13 y 15 lados, no se pueden construir con regla y compás. Mientras, los de $4 \cdot 257 = 1028$ lados y $3 \cdot 5 \cdot 65\,537 = 983\,055$ lados son construibles.

El joven Gauss escribió que su brillante idea de ligar el álgebra con la geometría para la resolución de este clásico problema apareció cuando tenía solo 19 años:

> Fue el día 29 de marzo de 1796, durante unas vacaciones en Braunschweig, y la casualidad no tuvo la menor participación en ello ya que fue fruto de esforzadas meditaciones; en la mañana del citado día, antes de levantarme de la cama, tuve la suerte de ver con la mayor claridad toda esta serie de construcciones....

Aunque en el siglo XIX se hallaron procedimientos más simplificados, la tarea constructiva tal como la abordó el matemático alemán tiene un mérito enorme. Pero Gauss no dio una caracterización general de los números construibles. Fue el francés Pierre-Laurent Wantzel (1814-1848) quien primero, en 1837, precisó las condiciones necesarias y suficientes para que un número sea construible. Particularmente probó que una condición necesaria para que un número sea construible es que el grado del polinomio minimal asociado al número sea una potencia de 2, es decir el orden del número irracional algebraico debe ser 2^k. Esta condición permite demostrar fácilmente que la duplicación del cubo y la trisección de un ángulo no son realizables con el uso exclusive de regla y compás. Pero, atención, esta condición necesaria no es suficiente.

Ejercicio 4: Probar que el polinomio $x^4 + 2x - 2$ es irreducible de grado 4 y sin embargo sus raíces no son construibles.

Es curioso subrayar que el conjunto K de los números construibles forma un cuerpo, es decir, la suma y el producto son operaciones internas, con elementos neutros y opuestos cada una. Además K contiene al cuerpo de los números racionales y a la vez es un subcuerpo propio del cuerpo de los números algebraicos. Este cuerpo numérico posee muchas propiedades interesantes, por ejemplo, K es cerrado bajo la extracción de raíces cuadradas y para la conjugación compleja.

3 La clasificación entre irracionalidades algebraicas y trascendentes

Las investigaciones sobre números construibles aumentaron el interés por el estudio de los números irracionales algebraicos, es decir, aquellos irracionales que son raíz de algún polinomio con coeficientes enteros. Por otra parte, también agudizaron la búsqueda de una demostración de que el número irracional π, asociado a la construcción de un cuadrado de área igual al área de un círculo de radio unidad, no es algebraico, es decir, no es raíz de *ningún polinomio* con coeficientes enteros. A tales números se les llama *números trascendentes* y π aunque fue de los primeros en aparecer por las necesidades prácticas en la antigüedad prehelénica, no fue hasta finales del siglo XIX que se consiguió demostrar su trascendencia. En general, encontrar números irracionales no algebraicos es sumamente difícil, se debe probar la *no existencia* de polinomios que se anulen en ese número.

Es interesante comprobar con el uso de la representación decimal que entre dos racionales hay siempre un irracional y también que entre dos irracionales encontramos un racional. Este resultado se traduce diciendo que los números racionales son densos en el conjunto de los números irracionales. No es intuitivo imaginar que existen muchos más números irracionales que racionales, sobre todo porque ambos conjuntos son evidentemente infinitos. Menos intuitivo es que los números irracionales algebraicos son muchísimos menos que los irracionales trascendentes, porque los algebraicos son tantos como polinomios existen y son contados con los dedos de la mano los trascendentes conocidos en la enseñanza básica. Por supuesto, los grandes matemáticos intuían que deberían existir muchas irracionalidades no algebraicas. Por ejemplo, Leibniz suponía correctamente que la mayoría de los valores de las funciones trigonométricas eran irracionalidades no algebraicas. Euler extendió la sospecha a los valores de otras funciones elementales como la exponencial y la función logaritmo. Pero aun a principios del siglo XIX no existían demostraciones claras y rigurosas de la existencia de irracionalidades no algebraicas.

Se considera que el geómetra francés Joseph Liouville en 1844 dio el primer criterio útil para determinar si un irracional es algebraico o no y con el uso de la representación en serie probó la existencia de infinidad de números no algebraicos. Por ejemplo, Liouville probó que es un irracional no algebraico el número:

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} = 0,110001000000000000000001000 0\ldots,$$

donde los unos aparecen en los lugares $1, 2, 6, 24, 120, 720, 5040, \ldots$, es decir, en las cifras decimales de orden $n!$, símbolo que significa el producto de todos los naturales hasta el propio n y es llamado *factorial de n*: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots (n-2) \cdot (n-1) \cdot n$.

Entonces, a partir de cualquier número decimal infinito puede construirse un número de Liouville, por ejemplo, es trascendente el número 3.14(3 ceros)1(17 ceros)5(95 ceros)9(599 ceros)..., donde los dígitos son cero excepto en las posiciones n! y los dígitos no nulos siguen la formación de los dígitos en la representación decimal de π. Se puede probar que los números de Liouville forman un subconjunto denso del conjunto de todos los números reales y son tantos como sucesiones de dígitos no nulos existen. en otras palabras hay muchísimo números irracionales no algebraicos.

aun cuando se hizo posible demostrar que existían infinitos números irracionales trascendentes, probar que un número irracional concreto no es algebraico es sumamente difícil. Por ejemplo, la trascendencia de números ubicuos como π y la llamada *constante de Neper e*, base de los logaritmos naturales, se mantuvo como conjetura hasta que a finales del siglo XIX dos matemáticos, uno francés- Hermite, en 1873- y otro alemán- Lindemann, en 1882- encontraron respectivamente las ansiadas demostraciones. Después de estas demostraciones no fue difícil probar que la constante de Neper e no era un número de Liouville, en cambio, hubo de esperarse hasta 1953 para que el alemán Kurt Mahler demostrara que π tampoco era un número de Liouville.

