

# Modelos de planeamiento didáctico y plan de lección empleando la Integración de habilidades Matemáticas para la Educación Secundaria

Proyecto *Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica*  
Costa Rica

## Introducción

Se presentan dos documentos correlacionados, el primero es un fragmento de planeamiento didáctico correspondiente a algunas de las habilidades específicas que se desarrollarán en la asignatura de Matemática en educación secundaria; el otro es un modelo de plan de lección acorde con lo establecido en el planeamiento didáctico. Ambos tienen como propósito brindar una orientación a los docentes en el empleo de la integración de habilidades matemáticas en la acción de aula. Esta propuesta se sustenta en el programa de estudios (MEP, 2012, p.45):

- (...) Las habilidades no deben verse de manera desagregada. No se trata de objetivos operativos que deben trabajarse en el aula necesariamente por separado.
- (...) Por medio de un solo problema es posible abordar varias habilidades.

En ambos documentos se puntualizan cada uno de los momentos de la Etapa 1: *El aprendizaje del conocimiento*. Se describe el abordaje de las habilidades específicas de manera integrada durante la ejecución de la clase. También, contiene la planificación de la Etapa 2: *La movilización y aplicación de los conocimientos*, mediante problemas y ejercicios de diversos niveles de complejidad.

Para este producto se han considerado varios elementos: la circular del MEP DM-0033-11-11 "Disposiciones sobre el Planeamiento Didáctico en los Centros Educativos", el documento de *Integración de habilidades matemáticas en la acción de aula en secundaria*, el formato de plan de lección (con algunas modificaciones) suministrado por el asesor pedagógico Javier Barquero así como sus aportes.

El modelo de plan de lección debe ajustarse a las condiciones particulares del entorno educativo, de ninguna manera se pretende su uso obligatorio, su objetivo es meramente pedagógico para la formación docente.

## Planeamiento didáctico

Departamento: Matemática	Profesor: ...
Asignatura: Matemática	Periodo: I
Nivel: Noveno año	Año: 2015

Habilidades específicas	Estrategias de mediación	Estrategias de evaluación	Cronograma
<p>1. Identificar y calcular la apotema de pirámides rectas cuya base sea un cuadrado o un triángulo equilátero.</p> <p>2. Calcular el área lateral y el área total de una pirámide recta de base cuadrada, rectangular o triangular.</p> <p>3. Calcular el área lateral y el área total de un prisma recto de base cuadrada, rectangular o triangular.</p>	<p><b>I Etapa</b></p> <p>1. Se hacen subgrupos de 4 estudiantes y se plantea un problema contextualizado en donde el estudiantado deba calcular el área de superficies conocidas que integran un objeto tridimensional que está conformado por pirámides y prismas. Esto tiene como propósito introducir las habilidades específicas referentes a la pirámide y prisma rectos.</p> <p>2. Los estudiantes en forma cooperativa e integrada formulan estrategias de solución para el problema propuesto. Una de las estrategias para calcular el área de la superficie del objeto tridimensional es descomponerlo en figuras planas ya conocidas (triángulos, cuadrados, rectángulos), calcular el área por separado y luego realizar una suma que sea apropiada a lo que se pide en el problema. También, al intentar obtener el área lateral de la pirámide será necesario utilizar el teorema de Pitágoras (ya estudiado) para calcular la altura de los triángulos que conforman la o las pirámides y así se pretende introducir la habilidad específica referente al cálculo de la apotema de la pirámide.</p>	<p><b>Evaluación diagnóstica:</b></p> <p>El docente formulará preguntas referentes a los elementos de sólidos que se estudiaron en séptimo y octavo año (prismas y pirámides). Elementos como: aristas, vértices, bases, las caras laterales, la altura, las apotemas y el ápice o cúspide de una pirámide. Para esto se apoyará en material concreto como un prisma y una pirámide de cartón o plástico y preguntar por los componentes de estos sólidos al señalarlos.</p> <p>O también, si hay suficiente tiempo, se repartirá a cada estudiante la estructura plana de ambos sólidos y que las construyan e identifiquen coloreando de un determinado color cada elemento. El docente registrará las debilidades teóricas presentadas en esta actividad.</p>	<p>Del 20 al 24 de abril. (3 lecciones)</p>

