El pensamiento algebraico en los programas de estudio de matemáticas: una visión integral[1]

Edison De Faria Campos
Universidad de Costa Rica
Costa Rica
edison.defaria@ucr.ac.cr

Resumen[2]

En concordancia con las tendencias internaciones actuales en Educación Matemática, los nuevos programas de estudio de matemáticas para la enseñanza elemental, media y secundaria en Costa Rica, enfatizan el desarrollo del pensamiento algebraico desde los primeros años de la educación primaria.

Aprovechando este espacio abierto por el CEMACYC, se presentan las principales ideas relacionadas con las habilidades y procesos que potencian el desarrollo del pensamiento algebraico en los programas mencionados anteriormente, y se proporcionan ejemplos que fueron utilizados en las capacitaciones bimodales realizadas con docentes líderes de educación primaria y secundaria, como parte del Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica.

Palabras clave

Educación matemática, pedagogía, formación docente, currículo.

Abstract

In line with current international trends in mathematics education, new mathematics programs for elementary, middle and high schools in Costa Rica emphasize the development of algebraic thinking beginning in the early years of elementary education. Taking advantage of the opportunity offered by CEMACYC, main ideas related to the skills and processes that enhance the development of algebraic thinking in the above programs are discussed. Examples that were used in bimodal training conducted with school leaders in elementary and secondary education as part of the Mathematics Education Reform Project in Costa Rica are presented.

Key words

Mathematics education, pedagogy, teacher preparation, curriculum.

---

[1] Este trabajo corresponde a una conferencia paralela dictada en la I CEMACYC, celebrada en Santo Domingo, República Dominicana el año 2013.

[2] El resumen y las palabras clave en inglés fueron agregados por los editores.

1 Introducción

Según Soccas (2011), las dificultades y los errores en el aprendizaje de las Matemáticas han sido, y son hoy, un foco de estudio e investigación en Educación Matemática, y que el panorama investigador en la década de los noventa reflejaba por un lado una insatisfacción generalizada sobre las formas tradicionales de la enseñanza del Álgebra, debido a las dificultades y errores que tenían los estudiantes en esta área, y por otro lado reconocían la importancia del Álgebra en las Matemáticas y en el desarrollo de habilidades y hábitos mentales en el estudiantado. Esta crítica generalizada se hace visible en el fracaso escolar reflejado en la deserción estudiantil en Matemáticas, en la ausencia de significado en el aprendizaje de los estudiantes y en la escasa conexión entre el Álgebra y otras áreas de las Matemáticas. Todo esto generó una preocupación por hacer del Álgebra un estudio accesible a todos los estudiantes, y por la búsqueda de formas más efectivas para su enseñanza y aprendizaje.

Varias investigaciones recomiendan introducir el pensamiento algebraico en los primeros años de la educación elemental (Davis, 1985, Vergnaud, 1988, Kaput, 1998, 2000, NCTM, 1989, 2000, Godino, 2003, Blanton y Kaput, 2005, Malara y Navarra, 2003, Bastable y Schifter, 2007, Carraher y Schliemann, 2007, Soccas, 2011, Carraher, Schliemann y Brizuela 2011).

Carraher y Schliemann (2007) realizaron una amplia revisión de las investigaciones acerca del razonamiento algebraico de estudiantes de 6 a 12 años y concluyeron que el álgebra tiene que ocupar un papel importante en la educación primaria. La propuesta que apoya esta postura se conoce como "Early-Algebra (Álgebra temprana)" y abarca el razonamiento algebraico y las relaciones algebraicas. Los autores señalan dos eventos que fueron decisivos en los Estados Unidos para el desarrollo de este movimiento: las publicaciones del "National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 1989 y 2000) y el informe sobre Álgebra en la educación primaria y secundaria del Panel de Investigación y Desarrollo de la Corporación RAND (RAND Mathematics Study Panel, 2003), y determinan algunas cuestiones problemáticas que son fundamentales: las relaciones entre la Aritmética y el Álgebra; la dualidad proceso/objeto en Álgebra; el papel referencial del Álgebra en las Matemáticas, y las representaciones simbólicas del Álgebra tanto formal como no formal.

En los Principios y Estándares para las Matemáticas Escolares del NTCM (2000), el Álgebra es uno de los cinco bloques de contenidos y tiene la particularidad de que dicho bloque se debe desarrollar desde la enseñanza Preescolar. Conforme se menciona en los Principios y Estándares, "no se trata de impartir un curso de álgebra a los alumnos de educación infantil y primaria, sino de desarrollar el pensamiento algebraico a lo largo del período que se inicia en la educación infantil hasta el grado K-12". En el álgebra escolar se incluye el estudio de los patrones, las funciones, y la capacidad de analizar situaciones con la ayuda de símbolos.