Curiosidad 4: ¿Existen más irracionales algebraicos que irracionales trascendentes?

El resultado de Liouville aunque útil en la aceptación de nuevos tipos de irracionalidades numéricas, no servía para comparar la magnitud de los conjuntos de números atendiendo a su naturaleza aritmética. La manera más rigurosa de comparar conjuntos numéricos infinitos la introdujo George Cantor (1845-1908) a finales del siglo XIX. La forma más natural de comparar conjuntos es contar sus elementos, la cuestión se complica cuando tenemos que comparar conjuntos infinitos. A Cantor se le ocurrió la genial idea de decir que dos conjuntos eran equipotentes (forma rigurosa de decir que tienen la misma cantidad infinita de elementos) si existía una correspondencia 1-1 entre los dos conjuntos. Los conjuntos equipotentes con el conjunto de los números naturales, los conjuntos *numerables*, determinan el primer número transfinito que denotó por la primera letra del alfabeto hebreo $\aleph_0$ (alef sub cero). Ahora había que clasificar los otros conjuntos numéricos. Asombrosamente, Cantor demostró, con mucha lógica, la fantástica propiedad de que entre $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{N}$ existe una correspondencia 1-1 y por tanto que el cardinal transfinito asociado a $\mathbb{Q}$ era también $\aleph_0$. Realmente existen muchas formas simples de enumerar a los racionales y una de las más conocidas se puede visualizar fácilmente con un diagrama:

1	2	3	4	...
0	−1	−2	−3	...
1/2	3/2	5/2	7/2	...
−1/2	−3/2	−5/2	−7/2	...
...	...	...	...	...

Los números positivos se colocan en las filas impares y los negativos en las pares, además el denominador determina cuál es la fila correspondiente. No es difícil convencerse de que en el diagrama están todos los infinitos números racionales. Entonces se ordena el conjunto de todos los números racionales diagonalmente, como lo muestran las flechas de la tabla, esto es

$$\mathbb{Q} = \left\{1, 2, 0, 3, -1, \frac{1}{2}, 4, -2, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 5, -3, \frac{5}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{1}{3}, 6, \ldots\right\}$$

De este modo es evidente la correspondencia entre los números racionales y los naturales y hemos probado que ambos tienen la misma cantidad de elementos. Después de este sorprendente resultado muchos volvieron a pensar que todos los números transfinitos en fin de cuentas eran iguales y no valía la pena definirlos como entes aparte.

Pero en 1874 Cantor volvió a asombrar a la comunidad matemática probando que todo intervalo compacto $[a, b]$ por pequeña que fuera su longitud $b - a$, tenía un *tamaño* mayor que el *tamaño* de $\mathbb{N}$. La demostración sin embargo era algo sofisticada y no muchos se convencieron de la validez de este extraño resultado. Cantor que era muy altanero, se sintió ofendido por estos escépticos y buscó con denuedo una demostración simple y asequible que los subyugara totalmente. La encontró al fin 17 años después y se encuentra en los principales textos de Análisis o de Teoría de Conjuntos –también aparece en el penúltimo capítulo de Sánchez-Valdés (2010)–.

Ejercicio 5 Probar que todos los intervalos no triviales -que contienen al menos dos puntos- de la recta real, sean abiertos o cerrados, acotados o no acotados, son equipotentes, es decir determinan el mismo número transfinito diferente al número transfinito $\aleph_0$ y que es denotado por la letra $\mathbf{c}$ inicial de continuum.

Como dijimos anteriormente en la época en que Cantor publicó sus razonamientos transfinitos, los números trascendentes eran sin dudas, muchísimo más raros que los algebraicos, pero la "fantasía" de Cantor no se contenía con tales argumentos y lanzó una exótica provocación contraria a la intuición de la mayoría:

La parte algebraica del continuo es tan pequeña como el conjunto de los números naturales, mientras que la parte trascendente es tan grande como todo el continuo. Concretamente, el número transfinito del conjunto de los números algebraicos es $\aleph_0$ y el del conjunto de los números trascendentes es $\mathbf{c}$.

En una serie de cartas que intercambió Cantor entre 1873 y 1874 con el talentoso "arquitecto de los números" Richard Dedekind (1831-1916), estos dos matemáticos alemanes probaron que la mayoría de las irracionalidades trascienden las operaciones aritméticas, son *números trascendentes* (ver, p. e. Sánchez-González, 2013).

Primeramente Cantor probó que el conjunto de los números algebraicos era numerable y una propiedad auxiliar relativamente simple y muy útil:

La unión finita o numerable de conjuntos numerables es también un conjunto numerable.

Enseguida Cantor toma un intervalo cualquiera (a,b). Supone que el conjunto de los trascendentes contenidos en (a,b) sea numerable, como el subconjunto de los algebraicos es numerable, entonces su unión (a,b) sería también numerable, lo que es absurdo. Por tanto, en todo intervalo hay muchísimos más números trascendentes que números algebraicos, aunque la imaginación no nos alcance para entenderlo.

