Conocimiento de matemáticas y tareas en la formación de maestros[1]

Salvador Llinares
Departamento de Innovación y Formación Didáctica
Universidad de Alicante
España
sllinares@ua.es

Resumen[2]

La formación matemática de los maestros es una preocupación relevante a nivel internacional. En este trabajo identificamos dos ideas que ayudan a organizar nuestras reflexiones sobre este tema. En primer lugar, la necesidad de considerar ámbitos del contenido matemático en sentido amplio y "grandes ideas" que articulan las matemáticas para pensar en la formación matemática de los maestros. En segundo lugar, se ejemplifican tres aproximaciones complementarias para el desarrollo del conocimiento de matemáticas: resolución de problemas de matemáticas, análisis de producciones de los estudiantes, aproximación que integra diferentes tareas profesionales- planificar, gestión de la interacción y análisis de las producciones de los estudiantes. Finalmente, se reconoce el carácter contextualizado que pueden adoptar estas aproximaciones y la necesaria articulación de agendas de investigación vinculadas.

Palabras clave

Formación de maestros, competencia docente, aprendizaje del profesor, conocimiento de matemáticas.

Abstract

The mathematical preparation of teachers is of relevant international concern. In this paper we identify two ideas that help organize our thoughts on this subject. First, is the need to consider the mathematical content areas broadly and "big ideas" that articulate mathematical thinking in mathematics teacher preparation. Second, three complementary approaches to developing knowledge of mathematics are exemplified: mathematical problem solving, analysis of student work, and approaches that integrate the different professional tasks of planning, management of interactions and analysis of student work. Finally, the contextual character that can adopt these approaches and the necessary joint research agendas linked are recognized.

Key words

Teacher training, teaching competence, teacher learning, knowledge of mathematics.

[1] Este trabajo corresponde a una conferencia plenaria dictada en la I CEMACYC, celebrada en Santo Domingo, República Dominicana el año 2013.

[2] El resumen y las palabras clave en inglés fueron agregados por los editores.

1 Introducción

El desarrollo de la competencia matemática de los estudiantes como un aspecto de lo que significa ser un ciudadano formado es un objetivo de los movimientos de reforma curricular y de innovación en la enseñanza. Los mecanismos utilizados para lograr este fin son las reformas curriculares y la introducción paulatina de nuevos recursos didácticos (software, uso de TICs, etc). Sin embargo, un actor clave para la mejora de la enseñanza de las matemáticas es el profesor de matemáticas. Como consecuencia en los últimos años se han producido numerosos trabajos aportando información sobre la naturaleza y características del conocimiento que debería tener un profesor para apoyar el desarrollo de la competencia matemática de sus estudiantes (Ball, Thames y Phelps, 2008; Pinto y González, 2008), y de formas de entender el aprendizaje del maestro. En este contexto es posible identificar tres consecuencias del interés sobre el conocimiento del maestro y su desarrollo. En primer lugar las aportaciones en relación a la identificación de lo que el futuro maestro conoce de los tópicos matemáticos (Batanero, Ruiz y Arteaga, 2010; Fortuny, Batanero y Estrada, 2004; Gozato, Godino y Neto, 2011; Ortiz, y Font,2011; Sgreccia y Massa, 2012). En segundo lugar, las características que pueden adoptar las tareas y los entornos de aprendizaje que los formadores proponen para el desarrollo del conocimiento del profesor y fomentar maneras de usarlo en la resolución de problemas profesionales generados en la práctica de enseñar matemáticas (Llinares, Valls y Roig, 2008; Monchón y Flores, 2010; Prieto, y Valls, 2010). Finalmente, información sobre el aprendizaje del maestro y factores que pueden apoyarlo o limitarlo lo que permite una mejor comprensión de este proceso (Llinares, 2012-b; Penalva, Rey y Llinares, 2013).

Un tema transversal a estos tres ámbitos en la formación de maestros desde la perspectiva de las matemáticas es la manera en la que el conocimiento de matemáticas necesario para desarrollar las tareas profesionales vinculadas a la enseñanza de las matemáticas puede ser desarrollado en los programas de formación. Centrarnos en este tema genera cuestiones sobre cómo el conocimiento de matemáticas del maestro se relaciona con otros dominios del conocimiento para la enseñanza y qué formas pueden adoptar las tareas (Clarke, Grevholm, & Millman, 2009) y de qué manera se pueden articular (Llinares Valls y Roig, 2008) en los programas de formación. En este trabajo aportamos algunas ideas sobre el papel que desempeña el conocimiento de matemáticas en la resolución de problemas profesionales y qué forma pueden adoptar las tareas en los programas de formación complementando los focos sobre la resolución de problemas de matemáticas, el análisis de las producciones matemáticas de los alumnos y la realización de actividades integrando diferentes tareas profesionales relativas a la enseñanza de las matemáticas.

2 El conocimiento de matemáticas del maestro en la resolución de problemas profesionales

Algunas de las tareas profesionales del maestro son gestionar el aprendizaje de las matemáticas de sus alumnos presentándoles tareas matemáticamente relevantes, interaccionando con ellos durante la resolución y valorando sus producciones con el objetivo de tomar decisiones de acción. Durante todo este proceso, la manera en la que el maestro comprende los contenidos matemáticos desempeña un papel relevante. Junto a la comprensión matemática otras variables que intervienen en este proceso son las concepciones-creencias que los maestros tienen sobre su papel como maestros, lo que significa aprender matemáticas y cuáles son las evidencias de este aprendizaje (Lebrija, Flores, Trejos, 2010; Prieto y Valls, 2010; Sanhueza, Penalva y Friz, 2013). En este contexto, las experiencias que tengan los futuros maestros como aprendices de matemáticas en cierta medida determinarán la manera en la que pueden aprender a resolver diferentes tareas profesionales como elegir o diseñar problemas de matemáticas relevantes para el aprendizaje de sus estudiantes, o considerar de qué manera las producciones de sus alumnos son evidencia del aprendizaje matemático pretendido. Esta reflexión subyace a las cuestiones formuladas por los formadores de maestros al considerar qué necesita el maestro para desenvolverse en estas situaciones. Las respuestas que indican que el maestro necesita un conocimiento de matematicas "fuerte" y "sólido" son demasiado generales cuando hay que tomar decisiones en relación a la formación inicial.