Soccas (2011) menciona algunas investigaciones y publicaciones que analizan distintas formas de introducir el Álgebra en el ámbito escolar. Por ejemplo, la publicación de Bednarz, Kieeran y Lee (1996) sugiere las siguientes formas: la generalización de patrones numéricos y geométricos y de las leyes que gobiernan las relaciones numéricas;

la resolución de problemas; la modelización de fenómenos físicos y matemáticos, y la introducción de problemas funcionales. Soccas también menciona la síntesis hecha por Kieran (2006) de los trabajos de investigación llevados a cabo por el grupo de trabajo de investigadores en Álgebra del Psychology of Mathematics Education (PME). En la síntesis Kieran organiza los trabajos realizados durante treinta años en tres grandes núcleos: transición de la Aritmética al Álgebra, variables e incógnitas, ecuaciones y resolución de ecuaciones, planteamiento y resolución de problemas verbales de álgebra; uso de herramientas tecnológicas, representaciones múltiples y proceso de generalización; el pensamiento algebraico en estudiantes de la escuela elemental, la enseñanza y el aprendizaje del Álgebra y la modelización dinámica de situaciones físicas y en entornos algebraicos.

Existe otra propuesta que se conoce como Pre-Álgebra. Esta corriente surge como respuesta a investigaciones realizadas durante las décadas de los 80 y 90, centradas en el análisis de las dificultades y errores en Álgebra en los estudiantes, que tomaban en cuenta los estadios de desarrollo de los alumnos (Herscovics y Linchevski, 1980, 1994, Piaget y García, 1982, Kuchemann, 1981, Booth, 1984, Filloy y Rojano, 1989, Drijvers y Hendrikus, 2003) . Dichas investigaciones concluían que sería más pertinente dejar los estudios formales del Álgebra para los últimos cursos de la Educación Secundaria. Además, tratar el Álgebra como Aritmética generalizada es insuficiente para desarrollar el pensamiento algebraico adecuado, y la utilización de nuevas fuentes de significados, por ejemplo las nuevas tecnologías, abren espacios para la enseñanza y el aprendizaje del Álgebra.

Como menciona Soccas (2011), el enfoque de Pre-Álgebra se apoya en dos hechos esenciales:

- El Álgebra está presente cuando se hace uso del simbolismo algebraico, pero que la noción de simbolismo algebraico es mucho más amplia y va más allá de las escrituras formales de la Aritmética generalizada, es decir, que existen cortes didácticos o rupturas cognitivas entre el pensamiento aritmético y el algebraico. Esto genera ciertas incapacidades en los estudiantes para operar espontáneamente con variables, como ocurrió en la evolución histórica del Álgebra.
- En la validez de las propuestas de organización de los estadios de desarrollo cognitivo, el Álgebra ocupa el estadio de desarrollo formal, y por lo tanto está fuera de las capacidades cognitivas de los estudiantes de los primeros años de la educación primaria.

2 Algunas experiencias

Los estándares del NCTM (2000) incluyen estándares en Álgebra a partir los primeros años de la educación primaria. Las expectativas para la pre-primaria, primer y segundo grados, relacionadas con el pensamiento algebraico son (NCTM, 2000, p. 90):

- Patrones, relaciones y funciones: ordenar objetos por tamaño, número y otras propiedades; clasificar. Reconocer, describir y extender patrones tales como secuencias de sonidos y formas, o patrones numéricos simples, y traducir de una representación a otra. Analizar cómo son generados patrones que se repiten.

- Representar y analizar situaciones matemáticas y estructuras, utilizando símbolos algebraicos: ilustrar principios generales y propiedades de operaciones tales como conmutatividad, utilizando números específicos. Utilizar representaciones concretas, figurales y verbales para desarrollar notaciones simbólicas convencionales o inventadas por los estudiantes.
- Utilizar modelos matemáticos para representar y comprender relaciones cuantitativas: modelar situaciones que impliquen suma y resta de números enteros, utilizando objetos, figuras y símbolos.
- Analizar cambios en varios contextos: describir cambios cualitativos (ej. el crecimiento de un estudiante). Describir cambios cuantitativos (ej. un estudiante creció 5 cm en un año).

Esta introducción del pensamiento algebraico en los años iniciales de la educación matemática es bastante relevante pues no solo se busca una generalización de la Aritmética, sino que se introduce de forma gradual la formalización de ideas matemáticas mediante el uso de símbolos.