	<p>El docente interactúa con cada subgrupo planteando preguntas generadoras y valorando posibles errores en la resolución del problema. El docente sirve de orientador sin incidir directamente en solución del problema. A lo largo de esta fase el docente brinda espacios de diálogo para que los estudiantes comparen y discutan sus resultados.</p> <p>3. De acuerdo con lo observado en cada subgrupo, el docente escoge dos o tres subgrupos para que expongan las estrategias empleadas con sus soluciones. El docente orienta la lección con preguntas generadoras que encausen la formalización de los conceptos matemáticos programados. Algunas preguntas podrían ser:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>* ¿Cómo encontró la medida de la altura de los triángulos que conforman la o las pirámides que constituyen el objeto? <i>Con esto se puede formalizar el concepto de apotema de la pirámide.</i></li> <li>* ¿Cómo calcularon el área de la o las partes de objeto que tienen forma piramidal? <i>Con esto se puede formalizar el concepto de área lateral de una pirámide.</i></li> <li>* ¿Cómo calcularon el área de la o las partes de objeto que tienen forma prismática? <i>Con esto se puede formalizar el concepto de área lateral y total de un prisma.</i></li> </ul> <p>Con base en las respuestas de los estudiantes el docente rectifica algunos errores o aclara algunos elementos teóricos en la resolución del problema.</p>	<p><b>Evaluación formativa:</b></p> <p>Por medio de la observación, escucha del trabajo independiente, del proceso comunicativo generado focalizando sobre las consultas de los estudiantes, argumentaciones del estudiantado, las respuestas a las preguntas generadoras, el docente recopila información que le permita valorar el nivel de logro alcanzado por los estudiantes en la habilidad o habilidades específicas. Con base en este trabajo el docente reorienta el trabajo y registra los aspectos más relevantes, en el apartado de observaciones de su planeamiento o en una matriz codificada de su grupo o en un instrumento técnicamente elaborado.</p>	
--	--	---	--

	<p>4. Tomando en cuenta las estrategias y elementos teóricos aportados por los estudiantes se formaliza el concepto de apotema de la pirámide y el empleo del teorema de Pitágoras para su cálculo.</p> <p>También, se pretende establecer que el área total de un poliedro es igual a la sumatoria de las áreas de cada polígono que lo conforman. Se indica que la pirámide y el prisma son casos particulares y se realiza la deducción de las fórmulas.</p>		
	<p><b>II Etapa</b></p> <p>1. El docente propone una práctica con una serie de ejercicios y problemas de diferentes niveles de complejidad. Esta se desarrollará en las lecciones correspondientes de forma individual.</p> <p>2. Se revisará la práctica en la pizarra con la participación activa del estudiante. Se formularán preguntas generadoras a manera de diálogo constante con el estudiantado potenciando las estrategias más innovadoras y creativas y fortaleciendo los conceptos en los que se evidencia mayor dificultad.</p>	<p><b>Evaluación diagnóstica:</b></p> <p>Al inicio de la lección se formulan una serie de preguntas referentes al concepto de apotema de la pirámide y áreas de pirámides y prismas rectos. Esto a manera de repaso de las lecciones anteriores donde se implementó la Etapa I.</p> <p><b>Evaluación formativa:</b></p> <p>Se realizará por medio de la observación de lección y preguntas generadoras en el desarrollo y revisión (en la pizarra) de la práctica propuesta. Los estudiantes participarán en la revisión de los ejercicios y problemas.</p>	<p>Del 27 al 30 de abril. (5 lecciones)</p>