Cantor afirmó esto sin mostrar ni un ejemplo concreto, sólo "contó" los números algebraicos y constató que eran una parte despreciable ante el gran tamaño de $\mathbb{R}$. Era una demostración indirecta, no constructiva, de llegar a la existencia de infinitos trascendentes que mostraba la potencialidad de la teoría de conjuntos infinitos de Cantor. Muchos matemáticos admiraron este aporte metodológico de Cantor, pero también fueron muchos los escépticos. No serían pocos los que sospecharan de la lucidez de Cantor que afirmaba que algo era infinitamente grande y no presentaba ningún ejemplo; les sonaba aquello como algo místico, sobrenatural, metafísico.

Pero la comprensión con todo el rigor de estas ideas de comparación de conjuntos numéricos infinitos y de prueba de tipo de irracionalidad también trasciende los objetivos de los cursos básicos de matemática. Detengámonos finalmente en una constelación aritmética de irracionalidades algebraicas que ha sido visitada en diferentes épocas con resultados muy atractivos y elegantes, que pueden incluirse en cualquier curso preuniversitario.

4 La familia de los números metálicos

El número de oro

El número de oro es un número que posee muchas propiedades interesantes y que fue descubierto en la antigüedad, no como "unidad de medida" sino como una relación o proporción entre magnitudes, que ahora se conoce como *razón áurea*. Esta proporción se encuentra tanto en algunas figuras geométricas como en la naturaleza en elementos tales como caracoles, flores, hojas y tallos de algunas plantas, el cuerpo humano, etc.

Asimismo, se atribuye un carácter estético especial a los objetos que siguen la razón áurea y algunos pueblos hasta le han otorgado una importancia mística. A lo largo de la historia, se le ha atribuido importancia en diversas obras de arquitectura y otras artes, aunque algunos de estos casos han sido objetados por su subjetivismo.

Desde el punto de vista puramente matemático es notable por estar entre los números que se expresan por proporciones entre magnitudes geométricas y a la vez son raíces de ecuaciones algebraicas, en cambio no es posible representarlos como cociente de dos números enteros. Por tanto, no obstante estar tan ligado a la razón, se clasifican como irracionales. Pero para diferenciarlos de otros aun más irracionales se les llama *irracionales algebraicos*.

Decimos que dos números positivos a y b están en proporción o *razón áurea* si se cumple que: $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$. Esto es, el todo es a la parte mayor, como la parte mayor es a la parte menor. Al valor numérico de esta razón se le llama *número de oro* y desde principios del siglo XX se denota con la letra griega Φ (Fi mayúscula) o φ (fi minúscula) en homenaje al escultor griego **Fidias** (siglo V a.n.e.) que la usó sistemáticamente en sus obras.

Consideremos un segmento AB y dividámoslo en dos segmentos tales que la razón entre el segmento total AB y el segmento mayor sea igual a la razón del segmento mayor sobre el segmento menor. Para abreviar los cálculos tomemos como unidad al segmento menor y denotemos por x la longitud del mayor. Tenemos que $\frac{1+x}{x} = \frac{x}{1}$.

Fácilmente podemos despejar nuestra incógnita x y obtenemos $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, que nos da la expresión aritmética del número de oro Φ. Dado que depende de la raíz cuadrada del número primo 5, sabemos que es un número irracional, es decir, que no puede representarse como el cociente de dos números enteros y su valor aproximado con 20 cifras decimales exactas es:

$$\Phi = 1,61803398874989484820\ldots$$

Es posible que civilizaciones antiguas anteriores a la helena, como la mesopotámica y la egipcia, conocieran de este número y lo utilizaran en la construcción de sus monumentos, ya que se han encontrado relaciones cuantitativas entre las dimensiones de templos y pirámides que se aproximan al valor de Φ. Aunque siempre queda la duda que el interés por encontrar a Φ, haya comprometido la precisión de los cálculos. Asimismo, se cree que los pitagóricos lo encontraron en la figura del pentágono estrellado o pentagrama que usaban como emblema. En efecto, si trazamos las cinco diagonales de un pentágono regular convexo (Fig. 4) se forman segmentos de cuatro longitudes distintas y cada uno está en proporción áurea con el inmediato inferior en longitud. Los griegos del periodo clásico conocían de sus propiedades principales y las utilizaban en sus construcciones buscando la perfección estética. En particular, el principal monumento de la antigua Grecia, el Partenón, obra majestuosa ideada y supervisada por el escultor Fidias, posee elementos con dimensiones relacionadas por la proporción áurea.