Se aclara que aunque los conceptos discutidos en este estándar son algebraicos, no significa que los estudiantes de los primeros grados de la educación primaria tratarán con el simbolismo que, por lo general, es enseñado en un curso de álgebra tradicional en la enseñanza secundaria. Antes de ingresar en la educación formal, los niños y las niñas desarrollan conceptos relacionados con patrones, funciones y álgebra. Cuando los estudiantes perciben que ciertas operaciones presentan propiedades particulares entonces ellos están empezando a pensar algebraicamente. Cuando observan que ciertas cantidades se relacionan con otras entonces empiezan a tener experiencias con relaciones funcionales, mientras que el uso de las representaciones de situaciones matemáticas con objetos concretos, figuras y símbolos, son el inicio de la modelización matemática. Se recomienda motivar a los estudiantes para que utilicen el lenguaje y la notación que tenga significado para ellos, y que el docente los ayude a ver distintas relaciones, hacer conjeturas y generalizaciones de sus experiencias con los números.

Es importante que los estudiantes comprendan que las representaciones son herramientas para modelar e interpretar fenómenos de naturaleza matemática, que son encontrados en distintos contextos y se recomienda utilizar distintas representaciones para una misma situación matemática (NCTM, 2000, p. 141).

Los cuatro aspectos relacionados con el pensamiento algebraico y funcional: comprensión de patrones, relaciones y funciones; representar y analizar situaciones matemáticas y estructuras utilizando símbolos algebraicos; utilizar modelos matemáticos para representar y comprender relaciones cuantitativas, y analizar cambios en varios contextos, constituyen los estándares para la enseñanza primaria y secundaria. Las expectativas en cada uno de ellos aumentan pero, como se indicó anteriormente, el proceso es gradual.

Algunos programas de estudio utilizan las ideas principales de los estándares del NCTM para el área de Álgebra, iniciando con el pensamiento algebraico y funcional en los primeros grados de la educación primaria (por ejemplo: Corea, Portugal, Costa Rica).

3 El caso de Costa Rica

El 21 de mayo del 2012 el Consejo Superior de Educación de Costa Rica aprobó los nuevos programas de Matemáticas para el I, II y III Ciclos de la Educación General Básica y el Ciclo Diversificado. Los nuevos programas empezaron a instalarse en el 2013 en un proceso gradual que tomará de cuatro a cinco años, de tal forma que entre el 2016 y 2017 toda la educación preuniversitaria de Costa Rica estará siguiendo este currículo. Para esto, desde el 2011 se ha invertido en procesos de capacitación y creación de recursos que apoyen su implementación (Ruiz, 2013, p. 7).

El currículo se diseñó con una integración vertical del primer año escolar al último. La fundamentación teórica (filosófica y curricular) es la misma para todo el currículo, las áreas matemáticas son las mismas. Esta es una diferencia en relación con los programas anteriores. Se busca con ello no sólo el desarrollo de perspectivas estratégicas de las áreas, para poder seguir su desarrollo en toda la formación escolar sino además contribuir a disminuir las brechas que han predominado entre la Primaria y la Secundaria en Costa Rica (Ruiz, 2013, p. 33).

Las cinco áreas que compone el currículo son: Números, Medidas, Geometría, Relaciones y Álgebra, Probabilidad y Estadística. Las cinco áreas matemáticas seleccionadas participan con distinta intensidad. La siguiente figura ilustra la distribución temporal-espacial de las distintas áreas en los cuatro ciclos de la educación formal.

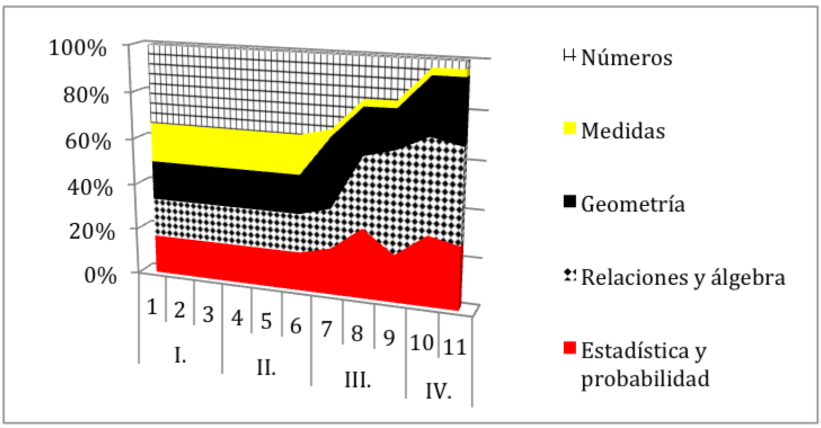


Figura 1: Las cinco áreas matemáticas en los cuatro ciclos educativos.
Fuente: Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (2012).

3.1 Los ejes disciplinares

Se establecen cinco ejes o énfasis curriculares: resolución de problemas; contextualización activa; potenciar actitudes y creencias positivas; uso inteligente de tecnologías y uso de historia de las Matemáticas (Ruiz, 2013, pp. 37-38).