## Plan de lección

Docente: \_\_\_\_\_

Institución: \_\_\_\_\_

Nivel: \_\_\_\_\_

DESCRIPCIÓN
<b>Conocimientos:</b> Pirámide recta, Apotema, Prisma recto, Área lateral, Área total
<b>Habilidades específicas:</b> <ol style="list-style-type: none"><li>1. Identificar y calcular la apotema de pirámides rectas cuya base sea un cuadrado o un triángulo equilátero.</li><li>2. Calcular el área lateral y el área total de una pirámide recta de base cuadrada, rectangular o triangular.</li><li>3. Calcular el área lateral y el área total de un prisma recto de base cuadrada, rectangular o triangular.</li></ol>
<b>Habilidades previas:</b> <p><b>Geometría</b></p> <ul style="list-style-type: none"><li>■ Aplicar el teorema de Pitágoras en la resolución de problemas en diferentes contextos. (MEP, 2012, p.315)</li></ul> <p><b>Números</b></p> <ul style="list-style-type: none"><li>■ Utilizar la calculadora para resolver operaciones radicales. (MEP, 2012, p.292)</li></ul> <p><b>Medidas</b></p> <ul style="list-style-type: none"><li>■ Reconocer el símbolo de kilogramo. (MEP, 2012, p.126)</li><li>■ Realizar conversiones de medida entre el metro, sus múltiplos y submúltiplos. (MEP, 2012, p.128)</li><li>■ Aplicar el uso del sistema monetario nacional en situaciones ficticias o del entorno. (MEP, 2012, p.225)</li><li>■ Aplicar las diversas medidas en la resolución de problemas que se presenten en situaciones ficticias o del entorno. (MEP, 2012, p.225)</li></ul>
<b>Cronograma:</b> Del 20 al 30 de abril del 2015

**I Etapa: Aprendizaje de los conocimientos. (Tiempo propuesto: 3 lecciones)\***

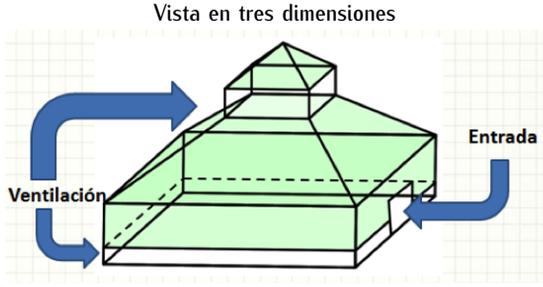
### Propuesta del Problema

#### Problema:

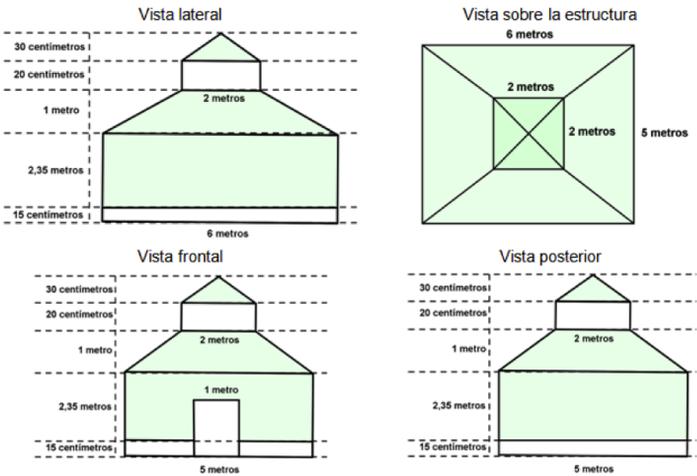


Don Carlos, es productor agrícola y quiere construir un invernadero para cultivo hidropónico donde se pueda cultivar lechugas, fresas, tomates, etc. El invernadero que diseñó tiene paredes rectangulares, con una entrada rectangular de 1 metro de ancho por 2,15 metros de alto y un techo formado por 4 trapecios isósceles, 4 respiraderos rectangulares y una parte superior en forma de pirámide de base cuadrada para la caída de agua.