Intentar concretar estas respuestas ha llevado a enfatizar una perspectiva profesional de la labor del maestro considerando el papel que desempeña el conocimiento de matemáticas en las diferentes tareas profesionales que debe realizar (Ball y Bass, 2000): desempaquetar las ideas y procedimientos matemáticos integrados en las tareas matemáticas, identificar diferentes representaciones para mostrar las ideas matemáticas, analizar métodos y soluciones diferentes de las de uno mismo y dotar de sentido a lo que entienden sus alumnos. Estas actividades están vinculadas a tareas profesionales como la planificación de la enseñanza, la gestión de la interacción y el discurso matemático en el aula y la valoración del aprendizaje de los estudiantes dotando de sentido a sus producciones (Llinares, 2012-a). En este sentido, el conocimiento de matemáticas que el maestro puede necesitar está determinado por los contextos de uso de este conocimiento en la resolución de las tareas profesionales. Esta perspectiva genera referencias para contestar a la cuestión sobre las matemáticas que debería conocer un maestro (Climent; Romero; Carrillo; Muñoz; Contreras, 2013; Monchon y Morales, 2010). En particular porque traslada la atención desde una perspectiva disciplinar del conocimiento de las matemáticas a una perspectiva profesional definida por la tarea que debe realizar un maestro: enseñar matemáticas (Ball; Thames, y Phelps, 2008).

Esta reflexión conlleva la necesidad de identificar las grandes ideas matemáticas que pueden articular la enseñanza de las matemáticas para definir la formación matemática del maestro. Ejemplos de estas ideas transversales pueden ser el desarrollo del sentido numérico, los procesos de generalización, el razonamiento proporcional, el pensamiento relacional que permite adoptar una visión estructural de la aritmética previo a la introducción del algebra, los procesos de simbolización y así. Adoptar esta perspectiva transversal a los dominios matemáticos pretende que el maestro pueda establecer relaciones entre diferentes ámbitos del currículum y generar una visión más holística del contenido matemático que debe enseñar. Por ejemplo, para dar razones de por qué los procedimientos son como son y proporcionar explicaciones pertinentes. Desempaquetar las ideas matemáticas que justifican los procedimientos o hacer explícitos los significados de los conceptos cuando se usan diferentes modos de representación requiere una

Ana es una niña de tercer curso de Primaria que ha realizado la siguiente cuenta

$$\begin{array}{r} 703 \\ -\ 27 \\ \hline \end{array}$$

escribiendo en su cuaderno

$$\begin{array}{r} 6 \\ 7\ 0_1\ 3 \\ -\quad 2\ 7 \\ \hline 6 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 5 \\ \cancel{6}\quad\ \ \\ 7_1\ 0_1\ 3 \\ -\quad 2\ 7 \\ \hline 8\ 6 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 5\quad\ \ \\ \cancel{6}\quad\ \ \\ 7_1\ 0_1\ 3 \\ -\quad 2\ 7 \\ \hline 5\ 8\ 6 \end{array}$$

a) ¿Podrías decir qué ha sucedido?, ¿cuál pudo ser la razón por la que Ana respondiera de esa manera?

b) ¿Cómo podrías ayudarla?

c) ¿Cómo podrías diseñar la enseñanza para prevenir esta situación?

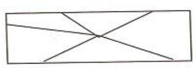
ESCENA 2. El caso de Carlos y Javier: el uso de los modos de representación en la construcción y comunicación del significado para las fracciones

Cuando he enseñado las fracciones, nunca he tenido muchas dificultades. Mis alumnos normalmente han entendido rápidamente la idea de fracción. Con las operaciones ocasionalmente he tenido más dificultades, pero proponiéndoles mucha práctica he conseguido que una mayoría de ellos superara bien los exámenes. Este año estoy dando 5° y, como el año pasado ya vimos alguna cosa de fracciones, pensé que podríamos empezar este tema recordando alguna cosa del año pasado. Para ello, coloqué la siguiente tarea en la pizarra:

¿Qué son los 5/4 de  ?

Me di cuenta de que había algún grupo de alumnos que no entendían bien la tarea.

Mientras estaban realizando este ejercicio, me acerqué a Javier, y le repetí la tarea, pidiéndole que me explicara cómo lo estaba haciendo. Él empezó a dividir en partes un rectángulo que tenía pintado en un folio, y dibujó lo siguiente:



Luego sombreó cada una de las partes para indicar que tenía cinco cuartos.

Para intentar obtener más información sobre el significado de fracción que se podía tener en ese momento, propuse a Carlos la siguiente tarea, en la que se utilizan fichas como modo de representación. En estos momentos, sabía que no se había utilizado este modo de representación en la introducción de la idea de fracción, pero intentaba ver lo que sucedía.

¿Cuántas fichas son los 2/3 de 6 fichas?

En el proceso de resolución, Carlos dibujó un círculo, lo dividió en tres partes distintas y colocó dos fichas sobre el círculo, dando como respuesta 2 fichas.

Figura 1: Situaciones profesionales en la enseñanza de las matemáticas en educación primaria que requiere del maestro una comprensión de la idea de unidad y de los modos de representación. Fuente: Llinares (2002). El sentido numérico y la representación de los números naturales. En E. Castro (ed.), *Didáctica de la matemática en la Educación Primaria* (pp.151-176). Madrid: Síntesis; y Llinares (2003). Fracciones decimales y razón. En MC. Chamorro (ed.), *Didáctica de las matemáticas para primaria* (pp.187-220). Madrid: Pearson-Prentice Hall.

comprensión de las matemáticas escolares que define el conocimiento especializado de matemáticas. Especializado en el sentido de que es un conocimiento de matemáticas que le permita realizar las tareas profesionales de ser maestro.