Como eje curricular, la "resolución de problemas" no pretende que solamente se entrenen estrategias o heurísticas para resolver problemas, sino especialmente darle un sentido a la participación de los problemas en la organización de las lecciones, la construcción de aprendizajes y toda la práctica de aula. La "contextualización activa" hace referencia al trabajo en contextos reales o que el estudiante asuma de esa forma. La fusión de estos dos primeros ejes constituye el enfoque principal del currículo: la resolución de problemas con un énfasis especial en contextos reales (Ruiz, 2013, p. 38).

El uso de tecnologías se plantea de una manera gradual. Las indicaciones puntuales son un medio central para ofrecer los límites y métodos para usar la tecnología. Además, el uso de tecnologías debe hacerse en función estricta del aporte que ofrezca al logro de fines de aprendizaje consignados, no debe adoptarse su uso por el valor intrínseco de la tecnología, sea cual sea éste (Ruiz, 2013, p. 39).

Las actitudes y creencias positivas hacia las Matemáticas que se desea promover son: perseverancia; confianza en la utilidad de las Matemáticas; participación activa y colaborativa; autoestima en relación con el dominio de las Matemáticas; respeto, aprecio y disfrute de las Matemáticas. Esta dimensión no solo se enuncia como un tema teórico, sino como una orientación a seguir en la acción de aula.

El uso de historia de las Matemáticas procura crear una perspectiva cultural de la disciplina de las Matemáticas, dotar de rostro humano a los conceptos matemáticos, generar motivación estudiantil, contextualizar conocimientos en situaciones históricas precisas y desarrollar capacidades que el trabajo con la historia apoya (capacidad de comunicación matemática, establecimiento de conexiones con otras disciplinas o dentro de las mismas Matemáticas). También busca complementar los otros ejes curriculares (Ruiz, 2013, pp. 40, 41).

3.2 Conocimientos, habilidades y procesos

Este currículo busca el dominio de conocimientos y la generación de habilidades en torno a los mismos, pero a la vez y de manera central, la construcción de capacidades transversales matemáticas que se alcanzan en el mediano y largo plazo: de razonamiento y argumentación; de representación; de comunicación; de resolución de problemas y de conexión. Las habilidades se diferencian entre específicas y generales. Las primeras son para desarrollar en periodos cortos de tiempo mientras que las últimas en plazos mayores. La integración de habilidades se debe hacer mediante problemas cuidadosamente seleccionados, para desencadenar los aprendizajes deseados. Pero, como aclara Ruiz (2013, p. 31), "a pesar de la relevancia que se le da a las capacidades (habilidades, competencia), no se plantea la organización de sus planes de estudio específicos (malla curricular) por medio de competencias, ni tampoco la acción de aula (planeamiento, lección y evaluación) partiendo de competencias generales transversales. No es un currículo por competencias. La organización de la malla curricular se realiza mediante los conocimientos y habilidades para las cinco áreas matemáticas mencionadas anteriormente.

También se asume que las capacidades cognitivas superiores, generales y transversales se construyen en la mediación pedagógica, es decir, en la acción de aula, desarrollando ciertas acciones transversales definidas aquí como procesos (Razonar y argumentar; Plantear y resolver problemas; Comunicar; Conectar; Representar) y tareas colocadas en varios niveles de complejidad.

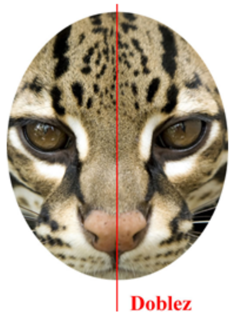
11º Año		
Conocimientos	**Habilidades específicas**	**Indicaciones puntuales**
Geometría analítica • Simetría axial • Imagen • Preimagen	1. Determinar ejes de simetría en figuras simétricas. 2. Identificar *elementos homólogos* en figuras que presentan *simetría axial.* 3. Trazar figuras simétricas utilizando un sistema de ejes coordenados en el plano. 4. Resolver problemas relacionados con la simetría axial.	▲ Se puede introducir el tema de forma intuitiva, con diferentes estrategias. Una de ellas es llevando a la clase diferentes imágenes y realizando dobleces de papel, para observar si coinciden todos los elementos.  Imagen con derechos adquiridos por el MEP. Otra estrategia sería utilizar un espejo para mostrar la simetría de una figura, por ejemplo con la letra mayúscula Y:

Figura 2: Ejemplo de la malla curricular.
Fuente: Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (2012)

4 El área de Relaciones y Álgebra y el pensamiento algebraico

Por lo general, un curso tradicional de relaciones y álgebra tiende a concentrarse en la manipulación de símbolos con algunas aplicaciones artificiales con poca conexión con el mundo real. Uno de los focos de estos nuevos programas de estudio de Matemáticas, consiste en desarrollar el algebraico pensamiento funcional, que potenciará a los estudiantes generalicen experiencias con números y cálculos, formalicen ideas matemáticas utilizando símbolos, exploren conceptos de patrones y de funciones, y modelen fenómenos del mundo real.