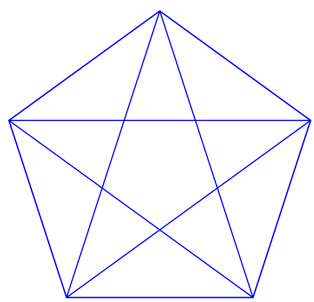

Figura 4: Pentagrama Pitagórico

Ejercicio 6. Comprueba que en el pentagrama pitagórico los cuatro segmentos principales están en proporción áurea con el segmento inmediato de longitud inferior

Aparentemente, el primer estudio formal sobre el número áureo se recogió en los *Elementos* de Euclides (siglo III a.n.e.). Euclides prueba que no puede expresarse como cociente de dos números enteros y en una de las proposiciones del segundo libro de los *Elementos* de Euclides aparece el *rectángulo áureo*. Es decir, un rectángulo tal que la longitud del lado largo sobre la longitud del lado corto sea Φ. Este rectángulo tiene la propiedad de que si cortamos el mayor cuadrado posible, entonces el rectángulo restante es semejante al original, también sus lados están en proporción áurea Φ. El frente del Partenón es casi un rectángulo áureo. Muchas construcciones no sólo antiguas, sino modernas siguen cánones áureos considerados de equilibrio y valor estético máximo. En Montpellier, al sur de Francia, el arquitecto español posmodernista Ricardo Bofill diseñó ***La Plaza del Número Áureo*** que terminó de construirse en 1984.

Se conoce una sucesión de números enteros que posee asombrosas propiedades aritméticas y que tiene lazos familiares con el número de oro. Se trata de la *sucesión de Fibonacci*, introducida en el siglo XIII por el matemático Leonardo de Pisa, hijo del comerciante Bonacci (de ahí el sobrenombre de *figlio de Bonacci,* o más breve, *Fibonacci*). La sucesión apareció en un problema de conejos muy singular:

Una pareja de conejos puede procrear otra pareja a los dos meses de nacida y a su vez esta cría otra a los dos meses y así sucesivamente. Si en enero solo tenemos una pareja recién nacida y cada vez que nace una pareja la aislamos de las demás, ¿cuántas parejas de conejos tendremos para la Nochevieja del primer año? (Por supuesto, se supone que no muere ninguna en su primer año de vida).

Denotemos por F_n la cantidad de parejas en el mes n, entonces $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_3 = 2$, porque nació la primera pareja, $F_4 = 3$, $F_5 = 5$, puesto que nacen dos parejas más de F_3; $F_6 = 8$, tres parejas (F_4) fueron fértiles, $F_7 = 13$, cinco parejas (F_5) paren, y aquí nos damos cuenta que se cumple: $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, relación de recurrencia que nos permite encontrar cualquier término en función de los dos términos anteriores, por ejemplo:

$$F_8 = F_7 + F_6 = 21; \qquad F_9 = F_8 + F_7 = 34, \qquad F_{10} = F_9 + F_8 = 55,$$
$$F_{11} = F_{10} + F_9 = 89, \qquad F_{12} = F_{11} + F_{10} = 144.$$

Luego, al final del año tendremos 144 parejas de conejos, que seguirán pariendo y pariendo, según la ley de Fibonacci, hasta que la muerte los separe.

Lo asombroso es que si formamos el cociente de dos términos consecutivos de la sucesión de Fibonacci $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ su valor numérico oscila siendo alternativamente menor y mayor que la razón áurea y cada vez más cerca de Φ. Veamos la tabla a continuación:

Tabla 1
Cocientes entre los términos consecutivos de la sucesión de Fibonacci

n	F_n	F_{n+1}	$\frac{F_{n+1}}{F_n}$	$\Phi - \frac{F_{n+1}}{F_n}$	n	F_n	F_{n+1}	$\frac{F_{n+1}}{F_n}$	$\Phi - \frac{F_{n+1}}{F_n}$
1	1	1	1	+0,61803	7	13	21	1,615384	+0,002649
2	1	2	2	−0,38196	8	21	34	1,619047	−0,001014
3	2	3	1,5	+0,11803	9	34	55	1,617647	+0,000387
4	3	5	1,6666	−0,04863	10	55	89	1,618181	−0,000148
5	5	8	1,60	+0,01803	11	89	144	1,617977	+0,000056
6	8	13	1,625	−0,00696	12	144	233	1,618055	−0,000022

Como se observa ya para n=12 tenemos cuatro cifras decimales del número de oro y de esta forma, aumentando el índice de los términos, podemos aproximarnos tanto como queramos al valor de Φ. Digamos que para n=25 ya obtenemos 10 cifras decimales y para n=40, 15 cifras exactas. Suficientes para convencer a cualquiera de la convergencia de la sucesión de los cocientes $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ hacia Φ, aunque no sea una demostración matemática rigurosa del hecho. Este resultado fue descubierto empíricamente por el astrónomo y matemático alemán Johannes Kepler en el siglo XVII y pasaron más de 100 años hasta que pudiera demostrarse rigurosamente.

Curiosidad 5: El número de oro ¿aparece también en la Naturaleza?

Algunos biólogos amantes de la matemática creen haber encontrado el número de oro en varios elementos de la naturaleza:

- La relación entre la cantidad de abejas macho y abejas hembra en un panal.
- La disposición de los pétalos de las flores (el papel del número áureo en la botánica recibe el nombre de *Ley de Ludwig*).
- La distribución de las hojas en un tallo.
- La relación entre el grosor de las ramas principales y el tronco, o entre las ramas principales y las secundarias (el grosor de una equivale a Φ tomando como unidad la rama superior).
- La distancia entre las espirales de una piña.
- La relación entre la distancia entre las espiras del interior en forma de espiral de la mayoría de los caracoles (no sólo del nautilus). En particular, las conchas del Fusus antiquus, del Murex, de Scalaria pretiosa, de Facelaria y de Solarium trochleare, entre otras, siguen este tipo de espiral de crecimiento. La polímita, caracol endémico de Cuba (Fig. 5.) también presenta esta propiedad.