Por ejemplo, una de las ideas importantes en la educación primaria es el desarrollo del sentido numérico en los estudiantes de educación primaria. El sentido numérico permite a los alumnos tomar decisiones relativas a las relaciones entre las cantidades y los números para proporcionar razones válidas para sus decisiones. Una de las ideas que un maestro debe gestionar en la enseñanza de las matemáticas en la educación primaria para el desarrollo del sentido numérico es la idea de unidad en aritmética y su representación. Esta idea es clave en diferentes ámbitos de la enseñanza de las matemáticas en los primeros niveles y, por tanto, subraya la importancia de la comprensión por parte del maestro del papel que desempeña. Sin embargo, esta idea adopta diferentes roles en los ámbitos de la aritmética de la educación primaria en las tareas profesionales que debe realizar un maestro. En la figura 1 aparecen dos situaciones profesionales que debe manejar un maestro en las que la idea de unidad y la representación de las ideas matemáticas están inmersas.

En la primera situación se describe la respuesta dada por una alumna de tercero de educación primaria al aplicar un procedimiento de cálculo. La segunda describe las respuestas de dos alumnos de quinto curso de educación primaria a actividades de representar fracciones. En las dos situaciones las ideas matemáticas, y en particular la idea de unidad, están representadas por modos de representación usuales en la enseñanza y están inmersas en una red de conceptos matemáticos que el maestro debe desempaquetar para poder comprender las respuestas de los alumnos. En la primera, el maestro debe reconocer la exigencia cognitiva de la resta 703-27 para un alumno de tercero de educación primaria y puesta de manifiesto por la necesaria comprensión de las descomposiciones no canónicas de los números (asumir que 7 centenas + 3 unidades es equivalente a 6 decenas + 9 decenas + 13 unidades) y cómo interviene la comprensión de esta equivalencia para justificar los diferentes pasos del algoritmo. La manera en la que la respuesta de la alumna refleja o no las relaciones matemáticas entre las diferentes representaciones del número y como maneja los símbolos debe proporcionar información al maestro sobre cómo se comprenden o no las diferentes unidades y la representación de sus equivalencias

En la segunda situación, las respuestas de los dos alumnos deberían proporcionar al maestro información sobre la manera en la que estos están o no comprendiendo la idea de unidad y cómo es representada con diferentes magnitudes en el caso de las fracciones. El significado de la unidad y cómo se puede usar para representar diferentes cantidades debe ser desempaquetado por el maestro para dotar de sentido a las producciones de Carlos y Javier, los dos alumnos que están respondiendo a las tareas de representar fracciones utilizando magnitudes continuas (la figura de un rectángulo) o magnitudes discretas (usando fichas o chips).

La comprensión matemática que un maestro necesita para poder resolver de manera satisfactoria estas situaciones profesionales le exige usar su comprensión de las matemáticas para entender una situación de enseñanza. La característica del conocimiento de matemáticas está en que la comprensión del maestro de la idea de unidad y cómo se representa en determinados ámbitos de la aritmética le debe permitir determinar la exigencia cognitiva de la tarea propuesta a los estudiantes y comprender las respuestas de los estudiantes desde el punto de vista del significado matemático movilizado por estos. Este conocimiento es lo que se ha venido llamando "conocimiento de matemáticas para la enseñanza" (Mathematical Knowledge for Teaching, Ball y Bass, 2000). En cierta medida, de lo que estamos hablando es de conocer de manera más explícita las relaciones y significados matemáticos que en otros ámbitos fuera de la enseñanza no sería necesario. Es decir, para las matemáticas escolares los maestros deben conocer de manera explícita las relaciones entre los significados y diferentes modos de representación. Esto puede implicar un re-aprender lo que se supone ya se conoce o llegar a aprender de manera diferente las matemáticas que ya se conocen. Este aspecto de re-aprender las matemáticas que se supone ya se conoce viene determinado por el "contexto de uso" de este conocimiento, que es la resolución de las situaciones generadas en la enseñanza de las matemáticas.

La figura 2 muestra ejemplos de tareas matemáticas para los maestros que les pueden ayudar a re-aprender el conocimiento necesario para gestionar las situaciones de enseñanza descritas en la Figura 1, relativas a la idea de unidad. Las dos primeras tareas exigen a los futuros maestros gestionar los significados de la idea de unidad en diferentes modos de representación y en diferentes contextos aritméticos como son las descomposiciones múltiples de los números usando símbolos y la representación de los números con un recurso didáctico que permita ejemplificar los cambios en las unidades para desarrollar una resta con números decimales. El conocimiento de matemáticas que deben movilizar los maestros en estas tareas forman una red de ideas matemáticas de lo que constituye el conocimiento de matemáticas para enseñar formado por la idea de valor de posición y agrupamiento que fundamentan los procesos de representación de los números, los significados de los algoritmos de cálculo y las descomposiciones múltiples de los números en el sistema de numeración decimal.

Las tareas con fracciones en la figura 2 se centran en las ideas matemáticas que los futuros maestros deben re-aprender en relación a la idea de unidad, partes congruentes y los diferentes modos de representación que son susceptibles de ser usados en la enseñanza de las fracciones. De la misma manera que antes, estas tareas exigen a los futuros maestros explicitar los significados relativos a la idea de unidad y cómo representarla. En particular, para tratar algunas ideas implícitas que los futuros maestros suelen asociar a la representación de la idea de unidad, como el considerar la figura de polígonos como única manera de representarla. Este tipo de tareas responde al objetivo de ayudar a explicitar los diferentes elementos matemáticos que son necesarios reconocer para gestionar las situaciones de la enseñanza de las matemáticas.

Estos ejemplos de tareas, examinados conjuntamente en dos ámbitos diferentes como son la representación de los números y su contextualización en la realización de las operaciones y la representación de las fracciones usando la recta numérica y magnitudes continuas intentan poner de manifiesto la relación entre lo matemático y lo didáctico. En particular, poder ejemplificar la idea de cómo entender el conocimiento de matemáticas que un maestro necesita desde la perspectiva del "uso del conocimiento de matemáticas" en la resolución de situaciones profesionales. Es precisamente la idea del "uso del conocimiento" para resolver situaciones profesionales la que permite caracterizar algunos aspectos de la noción de competencia docente del maestro.