El pensamiento algebraico funcional permea toda la matemática y es fundamental para hacer matemáticas que son importantes y útiles para la vida real. Las grandes ideas contempladas en los programas, en el área de Relaciones y Álgebra, son:

- El álgebra es útil para generalizar la aritmética y representar patrones.
- Los patrones pueden ser reconocidos, extendidos y generalizados.

Los patrones son ciertas regularidades que pueden observarse en algunas situaciones reales o no y modelar matemáticamente. Algunos matemáticos consideran que la matemática es la ciencia de patrones. Las matemáticas son el estudio de diversos tipos de patrones que incluyen números, figuras, símbolos y operaciones. Los patrones ayudan a explicar y a predecir ciertos fenómenos.

- Los métodos utilizados para calcular y las estructuras numéricas pueden ser generalizadas.
- Función es un concepto central en las matemáticas. Muchos fenómenos físicos, químicos, económicos y sociales son modelados por funciones.

En este programa, el pensamiento algebraico y funcional es introducido gradualmente a partir del primer año de la enseñanza primaria y los cuidados pertinentes son tomados en las indicaciones puntuales y metodológicas para evitar conflictos con los cortes didácticos o rupturas cognitivas entre el pensamiento aritmético y el algebraico de los estudiantes.

4.1 Principales cambios curriculares

Los cambios más importantes en los nuevos programas de matemática, respecto al programa anterior, son los siguientes:

Primer Ciclo (años 1, 2 y 3)

Para el primer ciclo de la enseñanza primaria, los principales cambios son:

- El reconocimiento de patrones: en sucesiones numéricas; sucesiones con objetos geométricos; manipulación con objetos matemáticos.
- La introducción temprana y paulatina de la noción de variable, empezando con un valor faltante en una expresión o en una tabla.
- El uso de distintas representaciones matemáticas para los objetos matemáticos.
- La organización de la lección (los cuatro momentos de la lección: propuesta de un problema; trabajo estudiantil independiente; discusión interactiva y comunicativa; clausura o cierre; Programas de Estudio Matemáticas (2011, pp. 51-53)).

El propósito de la enseñanza en el área de *Relaciones y Álgebra* para este ciclo es desarrollar en cada estudiante la comprensión de patrones y relaciones, la capacidad para representar y analizar situaciones matemáticas dadas y la habilidad para utilizar estos conocimientos para resolver problemas en varios contextos. La introducción temprana de relaciones, patrones y manipulación simbólica posibilitará una mayor articulación con los ciclos que siguen y desarrollará una forma de pensamiento matemático necesaria para la construcción de conceptos relacionados con las funciones.

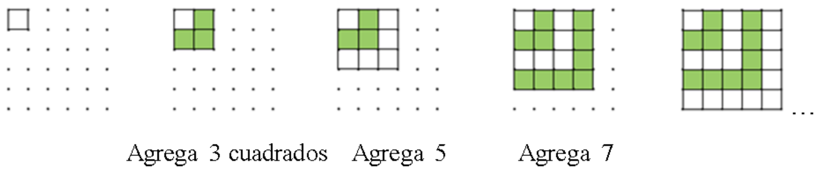
En primer año los estudiantes pueden describir verbalmente las regularidades encontradas en los patrones. Estudiantes del primer ciclo deberían desarrollar la habilidad para predecir el siguiente elemento en una sucesión, examinando un conjunto específico de ejemplos

-  ...
- $A, B, C, A, B, C, A, B, C, \ldots\ldots$
- $1, 5, 9, 13, 17, \square$

Segundo Ciclo (años 4, 5 y 6)

Partiendo de los conocimientos y habilidades desarrolladas en el primer ciclo, principalmente las relacionadas con los patrones, la utilización de distintas representaciones para los números naturales y la identificación de expresiones matemáticas que representan relaciones entre cantidades, se introducen nuevos conceptos estrechamente relacionados con el lenguaje algebraico y el funcional, como por ejemplo la relación de proporcionalidad directa, razón y proporción. Además, aumenta el grado de abstracción al iniciar la representación simbólica de cantidades matemáticas que varían.

En el segundo ciclo, los estudiantes deberían poder analizar patrones numéricos o geométricos y expresarlos matemáticamente en palabras o en símbolos matemáticos, investigar la estructura de un patrón, organizar la información de forma sistemática y utilizar el análisis para generalizar relaciones matemáticas en el patrón.



En la actividad anterior el estudiante podría concluir que la suma de los primeros números impares es un cuadrado perfecto.