Figura 5: Polimita cubana

Curiosidad 6: ¿Aparece el número de oro asociado a la belleza humana?

El grabado titulado *Las proporciones del hombre* (Fig. 6), procede de un cuaderno de apuntes de Leonardo da Vinci. Está basado en las teorías del arquitecto romano Marco Vitrubio (siglo I a.n.e.) sobre la aplicación de la sección áurea al cuerpo humano: la proporción entre la distancia desde la cabeza hasta el ombligo y desde éste hasta los pies, debe ser la misma que la proporción entre la distancia desde el ombligo hasta los pies y desde la cabeza hasta los pies. El hecho de que este sistema de relaciones armónicas, también conocido como la proporción divina, pudiera trasladarse a la figura humana, tuvo una gran importancia durante el renacimiento, en particular el pintor alemán Alberto Durero dedicó los últimos años de su vida a estudiar este tema y el mismo año de su muerte sus apuntes fueron recopilados en el tratado *Cuatro Libros sobre las Proporciones Humanas* (1528) que tuvo mucha influencia ulteriormente. Especialmente en el siglo XX varios cirujanos estéticos escribieron libros sobre la búsqueda de la perfección en rostros femeninos usando proporciones áureas. En los últimos años del siglo pasado aparecieron artículos sobre el tema de la medida de la belleza del cuerpo humano y no fueron pocos los que afirmaron que la proporción entre las medidas de la cintura y el ancho de caderas que era más atractiva para el hombre era aproximadamente la dada por la razón áurea.

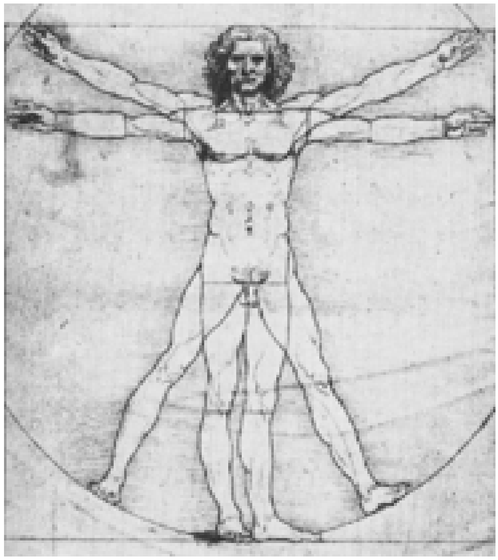

Figura 6: Las proporciones del hombre

La familia de los números metálicos y el bastardo número plástico

Una de las formas de desarrollar la matemática es con la investigación de la generalización de las relaciones cuantitativas y sus propiedades. En el siglo XX se han estudiado otros números irracionales que por la forma como se definen constituyen una generalización del número de oro. Son los llamados *números metálicos* que son determinados por la fórmula:

$$\delta_N = \frac{N + \sqrt{N^2 + 4}}{2}.$$

Se prueba fácilmente que δ_N es la raíz positiva de la ecuación $x^2 - Nx - 1 = 0$ y los tres números metálicos principales son:

Para $N = 1$, la ecuación es $x^2 - x - 1 = 0$, $\delta_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,6180339887$ *número de oro*.

Cuando $N = 2$, la ecuación es $x^2 - 2x - 1 = 0$, $\delta_2 = 1 + \sqrt{2} \approx 2,4142135624$ *número de plata*.

Para $N = 3$, la ecuación es $x^2 - 3x - 1 = 0$, $\delta_3 = \frac{1+\sqrt{13}}{2} \approx 2,36602540378$ *número de bronce*.

Otra generalización del número de oro se hace cambiando la ecuación cuadrática que lo define por la ecuación cúbica similar, es decir, $x^3 - x - 1 = 0$. La única raíz real (irracional) de esta ecuación es denominada *número plástico*. Se comprueba que el valor del número plástico pl es

$$pl = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{3}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{3}}} \approx 1,324718\ldots$$

El concepto de número plástico fue descrito primeramente por el monje holandés Hans van der Laan (1904-1991) en 1928 cuando era un novicio aficionado a la arquitectura. Posteriormente fue estudiado más profundamente por el arquitecto inglés Richard Padovan (n. 1935). Van der Laan consideraba las dos razones 3:4 y 1:7 como expresión de los límites inferior y superior en la normal habilidad para la percepción de diferencias de tamaño y forma en objetos tridimensionales y a *pl,* que tiene un valor intermedio, como la proporción óptima en este sentido estético.

El número plástico aparece como el límite de la razón de los elementos contiguos de la *sucesión de Padovan* definida de forma recurrente como se determina la sucesión de Fibonacci asociada al número de oro, pero con una ligera diferencia:

$$P_{(n+1)} = P_{(n-1)} + P_{(n-2)}, \quad P_{(0)} = P_{(1)} = P_{(2)} = 1,$$

sus miembros son llamados *números de Padovan*:

$$1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 12, 16, 21, 28, 37, 48, \ldots$$

Esta sucesión crece mucho más lentamente que la sucesión de Fibonacci asociada al número de oro. Algunos números son comunes en ambas sucesiones, como 3, 5 y 21, sin embargo, no se sabe si existen infinitas concurrencias o son solo una cantidad finita de coincidencias.

