Documentos de apoyo curricular

Proyecto *Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica*
Costa Rica

La aprobación por parte del Consejo Superior de Educación de Costa Rica de nuevos programas de estudio en Matemáticas el año 2012 constituye un momento decisivo para la Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en el país. El proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica es consciente de que el profundo cambio metodológico propuesto debe ir acompañado con procesos de capacitación y con la participación de documentos que faciliten al docente su implementación.

Por esta razón, fue elaborada una serie de documentos que pretenden servir de apoyo al docente en su labor de aula; están organizados por áreas matemáticas, en cada año se presenta un problema interesante, aunque en ocasiones se incluyen dos. En este problema se trata de mostrar el estilo de organización de la lección a la luz de lo que se propone en los nuevos programas.

Son cuatro documentos, uno para cada ciclo lectivo (I Ciclo, II Ciclo, III Ciclo y Ciclo Diversificado). Estos materiales se encuentran disponibles en línea y pueden ser descargados en las siguientes direcciones:

Apoyo curricular en Matemáticas, I Ciclo:

http://www.reformamatematica.net/programas/index.php/apoyocurricular/article/view/60

Apoyo curricular en Matemáticas, II Ciclo:

http://www.reformamatematica.net/programas/index.php/apoyocurricular/article/view/61

Apoyo curricular en Matemáticas, III Ciclo:

http://www.reformamatematica.net/programas/index.php/apoyocurricular/article/view/62

Apoyo curricular en Matemáticas. Ciclo diversificado:

http://www.reformamatematica.net/programas/index.php/apoyocurricular/article/view/63

Todos estos documentos fueron elaborados por el *Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica* y se encuentran bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-CompartirIgual 3.0 Unported.

Como ejemplo se adjunta el documento *Apoyo curricular en Matemáticas, Ciclo diversificado*

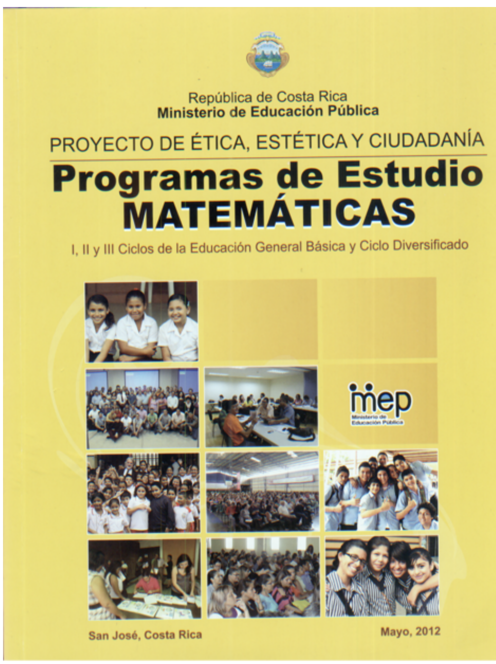
Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática. 2015. Año 10. Número 13. pp 303-380. Costa Rica

Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica

www.reformamatematica.net

Apoyo curricular en Matemáticas

Ciclo diversificado



Costa Rica

2013

Presentación

La aprobación por parte del Consejo Superior de Educación de nuevos programas de estudio en Matemáticas el 21 de mayo del 2012 constituye un momento decisivo para la Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en el país. El proyecto *Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica* es consciente de que el profundo cambio metodológico propuesto debe ir acompañado con procesos de capacitación y con la participación de documentos que faciliten al docente su implementación.

Por esta razón, este documento brinda una serie de problemas que pretenden servir de apoyo al docente en su labor de aula; están organizados por áreas matemáticas, en cada año se presenta un problema interesante, aunque en ocasiones se incluyen dos. En este problema se trata de mostrar el estilo de organización de la lección a la luz de lo que se propone en los nuevos programas.