Otro ejemplo, que fue utilizado en una de las capacitaciones para maestras de educación primaria es el siguiente:

> "Abajo se presentan secuencias de dibujos y en cada secuencia existen dos fichas que se mueven, siguiendo un patrón. Cada ficha puede moverse horizontalmente, verticalmente y en forma diagonal. El objetivo consiste en "descubrir" cómo se mueve cada una de las fichas (encontrar el patrón) y determinar en qué lugar queda cada una de ellas en el último dibujo".

Figura 3: Movimiento de fichas

La solución no es única pues existen distintos patrones de movimiento que conducen a un mismo estado final de la configuración de las fichas, y esto es fundamental en matemáticas: lograr obtener una misma conclusión mediante rutas o razonamientos distintos. Un posible patrón consiste en que la rana se mueva tres casas "celdas" en el sentido del movimiento de las agujas del reloj (inicialmente 2 a la derecha 1 hacia abajo) mientras que el jaguar se mueve dos casas en el sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj (inicialmente 1 a la izquierda 1 hacia abajo). Otra posibilidad es que la rana se mueva cinco casas en el sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj (inicialmente 2 hacia abajo 2 a la derecha 1 hacia arriba) mientras que el jaguar se mueve dos casas en el mismo sentido de movimiento de la rana o bien seis casas en el sentido contrario. Existen otros posibles patrones que conducen a la solución del problema: La idea central es que existen distintas estrategias para resolver un problema matemático.

Es recomendable utilizar distintas representaciones matemáticas. Por ejemplo, considere la tabla y las preguntas que siguen:

Perímetro del cuadrado (cm)	8	12	20
Lado del cuadrado (cm)	2	3	5

¿Qué perímetro correspondería a un lado del cuadrado de 17 cm? ¿Qué lado correspondería a un perímetro del cuadrado de 56 cm?

Para sexto año podría agregar la representación simbólica: ¿Qué perímetro correspondería a un cuadrado de lado a cm?

Otro problema utilizado en la capacitación de las maestras, y que es adecuado para estudiantes del sexto año es el siguiente:

> Según la Organización Mundial de la Salud, la cantidad adecuada de proteínas que debemos consumir diariamente es de 0,85 gramos de proteínas por kilogramo de peso. Complete la siguiente tabla que relaciona la cantidad diaria de proteínas con el peso de la persona:

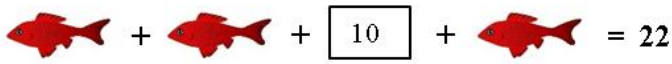
Peso de la persona (kg)	Cantidad de proteínas diarias necesarias
40	
45	
50	
60	
P	

> Si en la etiqueta (declaración de nutrientes) de una caja de cereales se indica que contiene 3 gramos de proteínas, y se sabe que para David dicha cantidad corresponde a un 4 % de la proteína que debe de consumir diariamente, ¿Cuántos gramos de cereal tendría que comer diariamente David para completar su cuota diaria de proteínas? Según el criterio de la OMS, ¿cuál es el peso aproximado de David?

Un concepto muy importante en la educación primaria es el de igualdad. Es importante utilizar la metáfora de una balanza para desarrollar este concepto, para que no provoque ruptura cognitiva en los estudiantes. En la página http://illuminations.nctm.org/ se encuentran varias actividades que "pesan" números, formas y hasta expresiones algebraicas. En todos los casos la igualdad se mira como un equilibrio entre los números, formas o expresiones algebraicas que se encuentran en los dos platos de la balanza.

También se recomienda utilizar la igualdad con valor faltante, como por ejemplo:

"Si los peces rojos cubren un mismo número en la figura que sigue, ¿cuál es este número?



Tercer Ciclo (años 7, 8 y 9)

El propósito de la enseñanza en el área de *Relaciones y Álgebra* para este ciclo es el desarrollo de habilidades para trabajar con relaciones y funciones matemáticas básicas, profundizar la comprensión de la noción de variable y del lenguaje algebraico, la manipulación adecuada de expresiones algebraicas, reconocer y aplicar modelos matemáticos sencillos que involucren las relaciones de proporcionalidad (directa e inversa, en sétimo año), las funciones lineales (octavo año) y cuadráticas (noveno año).

También, se enfatiza el uso de múltiples representaciones matemáticas como tablas, gráficas y símbolos matemáticos. El uso de tecnologías adquiere aquí un lugar más relevante pues permitirá visualizar las gráficas de las relaciones que serán estudiadas. Por ejemplo, para obtener el modelo cuadrático para la población de Costa Rica (de 1960 al 2009) se utilizó una hoja de cálculo (vea la figura 4).