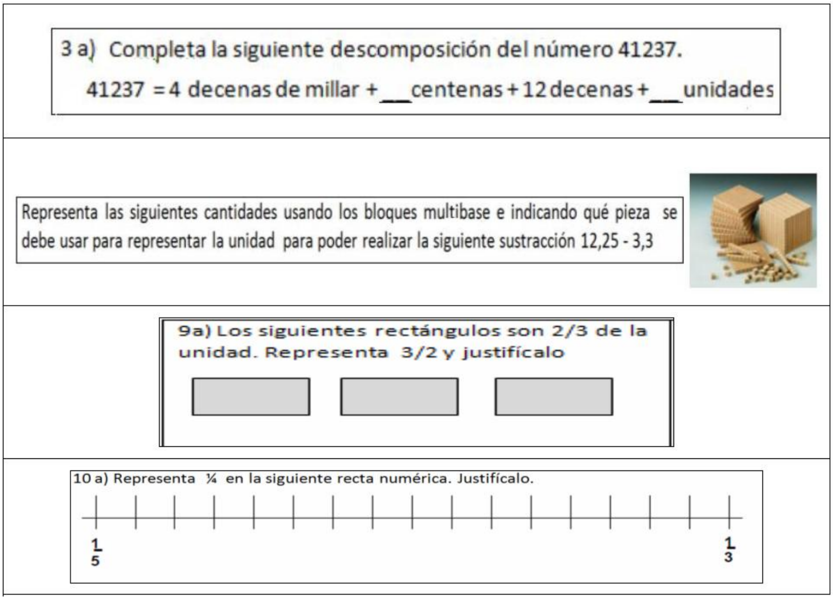


Figura 2: Ejemplos de tareas para ayudar a los futuros maestros a comprender la idea de unidad y los modos de representación en diferentes ámbitos de la aritmética.

Específicamente en lo relativo a la manera en la que se debe conocer los contenidos matemáticos para poder resolver las tareas profesionales de la enseñanza de las matemáticas.

La resolución de este tipo de tareas por parte de los futuros maestros y la discusión sobre diferentes argumentos que apoyan las resoluciones tienen como objetivo identificar y explicitar claramente las relaciones entre los conceptos y procedimientos matemáticos que constituyen la red de ideas matemáticas alrededor de las nociones que articulan las matemáticas en la educación primaria. En particular, las investigaciones centradas en el desarrollo de la competencia docente "mirar de manera profesional" el pensamiento matemático de los estudiantes (Fernández, Llinares, Valls, 2011, 2013; Zapatera y Callejo, 2013) han estado mostrando que el desarrollo de esta competencia se evidencia en la medida en la que los maestros son capaces de reconocer y relacionar un mayor número de elementos matemáticos relevantes en las resoluciones de los problemas de matemáticas por parte de los estudiantes. Es decir, el conocimiento de matemáticas para la enseñanza como "conocimiento en uso" en las tareas de identificar e interpretar la comprensión matemática de los estudiantes se convierte en una variable que ayuda a caracterizar diferentes niveles de desarrollo de esta competencia docente. De esta manera es como la competencia docente del maestro se vincula a su capacidad de reconocer las relaciones entre los elementos matemáticos de manera explícita en los problemas y resoluciones realizadas por los alumnos.

Por ejemplo, la competencia docente del futuro maestro, en la segunda tarea en la figura 2 (representar con bloques multibase la sustracción 12,25–3,3 para justificar el algoritmo) se pone de manifiesto cuando este argumente que es necesario que el bloque elegido para representar la unidad debe permitir representar las dos cantidades con el mismo referente. De esta manera las placas pueden ser usadas como una representación de la unidad para representar los dos números con el fin de justificar mediante los bloques multibase los pasos del algoritmo: en el minuendo (12,25) la descomposición de una placa (unidad) en 10 barras (décimas) para poder compararlas-restarlas con las 3 placas-unidad y 3 barras-décimas que representan el sustraendo (3,3). La justificación de la elección y uso de los recursos didácticos se apoya en el reconocimiento de la descomposición no canónica del número y las equivalencias entre las diferentes descomposiciones (admitir que 1 decena, 2 unidades, 2 décimas y 5 centésimas es equivalente a 1 decena, 1 unidad, 12 décimas y 5 centésimas). De esta manera, el conocimiento sobre la equivalencia de las descomposiciones no canónicas en la representación de los números en el sistema de numeración decimal (con la consideración de la idea de agrupamiento y valor de posición) es el conocimiento de matemáticas especializado en este tipo de situaciones. Esto es lo que marca la diferencia entre conocer las matemáticas que justifican la realización de los algoritmos y su relación con los recursos didácticos con el conocimiento únicamente de las reglas que rigen la elaboración de manera correcta del procedimiento de cálculo. De esta manera poder desempaquetar e identificar los conceptos e ideas matemáticas que fundamentan la resolución de las tareas, desglosar los procedimientos y conocer las razones que los fundamentan y encontrar maneras adecuadas de representarlos para comunicar las ideas matemáticas a los alumnos son características del conocimiento de matemáticas especializado para la enseñanza.

Las reflexiones anteriores sobre el papel que desempeña el conocimiento de matemáticas del maestro en las situaciones de enseñanza-aprendizaje plantean la necesidad de que los formadores de maestros empiecen a considerar de qué manera se puede abordar la cuestión relativa al necesario re-aprendizaje de los conceptos matemáticos que aparecen en la educación primaria. Además, lo que pone de manifiesto los resultados de algunas investigaciones sobre el conocimiento de matemáticas del maestro (Muñoz-Catalán y Carrillo, 2007; Saenz, 2007; Valdemoros, 2010) es que es necesario potenciar el re-aprendizaje matemático en determinados ámbitos para que los maestros puedan gestionar con garantías nuevos desarrollos curriculares que están dirigidos a desarrollar altas capacidades de razonamiento en los alumnos de educación primaria. Un aspecto relevante en estos momentos es el reconocimiento de la interrelación mutua entre lo matemático y lo didáctico que se da en la resolución de las situaciones profesionales de la enseñanza de las matemáticas. Además, las reflexiones anteriores permiten identificar una característica del conocimiento de matemáticas para la enseñanza del maestro en la necesaria explicitación de las relaciones entre los conceptos y procedimientos matemáticos.