Los números metálicos y el número plástico son ejemplos significativos de números irracionales algebraicos. Rematamos este breve paseo atravesando rápidamente por la constelación de las irracionalidades trascendentes.

Curiosidad 8: ¿Cuáles son las estrellas más brillantes de la constelación de las irracionalidades trascendentes?

Por supuesto que toda respuesta a esta curiosidad es muy subjetiva y depende de la visión del autor de la respuesta. Basándonos en lo expuesto arriba, y complementándolo con otros números que aparecen en Wells (1986) y cuya demostración de trascendencia pueden encontrar en el magnífico libro de Niven (2005) o en el más reciente de Burger (2008), elaboramos una relación siguiendo el orden creciente según su magnitud.

- $0,110\,001\,000\,000\,000\,000\,000\,010\ldots = \sum_{k=1}^{\infty}$ – Número de Liouville. Se considera que fue el primer número en demostrarse su trascendencia. Es el más simple de una familia de números introducida por el francés Joseph Liouville en 1844
- $0,123\,456\,789\,101\,112\,131\,415\,161\ldots$ Número de Chapernowne, es trascendente y normal, esto quiere decir que sus cifras aparecen con la misma frecuencia. Se conocen pocos números trascendentes que sean normales.
- $0,207\,879\,576\,350\,761\,908\,546\,955\ldots$ El valor de $i^i = e^{-\pi/2}$. También es llamado constante de Gelfond, puesto que es del tipo a^b donde a es algebraico diferente de 0 y de 1, y b es irracional algebraico. El ruso Alexandre Gelfond en 1934 demostró este resultado general de trascendencia y dio solución al 7º problema planteado por Hilbert como uno de los principales problemas de la matemática del siglo XX. De este resultado se infiere que el logaritmo en base 10 de cualquier número natural $N \neq 10^k$ (k entero) es trascendente, resultado que Euler había conjeturado en el siglo XVIII.

- $0,301\,029\,995\,663\,981\ldots$ Logaritmo en base 2 de 10
- $0,318\,309\,886\,183\,790\,671\,537\,767\ldots$ El inverso del número π
- $0,367\,879\,441\,171\,442\,321\,595\,523\ldots$ El inverso del número e
- $0,434\,294\,481\,903\,251\,827\,651\,128\ldots$ Logaritmo de e en base 10
- $0,607\,927\,101\,854\,026\,628\,663\,277\ldots = \frac{6}{\pi^2}$. Inverso de $\zeta(2) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$. Es la probabilidad que un número escogido al azar no sea divisible por un cuadrado.
- $0,693\,147\,180\,559\,945\,309\,417\,232\ldots = \ln(2)$ –logaritmo natural de 2
- $1,082\,323\,233\,711\,138\,191\,516\,003\ldots$ –Valor de $\zeta(4) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}$. Suma infinita calculada por Euler, junto con la suma de los inversos de todas las potencias pares ($2n$) de los números naturales. Esta suma es de la forma $\frac{p\pi^{2n}}{q}$. El caso de las potencias impares se mantiene sin respuesta completa, aunque se ha logrado mejorar los resultados obtenidos por Euler.
- $1,202\,056\ldots$ Valor de $\zeta(3) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$ –Roger Apery en 1976 probó que era irracional, pero no se ha demostrado su trascendencia, aunque Euler conjeturó que era igual a $\frac{p\pi^3}{q}$ para p y q enteros positivos y por tanto, un valor trascendente.
- $1,644\,934\,066\,848\,226\,436\,472\,415\ldots = \frac{\pi^2}{6} = \zeta(2) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$. Solución dada por Euler al famoso problema de Basilea.
- $1,772\,453\,850\,905\,516\,027\,298\,167\ldots = \sqrt{\pi} = \Gamma(1/2)$ –función gamma de Euler evaluada en $0,5$ y que generaliza a los racionales el factorial de enteros $n!$
- $2,302\,585\,092\,994\,045\,684\,017\,991\ldots = \ln(10)$
- $2,665\,144\,142\,690\,225\,188\,650\,297\ldots = 2^{\sqrt{2}}$ –número de Hilbert; conjeturada su trascendencia en el séptimo problema de Hilbert propuesto en 1900 y demostrada su irracionalidad por el ruso Rodion Kuzmin en 1930. A veces se le llama constante de Gelfond-Schneider, en honor a los dos matemáticos que publicaron en 1934 y 1935 independientemente, que a^b es trascendente para a algebraico diferente de 0 y 1, y b algebraico irracional. De esta forma se incluyeron muchas estrellas a la constelación.
- $2,718\,281\,828\,459\,045\,235\,360\,471\ldots = e$ –base de los logaritmos naturales. Se reconoce a Euler como el primero que usó la letra e para designarlo en 1731, en una carta dirigida a Goldbach. Más tarde probó que e era un irracional, aunque se atribuye al académico alemán Lambert esta prueba. No fue hasta 1873 que el francés Hermite probó que e no es raíz de ninguna ecuación con coeficientes enteros, es decir que el número e es trascendente. Se considera que fue el primer número irracional clásico que se probó era trascendente.
- $3,141\,592\,653\,589\,793\,238\,462\,643\ldots = \pi$ el más famoso y significativo de todos los número irracionales. Es el valor de la razón entre la longitud de la circunferencia y su diámetro. También es la razón entre el área del círculo y el cuadrado de su radio. Euler fue el primero en usar la letra griega π inicial de la palabra perímetro. En 1761 Johann Heinrich Lambert probó que era irracional, en 1880 Carl von Lindemann probó su trascendencia y en 1953 Kurt Mahler probó que no es un número de Liouville.
- $7,389\,056\,098\,930\,650\,227\,231\,425\ldots = e^2$ –Euler probó que era irracional y Hermite su trascendencia.