Este tipo de invernaderos se construye formando una estructura de metal (tubo de dos pulgadas de diámetro) cubierta totalmente de un plástico grueso especial. En la siguiente imagen el color verde representa el plástico (debe estar a 15 cm del suelo para la ventilación):



Vistas planas del invernadero



Don Carlos ya construyó la estructura metálica y quiere saber cuántos metros cuadrados de plástico debe comprar para cubrir el invernadero. Hay que tomar en cuenta que el metro de plástico tiene 4 varas de ancho (3,35 metros aproximadamente), o sea, no se vende un metro cuadrado. Además el plástico se vende por kilogramo, por cada metro que se compra le pesan 3,35 metros cuadrados, lo cual pesa alrededor de medio kilogramo. **¿Cuántos metros cuadrados de plástico necesita comprar don Carlos y cuánto pagaría aproximadamente si el kilogramo de plástico cuesta 2640 colones?**

**Trabajo estudiantil independiente**

Una posible estrategia de acuerdo con los conocimientos previos de los estudiantes es descomponer el invernadero en figuras planas:

- Paredes:
  - 2 rectángulos de 5 metros de largo por 2,35 metros de ancho (tomando en cuenta los 15 cm de ventilación). A uno de los rectángulos se le debe quitar el orificio donde irá la entrada, que es un rectángulo de 1 metro de ancho por 2,15 metros de alto, tomando en cuenta los 15cm de ventilación sería restarle un rectángulo con dimensiones de 1 por 2 metros.
  - 2 rectángulos de 6 metros de largo por 2,35 metros de ancho (tomando en cuenta los 15 cm de ventilación).

- Techo:
  - 2 trapezios isósceles de bases 5 metros y 2 metros y altura desconocida.
  - 2 trapezios isósceles de bases 6 metros y 2 metros y altura desconocida.
  - 4 triángulos isósceles de base 2 metros y altura desconocida.

Para el cálculo del área de la superficie de las paredes, los estudiantes podrían calcular cada área por separado y sumarlas, o darse cuenta que hay rectángulos congruentes y emplear la propiedad asociativa:

$$2 \cdot (5 \cdot 2,35) - 1 \cdot 2 + 2 \cdot (6 \cdot 2,35) = 23,5 - 2 + 28,2 = 49,7m^2$$

**Posible dificultad:** Puede ser que el estudiante no tome en cuenta la ventilación de 15cm o el espacio correspondiente a la entrada. También puede ser que tome en cuenta la parte de ventilación correspondiente a la entrada, esto causaría que restara en dos ocasiones esta superficie.

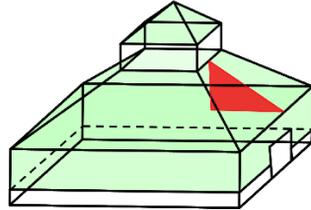
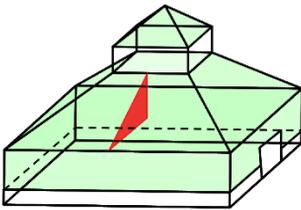
**Recomendación:** Es importante que el docente esté realizando preguntas correspondientes al planteamiento del problema, por ejemplo:

- ¿Se está tomando en cuenta que el plástico de las paredes debe estar a 15cm del suelo?
- ¿Se está tomando en cuenta que la entrada no debe tener plástico?

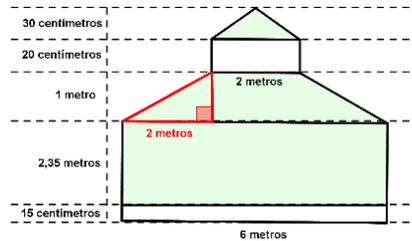
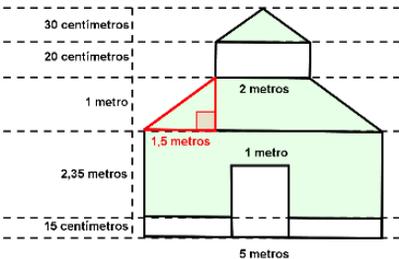
Para el cálculo del área de los trapezios que conforman el techo se necesita conocer sus respectivas alturas. Para esto se utilizará el Teorema de Pitágoras tomando como hipotenusa la altura del trapezio y de catetos la longitud correspondiente de acuerdo con las siguientes vistas planas.