Las investigaciones sobre el conocimiento de los maestros suelen indicar que los futuros maestros tienen dificultades en proporcionar justificaciones o argumentos de las decisiones tomadas cuando resuelven los problemas. Esta dificultad puede ser considerada una evidencia del conocimiento procedimental y de la escasa consciencia de las relaciones conceptuales que apoyan los procedimientos posiblemente debido a la manera en la que estos futuros maestros han estado aprendiendo las matemáticas. Ello justifica la necesidad de un re-aprendizaje de los matemáticas que son el foco de la enseñanza en la educación primaria (Zazkis, 2011). Esta situación plantea desafíos para los formadores de profesores en el sentido de cómo plantear situaciones de resolución de problemas sobre conceptos que los futuros maestros han aprendido hace tiempo y considerar de qué manera este conocimiento anterior apoya o limita su aprendizaje actual. Esta cuestión subraya el hecho de lo que significa "aprender de nuevo lo que ya fue aprendido" (Zazkis, 2011) que a veces puede requerir aproximaciones instruccionales diferentes que cuando se intenta construir un nuevo conocimiento. En este sentido, la familiaridad de los futuros maestros con algunos contenidos matemáticos elementales situados en la educación primaria puede no ser suficiente para construir un conocimiento de matemáticas para la enseñanza que fundamente la competencia docente del maestro.

3 Tareas en los programas de formación de maestros para el desarrollo del conocimiento de matemáticas para enseñar

Reconocer que el conocimiento de matemáticas para la enseñanza es una manea de conocer las matemáticas necesario para la resolución competente de las situaciones de enseñanza desde el punto de vista de explicitar los elementos matemáticos y relaciones relevantes plantea desafíos para los formadores de maestros. En particular, porque los maestros deben de llegar a identificar y comprender las relaciones entre las grandes ideas que articulan el currículo de matemáticas que deben gestionar. Esto significa que deben de ser capaces de conocer estas ideas de manera transversal en los diferentes dominios matemáticos (como se ha descrito en la sección anterior) así como ser capaces de identificar las situaciones y las representaciones más adecuadas para transmitirlas a sus estudiantes. Por otra parte, entender el conocimiento de matemáticas de esta manera conlleva considerarlo una variable que interviene en el desarrollo de la competencia docente "mirar de manera profesional" el pensamiento matemático de los estudiantes. Esta competencia es la que le permite entender los posibles razonamientos de sus alumnos y generar explicaciones de las alternativas observadas en sus respuestas y en sus dificultades.

Los formadores de maestros han generado respuestas a esta situación a nivel internacional desde diferentes posicionamientos (Clarke, Grevholm y Millman, 2009; Tirosh y Wood, 2008; Zazkis, 2011). El objetivo común es que los futuros maestros comprendan los contenidos matemáticos de manera que les permita desarrollar de manera competente la enseñanza. Podemos identificar tres aproximaciones complementarias dirigidas a este fin: un foco sobre la resolución de problemas de matemática, un foco sobre el aprendizaje matemático de los estudiantes, y finalmente, un foco integrando las tareas profesionales del maestro (Llinares, Valls y Roig, 2008). La integración de estos focos en contextos reglados de formación o en talleres de formación con diferentes aproximaciones está aportando evidencias de las caracteristicas del desarrollo del conocimiento de matemáticas para enseñar según se manifiesta en las diferentes tareas profesionales del maestro (Monchón y Morales, 2010; Sowder, Philipp, Armstrong, Schappelle, 1998). En lo que sigue describiré las características de algunos tipos de tareas que se están usando desde las diferentes aproximaciones. El objetivo aquí es subrayar la necesidad de aproximaciones complementarias para el desarrollo del conocimiento de matemáticas para la enseñanza considerando las diferentes tareas profesionales en las que se usan.

En la primera de las aproximaciones, la resolución de problemas de matemáticas, las tareas se centran en la resolución de problemas que permiten al futuro profesor tener la oportunidad de re-aprender lo que se supone le es familiar, ampliar su comprensión y enfrentarse a concepciones matemáticas erróneas que ha podido generar a lo largo del tiempo (Llinares, 2011; Zazkis, 2011). Por ejemplo, Zazkis (2011) plantea la necesidad de que los futuros maestros puedan llegar a identificar las ideas matemáticas que subyacen en la resolución de problemas en el contexto de la teoría de números. Se plantea así el objetivo adicional de que los futuros maestros entren en contacto con aspectos relevantes de la actividad matemática (búsqueda de patrones, identificación de estructuras, desarrollo de pruebas). Por tanto, la actividad matemática desencadenada y entendida en este sentido proporciona la oportunidad a los futuros maestros de aprender a identificar lo matemáticamente relevante pudiendo llegar a explicitar las relaciones que justifican lo realizado. La figura 3 incluye algunos de los tipos de problemas planteados en el ámbito de la teoría de números que Zazkis (2011) indica permiten aproximarse al objetivo de proporcionar contextos para que los futuros maestros re-aprendan las matemáticas que se supone ya conocen. En la figura 2 existen otros tipos de problemas que pueden responder a este objetivo.

Sea $M= 3^3 x 5^2 x 7$.

¿Es M divisible por 7?

¿Es M divisible por 5, 2, 9, 63, 11, 15? Explícalo

Sea $M =3^3 x 5^2 x 7 + 2$. ¿Es divisible por 7?

Figura 3: Ejemplos de problemas (Zazkis, 2011)

En la segunda de las aproximaciones, la idea es desarrollar el conocimiento de matemáticas vinculado a la tarea de analizar las respuestas de los alumnos a los problemas de matemáticas. Con esta aproximación se pretende que el proceso de re-aprendizaje de las matemáticas que pueden desarrollar los futuros maestros se haga vinculado al reconocimiento de las características del aprendizaje matemático de sus alumnos. Es decir, apoyar el re-aprendizaje de algunos contenidos matemáticos por parte del futuro maestro sobre la base del análisis de las dificultades y trayectorias de aprendizaje de los alumnos de primaria. Esta aproximación se basa en la relación existente entre el conocimiento explícito y comprensión de los maestros de las relaciones entre los elementos matemáticos en los diferentes dominios de conocimiento y la competencia "mirar de manera profesional" las producciones de los alumnos de primaria cuando resuelven problemas (Fernadez, Llinares, Valls, 2013; Oliveira, de la Roque, 2011; Zapatera y Callejo, 2013). Existe una gran variedad de tipologías de actividades que los futuros maestros pueden realizar, desde el análisis de respuestas de los estudiantes mostradas mediante video-clips y la realización de entrevistas clínicas a los estudiantes (Penalva, Escudero y Barba, 2006). En este planteamiento, los futuros maestros deben superar la perspectiva de solo identificar dificultades y errores en los alumnos para aprender a reconocer características del desarrollo del pensamiento matemático. Esto implica que las tareas deben poner al alcance de los futuros maestros respuestas de los alumnos que muestren las características del desarrollo de los significados en los diferentes dominios matemáticos.