Ciclo Diversificado (años 10 y 11)

Continuando con el pensamiento algebraico funcional desarrollado en los dos primeros ciclos de la educación primaria y el tercer ciclo de la educación secundaria, se procede a formalizar el concepto de función que fue trabajado en los ciclos anteriores como una relación entre variables. Se amplían las habilidades desarrolladas con las funciones y se incluyen otros tipos de funciones. Para la formalización del concepto, son introducidos algunos elementos del lenguaje de los conjuntos numéricos.

Las funciones exponencial, logarítmica y la modelización constituyen el foco de 11º año. Se estudian las funciones inversas y sus representaciones (gráfica y algebraica), así como su relación con situaciones contextualizadas. Este último aspecto es crucial: se busca que cada estudiante pueda identificar algunos modelos que utilizan estas funciones, además de decidir cuál es el modelo más pertinente para representar una situación dada. El uso de tecnología digital, como por ejemplo software graficador, potencia la construcción de representaciones gráficas además de servir de apoyo en cálculos tediosos y complejos. Para las decisiones acerca del modelo más adecuado para una situación dada, es muy recomendable utilizar una hoja de cálculo para representar los datos en una tabla, graficarlos y calcular el coeficiente de determinación para el modelo. Todo esto favorece al desarrollo del pensamiento algebraico funcional y los procesos matemáticos que forman parte de este programa.

12. Plantear y resolver problemas utilizando ecuaciones de segundo grado con una incógnita

Observe y analice los datos de la siguiente tabla:

Población de Costa Rica (en millones) en el periodo 1960-2009

Año	Población (millones)
1960	1,334
1965	1,583
1970	1,822
1975	2,052
1980	2.349
1985	2,699
1990	3,078
1995	3,479
2000	3,931
2005	4,396
2009	4,579

Fuente: http://datos.bancomundial.org/indice/ios-indicadores-del-des

Un modelo cuadrático para la población aproximada de Costa Rica es $P(t) = 11\,418t^2 + 225\,697t + 1\,317\,503$ donde $P(t)$ representa el tamaño de la población en el instante t, t el tiempo en años, con $t = 0$ representando el año de 1960. Que cada estudiante proponga y resuelva un problema con la situación dada.

Se recomienda hablar acerca del aumento poblacional y sus consecuencias para el ser humano y el ambiente. Esto favorece la concientización acerca de una *Cultura ambiental para el desarrollo sostenible* y la *Educación para la salud*.

Figura 4: Indicación puntual de un problema matemático.
Fuente: Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (2012, p. 360)

5 Conclusión

Los nuevos programas de matemática para la educación general básica y el ciclo diversificado en Costa Rica promueven el desarrollo del pensamiento algebraico funcional desde los primeros años de la educación primaria, en forma gradual, integrada, articulada, tomando los cuidados para evitar todo tipo de cortes didácticos o rupturas cognitivas que podrían ser producidas durante su ejecución. Las indicaciones puntuales y metodológicas contenidas en la malla curricular, los complejos didácticos de apoyo a los docentes (materiales de apoyo, unidades didácticas de apoyo, unidades virtuales de aprendizaje) y las capacitaciones realizadas, coadyuvan a una transición más armoniosa de los programas anteriores a los nuevos programas.

La estrategia de capacitación utilizada fue la realización de cursos bimodales, compuestos de sesiones presenciales y, además, trabajo por medio de una plataforma tecnológica (Moodle). El contenido de los cursos de capacitación correspondió al enfoque curricular e incluso una reproducción en su estructura de la estrategia pedagógica que propone el nuevo currículo (resolución de problemas con énfasis en contextos reales), ubicando en la plataforma situaciones problema sobre los cuales se desencadenarían las acciones didácticas para concluir con el cierre de la lección. Las capacitaciones contienen contenidos matemáticos y estrategias pedagógicas adecuadas para el trabajo del docente en el aula. El grupo de la Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica (http://www.reformamatematica.net) seleccionó un grupo de líderes docentes, los capacitó, y estos se encargaron, juntamente con los asesores pedagógicos y nacionales, de capacitar a otros docentes, replicando la capacitación bimodal recibida. Los cursos bimodales del 2013 enfatizaron dos ejes disciplinares centrales del nuevo currículo: el uso de la tecnología y el uso de la historia de las matemáticas.

Debido a la profundidad de los cambios del nuevo currículo, que demandan ajustes de contenidos y enfoque, así como capacitación de docentes, el proyecto elaboró un plan de transición para una implementación gradual de los nuevos programas. Desde el 2013 el país desarrolla programas de transición para que en el 2016 se logre establecer el programa completo para los cuatro ciclos de la educación formal académica (quedando pendiente la educación técnica y la educación abierta). (Ruiz, 2013, p. 74)

El proyecto de Reforma también diseñó dos planes piloto en el 2012, para el primer ciclo educativo y para sétimo año. Su propósito fue identificar las virtudes y debilidades que generaba la implementación curricular, para ofrecer recomendaciones a las autoridades ministeriales, asesores y docentes. Fueron elaborados y aplicados instrumentos de percepción docente en diversos momentos, instrumentos de observación de aula y entrevistas a asesores, además de utilizar la plataforma Moodle para conducir, apoyar y administrar los grupos piloto (Ruiz, 2013, p. 75).