Se proponen dos tipos de problemas o actividades:

1. *Problemas principales.* Estos presentan un análisis detallado que muestra:
   - los conocimientos y habilidades específicas que se quieren promover, así como las habilidades previas necesarias para favorecer el nuevo aprendizaje;
   - indicaciones sobre cómo desarrollar el problema propuesto en cada una de los cuatro momentos principales de la lección y sobre los procesos matemáticos que esta actividad permite activar;
   - algunos ejemplos de ítems que pueden contribuir a reforzar los conocimientos adquiridos en los diferentes niveles de complejidad (reproducción, conexión y reflexión);
   - una especificación de cómo se pueden potenciar los ejes disciplinares durante la actividad;
   - algunas sugerencias sobre cómo encaminar la evaluación.

   Estos no necesariamente están presentes en todas las áreas ni en todos los años.
2. *Problemas secundarios.* Estos presentan un análisis menos detallado que en los problemas principales, incluyen:
   - conocimientos y habilidades específicas que se quieren introducir, así como las habilidades previas que se espera que posea cada estudiante;
   - la solución del problema.

En algunos casos, los problemas secundarios harán énfasis en ciertos ejes disciplinares. Además en ocasiones un problema secundario y uno principal se incluyen en un año particular.

En Estadística y Probabilidad se propone cada año un problema para Estadística y otro para Probabilidad.

Es importante destacar que aunque se realice un análisis detallado de algunos problemas, esto no significa que en la planificación de una lección de Matemáticas deban aparecer todos los elementos que incluye ese análisis. Este documento debe usarse como un respaldo para el docente, pero para la acción de aula siempre se requerirá una mediación pedagógica adecuada que solo el docente puede desarrollar.

Introducción al Ciclo diversificado

Como se establece en los Programas de estudio de Matemáticas, el Ciclo diversificado complementa y amplía los tópicos introducidos en el Tercer ciclo, y además, aporta conceptos y procedimientos que serán relevantes para algunos estudiantes que proseguirán estudios superiores.

Es necesario recordar que en este ciclo Números y Medidas se trabajan transversalmente junto con las otras áreas matemáticas y por ese motivo no se incluyen explícitamente en este documento.

En Geometría las situaciones seleccionadas permiten trabajar conocimientos relacionados con el perímetro y área de polígonos, así como las transformaciones en el plano: traslaciones, reflexiones, homotecias y rotaciones.

En Relaciones y Álgebra se trabajan las funciones y su uso en el planteo y resolución de problemas contextualizados, enfocado a lo que es el uso de modelos matemáticos estudiados en años anteriores.

En Estadística y Probabilidad se proponen situaciones que permiten desarrollar conocimientos –en la parte de Probabilidad - relacionados reglas básicas de las probabilidades y posición relativa (estandarización).

En lo que respecta a Estadística se trabaja con resolución de problemas del contexto estudiantil que involucren el análisis de las medidas de posición y las medidas de variabilidad: recorrido, recorrido intercuartílico para la toma de decisiones acertadas y resumir la variabilidad de un grupo de datos mediante la desviación estándar e interpretar la información que proporcionan.

Se desarrolla un problema principal para cada una de las áreas matemáticas presentes.

Al final vienen dos anexos: uno donde se incluye una nota concerniente a la ley de tránsito que complementa lo desarrollado en el problema principal propuesto para Décimo año en el área de Relaciones y Álgebra y otro en el que se muestran otros modelos matemáticos que pueden trabajar los estudiantes de Undécimo año.