Una estructura que pueden adoptar las tareas a realizar por los futuros maestros en esta perspectiva viene ejemplificada en la Figura 4. Estas tareas constan de problemas y respuestas de los alumnos de primaria reflejando diferentes niveles de comprensión por parte de los alumnos de primaria de las ideas matemáticas. Este tipo de tareas constituyen los contextos para que los futuros maestros puedan aprender a identificar los elementos matemáticos que caracterizan los problemas y que deben ser movilizados para su resolución por los alumnos de primaria como paso previo a reconocer diferentes características en la comprensión matemática de los alumnos puesta de manifiesto por sus respuestas. Llegar a reconocer las diferentes características que reflejan diferentes niveles de desarrollo del pensamiento matemático en términos de los elementos matemáticos que son o no movilizados por los estudiantes es una manifestación de la competencia docente. En este tipo de tareas lo que se les pide a los futuros profesores es que describan las respuestas de los estudiantes destacando lo que consideran relevante en las respuestas dadas por los alumnos considerando las características del problema. Además, en algunas ocasiones se suele pedir que indiquen acciones que un maestro podría proponer para mejorar la comprensión de estos estudiantes. Estas indicaciones permiten explicitar de qué manera los elementos matemáticos característicos del proceso de resolución son considerados por los futuros profesores. La discusión colectiva sobre estos aspectos permite a los futuros profesores indagar sobre su propia comprensión matemática.

Finalmente podemos identificar una tercera aproximación complementaria a las anteriores que tiene como objetivo integrar el aprendizaje de las matemáticas en las diferentes tareas profesionales que debe desarrollar un maestro: elegir y diseñar problemas matemáticamente relevantes, gestionar la interacción con los alumnos – en este caso en un contexto clínico- y valorar la comprensión matemática de los alumnos puesta de manifiesto en la manera en la que resuelven los problemas planteados. En este tipo de tareas el conocimiento de matemáticas del futuro maestro interviene en la realización de las tareas profesionales – diseño, interacción, y análisis-. Aquí, el conocimiento de matemáticas se integra con el conocimiento de las matemáticas y los estudiantes cuando se interpretan las resoluciones de los alumnos a las tareas planteadas.

4 Algunas observaciones finales

La formación matemática de los maestros es una preocupación relevante a nivel internacional (Sorto, Marshall, Luschei, Carnoy, 2009; Tatto, Schille, Senk, Ingvarson, Peck, Rowley, 2008; Varas, Lacourly, Lopez, Giaconi, 2013). Esta preocupación se genera al reconocer que el conocimiento de matemáticas de los maestros es un elemento clave para la mejora de la enseñanza. Una consecuencia de esta situación son los intentos por clarificar que es lo que se está entendiendo por conocimiento de matemáticas para la enseñanza y cómo se puede hacer operativo y qué ha movilizado a los formadores de maestros en diferentes países. Las aportaciones realizadas están subrayando la necesi-

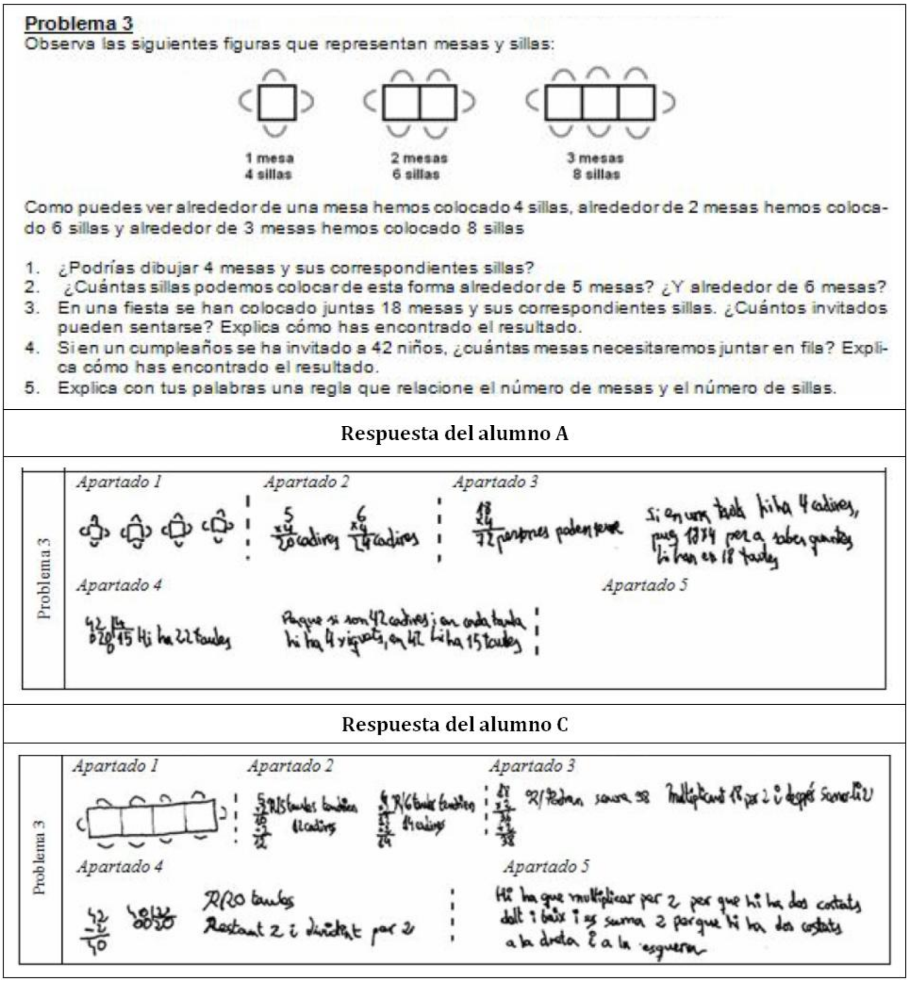
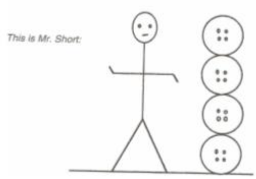