Para finalizar, el proyecto realizará, dentro de un corto plazo, cursos enteramente virtuales, diseñados a partir de los materiales elaborados para los cursos bimodales. Su propósito es proporcionar más medios para que los docentes puedan capacitarse, para repasar lo que se estudió en los bimodales o para estudiar esos temas si no se tuvo la oportunidad de participar en aquellos, aprovechando las facilidades que ofrece la Internet.

Referencias y bibliografía

Bastable, V., Schifer, D. (2007). Classroom Stories: Examples of Elementary Students Engaged in Early Algebra. En J. Kaput, D. W. Carraher y M. L. Blanton (Eds.). *Algebra in the Early Grades*. Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Blanton, M. L., Kaput, J. (2005). Characterizing a Classroom Practice that Promotes Algebraic Reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education,* 36(5), 412-446.

Bednarz, N., Kieran, C., Lee, L (Eds.) (1996). *Approaches to Algebra. Perspectives for Research and Teaching*. Dordrecht: Kluwer.

Booth, L. R. (1984). *Algebra: Children's Strategies and Errors*. Windsor: NFER-Nelson.

Carraher, D. W., Schliemann, A. D. (2007). Early Algebra and Algebraic Reasoning. In F. Lester (Ed.), *Handbook of Research in Mathematics Education.* Greenwich, CT: Information Age Publishing, pp. 669-705.

Davis, R. B. (1985). ICME-5 Report: Algebraic Thinking in the early grades. *Journal of Mathematical Behaviour*, 4, 195-208.

Drijvers, P., Hendrikus, M. (2003). *Learning algebra in a computer algebra environment: design research on the understanding of the concept of parameter*. Tesis doctoral no publicada. Utrecht: Universidad de Utrecht.

Filloy, E., Rojano, R. (1989). Solving equations: The transition from arithmetic to algebra. *For the Learning of Mathematics*, 2, 19-25.

Godino, J. (2003). Matemática y su Didáctica para Maestros. Manual para el estudiante. Proyecto Edumat-Maestros.

Herscovics, N., Kieran (1980). Construction meaning for the concept of equation. *Mathematics Teacher*, vol. 73, pp. 572-580.

Herscovics, N., Linchevski, L., C. (1994). A Cognitive Gap between Arithmetic and Algebra. *Educational Studies in Mathematics,* 27(1), 59-78.

Kaput, J. (1998). *Teaching and Learning a new algebra with understanding*. Dartmouth, Massachusetts: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.

Kaput, J. (2000). *Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum*. Dartmouth, Massachusetts: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.

Kieran, C. (2006). Research the Learning and Teaching of Algebra. En Gutiérrez, A. y Boero, P. (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future*. Sense Publishers. Rotterdam, pp. 11-49.

Kuchemann, D. (1981). Algebra. En Hart, K. (Ed.): *Children's Understanding of Mathematics*, pp. 11-16. London: Murray.

Malara, N. A., Navarra, G. (2003). *ArAl Project. Arithmetic pathways towards favouring pre-algebraic thinking*. Bologna: Pitagora Editrice.

Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (2012). *Programas de Estudio Matemáticas. Educación General Básica y Ciclo Diversificado*. Costa Rica: autor.

N.C.T.M. (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. NCTM. Reston, VA.

N.C.T.M. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. NCTM. Reston, VA.

Piaget, J., García, R. (1982). *Psicogénesis e Historia de la Ciencia*. México: Siglo veintiuno editores.

RAND Mathematics Study Panel (2003). Mathematical proficiency for all students: Toward a strategic reseearch and development program in Mathematics Education. Santa Mónica, CA: RAND.

Ruiz, A. (2013). Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica. *Cuaderno de Investigación y Formación en Educación Matemática*. Costa Rica, Centro de Investigaciones Matemáticas y Metamatemáticas, Año 8, Número Especial.

Schliemann, A. D., Carraher, D. W., Brizuela, B. (2011). El Carácter Algebraico de la Aritmética: De las ideas de los niños a las actividades en el aula. Buenos Aires: Paidos.

Socas, M. (2011). La enseñanza del Álgebra en la Educación Obligatoria. Aportaciones de la Investigación. *Números, 77,* pp. 5-34.

Vergnaud, G. (1988). Long terme et court terme dans l'apprentissage de l'algebre. En C. Laborde (Ed.), *Actes du premier colloque franco-allemand de didactique des mathematiques et de l'informatique* (pp. 189-199). Paris: La Pensée Sauvage.