- $9,869\,604\,401\,089\,358\,618\,834\,490\ldots = \pi^2$ –Legendre probó en 1794 que era irracional y Lindemann en 1880 que era trascendente.
- $23,140\,692\,632\,779\,269\,005\,729\,086\ldots = e^{\pi}$ –Se prueba que es trascendente por el teorema de Gelfond-Schneider.

Los siguientes valores se mantienen en el "limbo" por no tener definida su naturaleza aritmética, pero todos se consideran merecedores de ser estrellas brillantes en la constelación de los trascendentes:

- $0,423\,310\,825\,130\,748\,003\,102\,172\ldots = \pi - e$
- $0,865\,255\,979\,432\,265\,087\,217\,833\ldots = \frac{e}{\pi}$
- $5;859\,874\,482\,048\,838\,473\,822\,930\ldots = e + \pi$
- $8,539\,734\,222\,673\,567\,065\,464\,127\ldots = \pi e$
- $15,154\,262\,241\,479\,264\,189\,751\,717\ldots = e^e$
- $22,459\,157\,718\,361\,045\,473\,427\,152\ldots = \pi^e$
- $36,462\,159\,607\,207\,911\,770\,990\,826\ldots = \pi^{\pi}$

5 A manera de resumen: Breve "paseíto" por la historia de las irracionalidades

- S. XVIII a.C. Evidencias de cálculos aproximados de $\sqrt{2}$ en Mesopotamia.
- S. V. a.C. Aceptación pitagórica de los "números inexpresables" o "magnitudes inconmensurables". Cuatro posibles primeros encuentros:

$$\sqrt{2} = \frac{\text{diagonal cuadrado}}{\text{lado cuadrado}}; \qquad \sqrt{3} = \frac{\text{diagonal cubo}}{\text{lado cubo}};$$
$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{\text{diagonal pentágono}}{\text{lado pentágono}}; \quad \sqrt{5} = \frac{\text{diagonal rectángulo "doble"}}{\text{lado simple rectángulo "doble"}}.$$

- S. V a.C. Teodoro de Cirene muestra su conocimiento de la inconmensurabilidad de los segmentos con longitud $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, … $\sqrt{17}$
- S. IV . C. Teeteto de Atenas, alumno de Teodoro y de Sócrates, según relata Platón y subraya Pappus, es quien establece distinción clara entre magnitudes racionales e irracionales, es decir, entre magnitudes conmensurables e inconmensurables.
- S. III. a.C. Euclides en el Libro X de los *Elementos* clasifica los números "inexpresables".
- S. III a. C. Arquímedes en su tratado *"Sobre la medida del círculo"* usa la logística o aritmética práctica helena para dar una aproximación de $\sqrt{3} \approx \frac{265}{153} \approx 1,7320261438$ que tiene 4 cifras exactas. Más adelante usa $\frac{1351}{780}$ que da 5 cifras exactas. Además halla la famosa relación entre la medida de la circunferencia y la medida del círculo a través de la constante de Arquímedes, desconocida su naturaleza aritmética.
- S. I d. C. Herón de Alejandría en su "Métrica" utiliza algoritmos para calcular valores aproximados de raíces cuadradas y cúbicas sin decir la deducción de ellas. Da varios ejemplos ilustrativos entre ellos $\sqrt[3]{100}$. Influye en Europa sobre todo en el Medioevo tardío, seguramente en Stevin.