- Para los trapezios con bases de 6 y 2 metros se tiene el siguiente triángulo rectángulo:

- Para los trapezios con bases de 5 y 2 metros se tiene el siguiente triángulo rectángulo:



**Posible dificultad:** El estudiante puede tener dificultad en visualizar estos triángulos rectángulos. Para esto es importante que el docente insista que deben analizar las vistas planas que proporciona el problema:



$$h^2 = (1,5)^2 + 1 \Rightarrow h^2 = 3,25 \Rightarrow h = \frac{1}{2}\sqrt{13}$$

$$h^2 = 2^2 + 1 \Rightarrow h^2 = 5 \Rightarrow h = \sqrt{5}$$

**Posibles dificultades:** Es posible que el estudiante tenga dificultad en visualizar la altura de los trapecios (vista plana) y los confunda con la altura que alcanza la base menor del trapecio con la altura de la pared (1 metro). También se puede creer que los cuatro trapecios son congruentes, ya que tienen la base menor congruente.

**Recomendación:** El docente puede realizar las siguientes preguntas, por ejemplo:

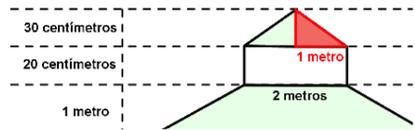
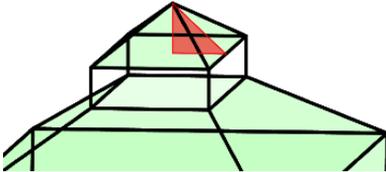
- ¿Cómo calcularon la altura de los trapecios?
- ¿Hay alguna diferencia entre los cuatro trapecios?
- ¿Hay trapecios congruentes?

Si logran deducir que hay dos parejas de trapecios congruentes podrían calcular el área total de los trapecios que conforman parte del techo utilizando la propiedad asociativa:

$$2 \cdot \frac{(2 + 6) \cdot \frac{1}{2}\sqrt{13}}{2} + 2 \cdot \frac{(2 + 5) \cdot \sqrt{5}}{2} = 4\sqrt{13} + 7\sqrt{5}$$

Aquí es importante puntualizar que se pueden utilizar dos tipos de representación para el área: la aproximación en decimales del número o la notación radical. Hay que enfatizar que al emplear la primera representación se pierde exactitud y podría faltar plástico.

Ahora para calcular el área de la pirámide del techo, se tienen 4 triángulos isósceles de base 2 metros y se necesita encontrar la altura. Para esto se utilizará el Teorema de Pitágoras para el siguiente triángulo:



Por lo que la altura del triángulo isósceles se puede calcular:

$$h^2 = (0,3)^2 + 1 = 1,09 \Rightarrow h = \frac{1}{10}\sqrt{109}$$

Entonces el área del triángulo es:

$$\frac{2 \cdot \frac{1}{10}\sqrt{109}}{2} = \frac{1}{10}\sqrt{109}$$

Tomando en cuenta que son 4 caras triangulares porque es una pirámide de base cuadrada entonces el área total es:  $\frac{4 \cdot \frac{1}{10}\sqrt{109}}{2} = \frac{2}{5}\sqrt{109}$

**Posible dificultad:** Es posible que el estudiante tenga dificultad en visualizar la altura de los triángulos (vista plana) y los confunda con la altura de la pirámide (30cm).

Ahora, sumando el área de las paredes y de las partes que componen el techo se tiene:

$$49,7 + 4\sqrt{13} + 7\sqrt{5} + \frac{2}{5}\sqrt{109} \approx 83,95.$$

Aquí es importante puntualizar que se están utilizando dos tipos de representación para los números. Por el tipo de contexto del problema es necesario recurrir a la aproximación en decimales del número ya que es más representativa que la notación radical.

Una pregunta generadora sería, ¿cuántos metros de plástico se deben comprar?