Figura 4: Ejemplos de problemas y respuestas de alumnos de primaria presentados a los futuros maestros usados en la investigación de Zapatera y Callejo (2013) para identificar cómo los futuros maestros reconocen los elementos matemáticos y sus relaciones en los procesos de generalización que intervienen en las respuestas de los estudiantes de educación primaria.

EXPLORANDO EL RAZONAMIENTO PROPORCIONAL: Mr Tall y Mr. Short



La longitud de Mr Short es 4 botones
La longitud de Mr. Tall es 6 botones
Cuando usamos clips para medir a Mr Tall y Mr Short obtenemos
La longitud de Mr Short es 6 clips
¿Cuál es la longitud de Mr. Tall en clips? ____________________
Explica cómo has llegado a la respuesta

ACTIVIDAD: Realizar una entrevista a algún alumno de primaria (preparación)

1.a. Usando la tarea de Mr. Tall /Short diseña 4 problemas cambiando solo los números (usa solo números menores de 20) y las relaciones multiplicativas entre ellos (por ejemplo usa algunas relaciones entre números enteras y otras no enteras).
1.b. Indica lo que puedes esperar de cómo resolverán los problemas los estudiantes que entrevistes

2. Entrevista a algunos alumnos de primaria e intenta averiguar como lo hacen (pregúntales que te expliquen como lo hacen). **No intentes enseñarles nada**, el objetivo es únicamente aprender a mirar cómo piensan matemáticamente los estudiantes de primaria.

Graba las entrevistas en video y luego trascríbelas.

3. Analizando las respuestas
Compara lo que has obtenido con lo que esperabas (apartado 1.b)
¿qué hemos aprendido?
Intenta asignar a cada niño alguno de los niveles de desarrollo que aparecen en el cuadro siguiente (*).
Justifica tus decisiones.

Fuente: Khoury, H.A. (2002). Classroom Challenge. Exploring Proportional Reasoning: Mr Tall/Mr. Short. En Litwiller, B. & Bright, G. (2002). *Making Sense of Fractions, Rations and Proportions. Yearbook2002* (pp.101-103). NCTM: Reston, Va.

Figura 5: Actividad integrando conocimiento de matemática para enseñar en el desarrollo de diferentes tareas profesionales: platear problemas, interacción con los estudiantes, análisis de las producciones de los estudiantes en el contexto del desarrollo del razonamiento proporcional.
(*) La actividad incorpora información teórica sobre diferentes niveles de desarrollo del razonamiento proporcional procedente de los resultados de las investigaciones en didáctica de las matemáticas en este ámbito.

dad de considerar las tareas profesionales que el maestro debe realizar (y por tanto en las que debe ser competente) como una referencia a considerar al intentar caracterizar el conocimiento de matemáticas para la enseñanza. Pero además, el poder realizar aproximaciones considerando grandes ámbitos de los dominios matemáticos – "grandes ideas" matemáticas que articulan la enseñanza – que permitan superar en los futuros maestros un conocimiento de las matemáticas parcelado y a veces desconectado.

Estas dos ideas descritas aquí para comprender las diferentes aproximaciones a la formación matemática de los maestros, es decir, la identificación de grandes ideas y dominios matemáticos para articular la propuesta de formación, y usar las tareas profesionales del maestro como referente están permitiendo proporcionar a los formadores de maestros diferentes aproximaciones complementarias. El desarrollo específico de estas diferentes aproximaciones puede estar condicionado en cada contexto particular por las tradiciones institucionales de las propuestas de formación y por las propias limitaciones de cada país. Por lo tanto es necesario el desarrollo de una línea de investigación en paralelo a las tareas de realizar propuestas de formación que puedan aportar información contextualizada en cada ámbito sobre la manera en la que los futuros maestros aprenden y/o re-aprenden el conocimiento de matemáticas y el conocimiento de didáctica de las matemáticas que es necesario para el desarrollo competente de la enseñanza de las matemáticas.

Reconocimientos

Este trabajo se ha realizado con apoyo de los Proyectos I+D+i, EDU2011-27288 del Ministerio de Ciencia e Innovación, España.

Referencias

Ball, D.L. y Bass, H. (2000). Interweaving content and pedagogy in teaching and learning to teach: Knowing and using mathematics. En J. Boaler (ed.), *Multiple perspectives on the teaching and learning of Mathematics* (pp. 83-104). Ablex Publishing: Westport, CT.

Ball, D.L., Thames, M.H. y Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What makes it Special? *Journal of Teacher Education, 59(*5), 389-407.

Batanero, M.C., Ruiz, B. y Arteaga, P. (2010). Análisis de la complejidad semiótica de los gráficos producidos por futuros profesores de educación primaria en una tarea de comparación de dos variables estadísticas. *Enseñanza de las Ciencias, 28*(1), 141-151.

Clarke, B., Grevholm, B. y Millman, R. (eds.) (2009). *Tasks in Primary Mathematics Teacher Education. Purpose, Use and Exemplars.* London: Springer.

Climent, N., Romero, J.M., Carrillo, J., Muñoz, M.C. y Contreras, L.C. (2013). ¿Qué conocimientos y concepciones movilizan futuros maestros analizando un video de aula? *RELIME. Revista latinoamericana ce investigación en matemática educativa, 16*(1), 5-12.

Fernández, C., Llinares, S. y Valls, J. (2011). Características del desarrollo de una mirada profesional en estudiantes para profesor de matemáticas en un contexto b-learning. *Acta Scientiae, 13*(1), 9-30. Brasil.