- S. IX Al Guarizmi o Al Mahani clasifican a los irracionales en cuadráticos y cúbicos en términos geométricos en su interpretación de Euclides. El traductor al árabe del libro X de los Elementos traslada "retos" (racional) por "muntaq" (hecho para hablar) y el giego "alogos" de irracional por "asamm" que en latín fue "surdus" (sordo).
- S. X. d. C. Varios matemáticos árabes usan números irracionales o "sordos": Abu Kamil, Abu-Wafa, Al Uqlidisi, Al Karaji
- S. XI Al parecer fue Gerardo de Cremona quien por primera vez asume en su traducción y edición de Euclides la terminología de números "surdus" para los irracionales. Después es usado por Fibonacci (s. XIII).
- S. XII Al Hassar (Maghreb) notación de fracción con numerador y denominador separados por barra horizontal. Después es usado por Fibonacci (s. XIII).
- S. XIV-XVI Escuela de Kerala de astronomía y matemática. Uso de series infinitas para varios números trascendentes como π y valores trigonométricos. Uno de los pioneros es Madhava de Sangamagrama (1350-1425) quien se conoce como impulsor del paso de lo finito al infinito. Entre otros cálculos halló un valor de π con 11 cifras decimales correctas y la serie alternada de Leibniz-Gregory.
- S. XV Jamshid al Kashi (Samarcanda, 1380-1429) "La llave de la aritmética" (1427) Cálculo con fracciones decimales, raíces enésimas, irracionalidades
- 1525 Christoph Rudolff (Viena, 1499-1545) En su libro "Coss" (1525) usa polinomios con coeficientes irracionales, introduce símbolo para la raíz cuadrada abreviatura de la letra r minúscula inicial de radix.
- 1544 Michael Stifel (Jena, 1487-1567) "Arithmetica Integra" con un estudio de las irracionalidades y notaciones $+$, $-$, $\sqrt{\cdot}$
- 1585 Simón Stevin (Brujas, 1548-Leyden, 1620) "De Thiende" (La Décima) Teoría general de las fracciones decimales que habían sido usadas mucho antes por árabes y cosistas germanos, pero ninguno pretendió sustituir las fracciones ordinarias ni elaboró un sistema de notación coherentes. También publica "L'Arithmétique" donde introduce métodos para encontrar valores aprox. de las raíces de polinomios de cualquier grado y acepta cualquier tipo de número real (no acepta los imaginarios)
- 1591 François Viète (Fontenay, 1540-París, 1603) "In artem anlyticem isagoge" (Introducción al arte analítico) introduce la notación y el álgebra de los polinomios. No acepta ni números irracionales, ni negativos ni imaginarios.
- 1592 Jöst Bürgi (Suiza, 1552-1632) Usa la coma para separar la parte entera de la decimal y elimina la mención del orden decimal. Kepler y otros comienzan a usar la notación decimal con los logaritmos en la astronomía.
- 1613 Pietro Cataldi (Bologna, 1548-1626) "Trattato del modo brevissimo di trovar la radice quadra delli numeri" introduce la operatoria con las fracciones continuas (sin denominarlas).
- 1656-57 John Wallis (Kent, 1616-1703) "Aritmética del Infinito" extiende las notaciones exponenciales de Descartes (1637) a exponentes negativos y fraccionarios. Introduce símbolo del infinito. En "Matemática General o Curso Completo de Aritmética" (1657) trabaja con diferentes representaciones de los números.
- 1707 Isaac Newton (1643-1727) *Arithmetica Universalis* (ed. Latín 1707, 22, 32, 52, 61; en inglés 1720, 1728, 1769; en francés 1802) escrita entre 1673 y 1683

destinada a texto de los cursos en Cambridge. Fórmulas para las potencias de las raíces de una ecuación algebraica, extendiendo los resultados de Cardano, Viète y Girard (1629); generaliza regla de Descartes para determinar el número de raíces reales y una regla para determinar una cota superior para raíces positivas. Posición conservadora: "Las ecuaciones son expresiones del cálculo aritmético y no tienen propiamente su lugar en la Geometría"

- 1737 Euler (Basilea, 1707-San Petersburgo, 1783) demuestra la irracionalidad de los números e y e^2. Sospecha que las potencias de e son todas irracionales y que son linealmente independientes sobre $\mathbb{Q}$, al parecer tiene la idea de la clasificación de los irracionales.
- 1760 Lambert (Alsace, 1728-Berlín, 1777) demuestra la irracionalidad de π.
- 1826-30 Abel (1802-1829) y Galois (1811-1832) descubren la clasificación de los irracionales
- 1844 Liouville (1809-1882) encuentra los primeros números trascendentes y da criterio de trascendencia a través de condición de aproximación.
- 1857-1872 Dedekind (Braunschweig, 1831-1916) da su definición rigurosa de número irracional y de número real. Más tarde prueba que el conjunto de irracionales algebraicos es numerable en carta a Cantor que finalmente lo publica como suyo en 1874 con el título "Sobre una propiedad del conjunto de todos los números algebraicos".
- 1873 Hermite (Lotaringia, 1822-1901) demuestra la trascendencia de e.
- 1882 Lindemann (Hannover, 1852-1939) demuestra la trascendencia de π
- S. XX se estudia la topología inducida por $\mathbb{R}$ en el conjunto no numerable de los irracionales: la métrica usual no es compatible, pero se prueba que esta topología en el conjunto de los irracionales es metrizable (por ser un G_δ) y disconexa.
- 1934 Gelfond (Petersburgo, 1906-68) y Schneider (Frankfurt, 1911-88) prueban, independientemente, que a^b es trascendente para a algebraico diferente de 0 y 1, y b algebraico irracional. De esta forma se incluyeron muchas estrellas a la constelación.

Referencias y bibliografía

Burger, E. B. (2008). *An Introduction to Number Theory*. Partes I y II The Teaching Company. Virginia.

Gheverghese, G. (1996). *La cresta del pavo real. Las matemáticas y sus raíces no europeas*. Ed. Pirámide. Madrid.

Ifrah, G. (1997). *Historia Universal de las Cifras*. Editorial Espasa Calpe. Madrid.

Niven, I. (2005). *Irrational Numbers*. MAA. Washington DC. (1ª ed. de 1961)

Sánchez, C. y González, L. G. (2013). *Dedekind. El Arquitecto de los Números*. Editorial Nivola. Madrid

Sánchez, C. y Roldán, R. (2012) *Paseo por el universo de los números*. Editorial Academia. La Habana.

Sánchez, C.; Valdés, C. (2010) *El entrañable encanto de las matemáticas*. Editorial Félix Varela. La Habana.

Swetz, F. J. (ed.) (1994). *From five fingers to infinity: a journey through the history of mathematics*. Open Court Publishing Company. Chicago.

Wells, D. (1986). *The Penguin dictionary of curious and interesting numbers*. Penguin Books Ltd. Middlesex.