De acuerdo con el contexto no tiene mucho sentido solicitarle al vendedor 83,95 metros cuadrados de plástico. Como el plástico tiene un ancho fijo de 3,35 metros (4 varas) entonces se debe comprar la longitud entera de acuerdo a la cantidad de metros cuadrados que se necesitan; por lo que se deben comprar 26 metros de plástico para un área de 87,1 metros cuadrados.

Una pregunta generadora sería, ¿Por qué no comprar 25 metros de plástico?

Al calcular el área correspondiente al plástico se obtendrían 83,75 metros cuadrados, por lo que faltaría material. Además, en estos contextos es mejor que sobre material a que falte.

Ahora, como 3,35 metros cuadrados pesan aproximadamente medio kilogramo (de acuerdo a los datos del problema) entonces se ocupan alrededor de 87,1 ÷ 6,7 que es aproximadamente 13 kilogramos de plástico.

**Respuesta:** Don Carlos tendrá que pagar 34 320 colones en la compra del plástico.

**Discusión interactiva y comunicativa**

Los estudiantes exponen las diferentes estrategias implementadas y el docente les puede hacer las siguientes preguntas generadoras que orientan la fase de cierre o clausura:

- ¿Cómo encontró la medida de la altura de los triángulos que conforman la parte superior del techo? *Con esto se puede formalizar el concepto de apotema de la pirámide.*
- ¿Cómo calcularon el área de la parte superior del techo (forma de pirámide)? *Con esto se puede formalizar el concepto de área lateral de una pirámide.*
- ¿Cómo calcularon el área de las paredes del invernadero? *Con esto se puede formalizar el área lateral de un prisma.*

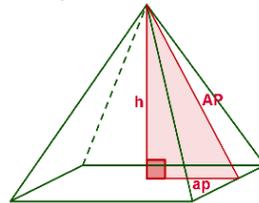
Lo escrito en color azul corresponde al enlace que el docente realiza con base en el trabajo desarrollado por el estudiante para posteriormente y de forma natural formalizar los conceptos.

**Clausura o cierre**

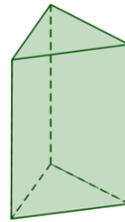
Se deben conectar los diversos desarrollos y estrategias empleadas por los estudiantes haciendo uso de las preguntas generadoras en la fase de *Discusión interactiva y comunicativa*, para que ellos puedan deducir los elementos teóricos que se intentan desarrollar:

1. Que para calcular la **apotema de la pirámide (AP)**, conociendo la **altura (h)** y la **apotema de la base (ap)**, se puede aplicar el **teorema de Pitágoras**:

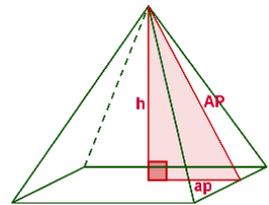
$$AP^2 = h^2 + ap^2$$



2. Que el área total de un poliedro es igual a la sumatoria de las áreas de cada polígono que lo conforman. **Caso particular:** el prisma y la pirámide:



$$A_T = A_L + 2 \cdot A_B$$



$$A_T = A_L + A_B$$

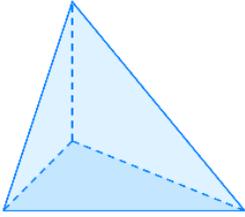
Observaciones: \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

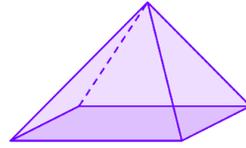
\_\_\_\_\_

**II Etapa Movilización y aplicación del conocimiento. (Tiempo propuesto: 5 lecciones)\***

1. Identifique y calcule la apotema de las siguientes pirámides rectas cuya base es un triángulo equilátero y un cuadrado respectivamente.