Geometría

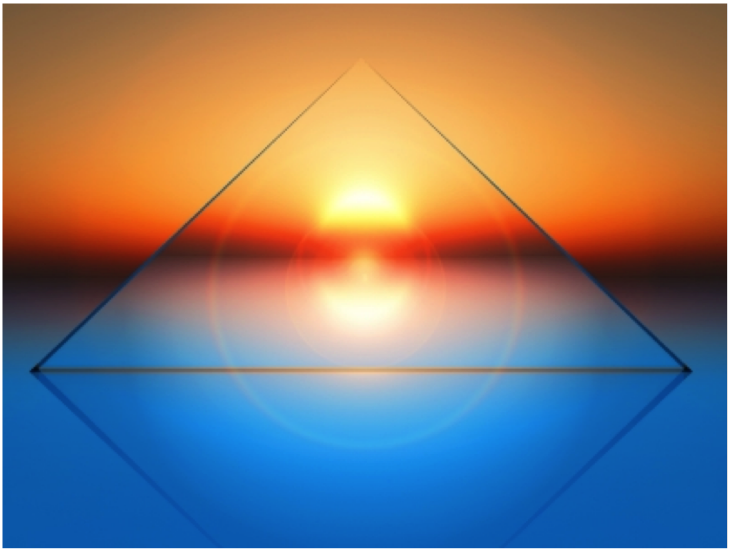


Imagen cortesía de dan en FreeDigitalPhotos.net

Décimo año. Problema principal

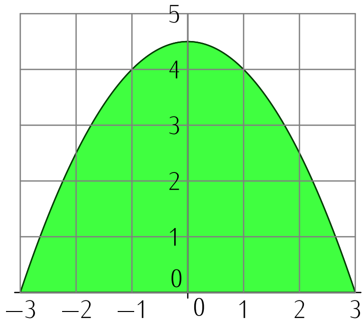
Conocimientos	Habilidades específicas	Habilidades previas
✳ Polígonos: área ✳ Relaciones métricas	✳ Estimar perímetros y áreas de figuras planas no poligonales utilizando un sistema de coordenadas rectangulares.	Geometría, Décimo año ✳ Calcular perímetros y áreas de polígonos no regulares utilizando un sistema de coordenadas rectangulares. ✳ Resolver problemas que involucren polígonos y sus diversos elementos.

Etapas de organización de la lección

I Etapa: El aprendizaje del conocimiento

Propuesta de problema

Estime el área de la región delimitada (la curva es una función cuadrática) que se presenta a continuación:

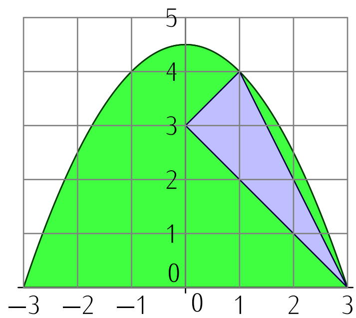


Trabajo estudiantil independiente

Tomando en cuenta el desarrollo de las habilidades específicas previas, el estudiante ha construido la noción de área de un polígono, regular o no, como la suma de las áreas de los triángulos u otros polígonos en que puede ser descompuesto. El área obtenida es independiente de cómo se halla dividido el polígono. Por ejemplo, en la siguiente figura se puede encontrar el área del triángulo azul sumando y restando áreas de figuras poligonales (trapecios rectángulos y triángulos rectángulos):

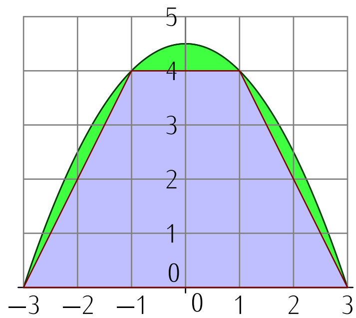
Área del triángulo azul:

$$\left(\frac{(3+4)\cdot 1}{2}+\frac{(4+2)\cdot 1}{2}+\frac{2\cdot 1}{2}\right)-\frac{3\cdot 3}{2}=3u^2$$



Ejercicios como el anterior sirven como preparación preliminar; sin embargo, un desafío mayor es hallar el área de una figura no poligonal, como la del problema. Para esto, el estudiante debe tomar conciencia de que el área de la figura no puede ser calculada de forma directa con alguna de las fórmulas conocidas, pues no corresponde a una figura poligonal. Pese a ello, puede buscar una estimación del área con base a los conocimientos previos en áreas de figuras poligonales conocidas y lograr un análisis de las distintas estrategias.

Esto quiere decir: intentar "completar" el área de la figura no poligonal por medio de polígonos con área conocida como triángulos y cuadriláteros. Por ejemplo: una primera aproximación podría hacerse mediante una sola figura conocida, como un trapecio isósceles.

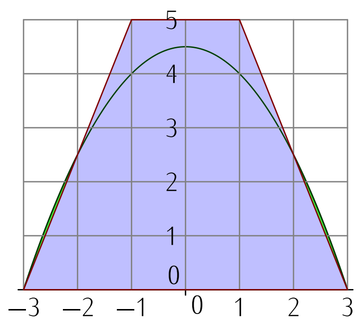


En este caso la aproximación del área sería:

$$\frac{(6+2)\cdot 4}{2} = 16u^2$$

Se debe comentar que ésta es apenas una estimación, y que visualmente se aprecia que se está encontrando un área menor que la que se está buscando.