Fernández, C., Llinares, S. y Valls, J. (2013). Primary school teacher's noticing of students' mathematical thinking in problem solving. *The Mathematics Enthusiast, 10* (1&2), 441-468.

Fortuny, J.M.; Batanero, M.C. y Estrada, A. (2004). Un estudio sobre conocimientos de estadística elemental de profesores en formación. *Educación Matemática, 16*(1), 89-111.

Gozato, M., Godino, J.D. y Neto, T. (2011). Evaluación de conocimientos didáctico-matemáticos sobre la visualización de objetos tridimensionales. *Educación Matemáticas, 23*(3), 5-37.

Lebrija, A., Flores, R.C. y Trejos, M. (2010). El papel del maestro, el papel del alumno: un estudio sobre las creencias e implicaciones en la docencia de los profesores de matemáticas en Panamá. *Educación Matemática, 22*(1), 31-55.

Llinares, S. (2011). Tareas matemáticas en la formación de maestros. Caracterizando perspectivas. *Números, 78*, noviembre, 5-16.

Llinares, S. (2012-a). Formación de profesores de matemáticas. Caracterización y desarrollo de competencias docentes. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación matemática, nº 1*0, pp. 53-62. Costa Rica.

Llinares, S. (2012-b). Construcción de conocimiento y desarrollo de una mirada profesional para la práctica de enseñar matemáticas en entornos en línea. *AIEM. Avances de Investigación en Educación Matemática, nº 2,* 53-70. España.

Llinares, S., Valls, J. y Roig, A.I. (2008). Aprendizaje y diseño de entornos de aprendizaje basado en videos en los programas de formación de profesores de matemáticas. *Educación Matemática, 20*(3), 59-82. México.

Muñoz-Catalán, M.C. y Carrillo, J. (2007). Conocimiento numérico de futuros maestros. *Educación matemática, 19*(1), 5-25.

Monchón, S. y Morales, M. (2010). En qué consiste el "conocimiento matemático para la enseñanza" de un profesor y cómo fomentar su desarrollo: un estudio en la escuela primaria. *Educación Matemática, 22*(1), 87-113.

Oliveira, A.T. y de la Roque, G. (2011). O potencial das actividades centradas em produçoes de alunos na formaçao de professsores de matemática. *RELIME. Revista latinoamericana ce investigación en matemática educativa, 14*(3), 335-359.

Ortiz, J.J. y Font, V. (2011). Significados personales de los futuros profesores de educación primaria sobre la media aritmética. *Educación Matemática, 23*(2), 91-109.

Penalva, M.C., Escudero, I. y Barba, D. (2006). *Conocimiento, entornos de aprendizaje y tutorización para la formación del profesorado de Matemáticas. Construyendo comunidades de práctica*. Granada: Editorial Grupo Proyecto Sur.

Penalva, M.C., Rey, C. y Llinares, S. (2013). Aprendiendo a interpretar el aprendizaje de las matemáticas en educación primaria. Características en un contexto B-learning. *Educación Matemática, 25*(1), 7-21.

Pinto, J.E. y González, M.T. (2008). El conocimiento didáctico del contenido en el profesor de matemáticas, ¿una cuestión ignorada? *Educación Matemática, 20*(3), 83-100.

Prieto, J.L. y Valls, J. (2010). Aprendizaje de las características de los problemas aritméticos elementales de estructura aditiva en estudiantes para maestro. *Educación Matemática, 22*(1), 57-85.

Robert, A. y Pouyanne, N. (2005). Formar formadores de maestros de matemáticas de educación media.¿Por qué y cómo*? Educación Matemática, 17*(2), 35-58.

Saenz, C. (2007). La competencia matemática (en el sentido de PISA) de los futuros maestros. *Enseñanza de las Ciencias, 25*(3), 355-366.

Sanhueza, S., Penalva, M.C. y Friz, M. (2013). Identidades y competencias profesionales de estudiantes para maestro de educación infantil relativas a la enseñanza de la geometría. *RELIME. Revista latinoamericana ce investigación en matemática educativa, 16*(1), 99-125.

Sgreccia, N. y Massa, M. (2012). Conocimiento especializado del contenido de estudiantes para profesor y docentes noveles de matemáticas. El caso de los cuerpos geométricos. *Educación Matemática, 24*(3), 33-66.

Sorto, M.A. Marshall, J.H., Luschei, Th.F. y Carnoy, M. (2009). Teacher knowledge and teaching in Panama and Costa Rica: A comparative Study in Primary and Secondary education. *RELIME. Revista latinoamericana ce investigación en matemática educativa, 12*(2), 251-290.

Sowder, J., Philipp, R., Armstrong, B. y Schappelle, B. (1998). *Middle-Grade Teachers' Mathematical Knowledge and its Relationship to Instruction. A Research Monograph*. New a Research Monograph. New York: SUNNY press.

Tatto, M.T., Schwille, J., Senk, Sh.L., Ingvarson, L., Peck, R. y Rowley, G.(2008). *Teacher Education and Development Study in mathematics. Concceptual framework.* East Lansing, MI: Teacher Education and Development International Study Center, College of Education, Michigan State University.

Tirosh, D. y Wood, T. (2008). *Tools and Processes in Mathematics Teacher Education (The International Handbook of Mathematics Teacher Education, Vol. 2).* Sense Publishers: Rotterdam.

Valdemoros, M. (2010). Dificultades experimentadas por el maestro de primaria en la enseñanza de fracciones. *RELIME. Revista latinoamericana ce investigación en matemática educativa, 13*(4, 2), 423-440.

Varas, L. , Lacourly, N., Lopez, A.D. y Giaconi, V. (2013). Evaluación del conocimiento pedagógico del contenido para enseñar matemáticas. *Enseñanza de las Ciencias, 31* (1), 171-188.

Zapatera, A. & Callejo, M.L. (2013). Cómo interpretan los estudiantes para maestro el pensamiento matemático de los alumnos sobre el proceso de generalización. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa & N. Climent (eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 535-544). Bilbao: SEIEM.

Zazkis, R. (2011). *Relearning Mathematics. A Challenge for Prospective Elementary School Teachers*. Charlotte, NC: Information Age Publishing, Inc.