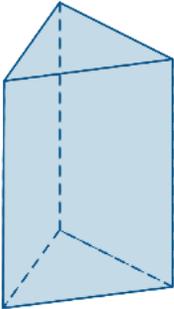
Lado de la base:  $6\sqrt{3}$  cm  
 Apotema de la base: \_\_\_\_\_  
 Altura de la pirámide: 4 cm  
 Apotema de la pirámide: \_\_\_\_\_



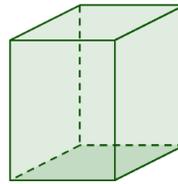
Lado de la base: 10 cm  
 Apotema de la base: \_\_\_\_\_  
 Altura de la pirámide: 12 cm  
 Apotema de la pirámide: \_\_\_\_\_

2. Con los datos obtenidos en el ejercicio 1 calcule el área lateral y el área total de las anteriores pirámides rectas.

3. Calcule el área lateral y el área total de los siguientes prismas rectos de base regular.



Lado de la base:  
 $6\sqrt{3}$  cm  
 Altura del prisma:  
 4 cm  
 Área lateral:  
 \_\_\_\_\_  
 Área total:  
 \_\_\_\_\_

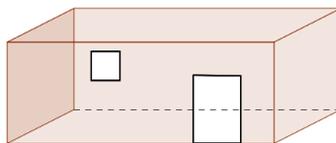


Lado de la base:  
 5 cm  
 Altura del prisma:  
 10 cm  
 Área lateral:  
 \_\_\_\_\_  
 Área total:  
 \_\_\_\_\_

4. Resuelva los siguientes problemas:

**Reproducción:**

Juan quiere pintar su dormitorio (ver imagen representativa) que mide 4,5 metros de largo, 3 metros de ancho y 2,5 metros de altura. El cuarto tiene una puerta de forma rectangular de 2,15 m de alto por 0,75 metros de ancho y una ventana cuadrada de 50 cm de lado. Si un galón de pintura económica cubre 20 metros cuadrados, ¿Cuántos galones ocupará Juan para pintar las paredes de su cuarto?



### Conexión:

La *Gran pirámide de Guiza* es la más antigua de las Siete maravillas del mundo y la única que aún perdura, además de ser la mayor de las pirámides de Egipto. El egiptólogo británico Sir William Matthew Flinders Petrie hizo el estudio más detallado realizado hasta el momento acerca del monumento, siendo sus dimensiones las siguientes:

- Altura original = 146,61 m
- Altura actual = 136,86m
- La base es aproximadamente cuadrada de lado promedio de 230,347 m (9068,8 pulgadas)

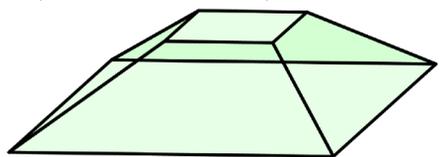
Con base en los datos anteriores:

- a) Encuentre una aproximación para el área de la superficie lateral que actualmente posee la *Gran pirámide de Guiza*.
- b) ¿Qué porcentaje de área lateral ha perdido la *Gran pirámide de Guiza*?

La información de este problema se tomó de: Gran Pirámide de Guiza. (2015, 3 de marzo). En Wikipedia, la enciclopedia libre. Recuperado el 09 de marzo de 2015 a las 9:00 de <[http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Gran\\_Pir%C3%A1mide\\_de\\_Guiza&oldid=80375585](http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Gran_Pir%C3%A1mide_de_Guiza&oldid=80375585)>

### Reflexión:

Una pirámide truncada es el cuerpo geométrico que resulta al cortar una pirámide por un plano paralelo a la base y separar la parte que contiene al vértice. Por ejemplo, la parte del techo del invernadero formada por trapecios isósceles es una pirámide truncada.



Tomando en cuenta lo desarrollado en el problema del invernadero, deduzca una fórmula para el cálculo del área lateral de la pirámide truncada de base cuadrada tomando en cuenta la altura  $h$  y la apotema de la base mayor  $a$  de la pirámide que la origina.

Observaciones: \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

\*El tiempo propuesto fue tomado del documento *Integración de habilidades matemáticas en la acción de aula en secundaria* (2014).

## Créditos

Elaborado por: Luis Hernández y Erasmo López

Colaboró: Javier Barquero

Editor y revisor: Ángel Ruiz

Director general del proyecto *Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica*:  
Ángel Ruiz