Ahora bien, una estrategia puede ser delimitar en un intervalo el área de la figura. Por lo que se puede utilizar el área encontrada anteriormente como límite inferior y calcular una aproximación que sea superior a la del área buscada para que sea el límite superior. Claramente en la siguiente figura se visualiza que el área del trapecio isósceles es mayor a la del área buscada.

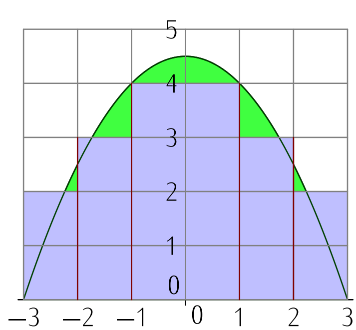


En este caso la aproximación sería:

$$\frac{(6+2)\cdot 5}{2} = 20u^2$$

Con este análisis se puede concluir que el área de la figura original está entre $16u^2$ y $20u^2$.

Otra estrategia a la que podría recurrir el estudiantado es utilizar rectángulos de igual base y distinta altura.



En este caso la aproximación del área sería:

$$1\cdot 2 + 1\cdot 3 + 1\cdot 4 + 1\cdot 4 + 1\cdot 3 + 1\cdot 2$$

Simplificando la operación:

$$2\cdot(2+3+4) = 18u^2$$

Aun cuando visualmente parece que esta estrategia no es la mejor, la aproximación que se encontró es el área exacta de la región.

Uno o varios estudiantes pueden encontrar la ecuación de la curva (parábola), poniendo en juego conocimientos del área de *Relaciones y Álgebra*: . Esto les ayuda a mejorar la estimación, ya que pueden emplear varios puntos coordenados que desconocían, por ejemplo:

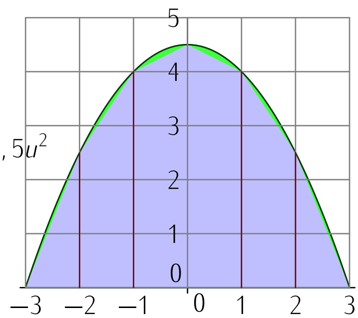
x	0	2
y	4,5	2,5

Con esta información se pueden utilizar los siguientes trapecios y triángulos rectángulos, que se acercan más al área de la curva.

En este caso la aproximación del área sería:

$$2\cdot\left(\frac{2,5\cdot 1}{2}+\frac{(2,5+4)\cdot 1}{2}+\frac{(4+4,5)\cdot 1}{2}\right)=17,5u^2$$

Observe que en el cálculo se considera la simetría de la figura.



Discusión interactiva y comunicación

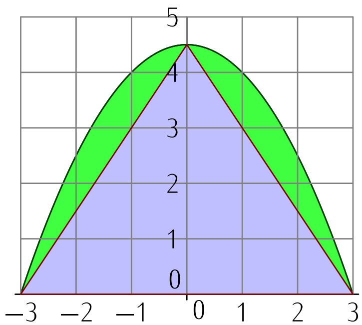
En este tipo de problemas de estimación en el que no hay una única solución, se potencia la diversidad de estrategias y respuestas; esto hace que sea muy rica la discusión, la argumentación y el análisis.

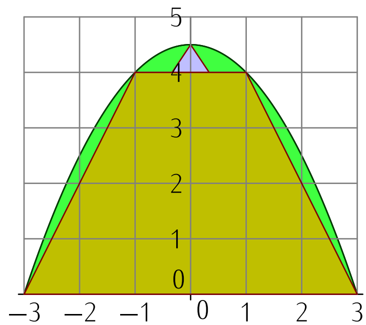
El estudiante debe no sólo comunicar su estimación sino también explicar la estrategia seguida y argumentar la validez de sus resultados. El docente, por su parte, debe formular preguntas que promuevan el análisis de la eficiencia de la estrategia y del nivel de aproximación.

Asimismo, debe impulsar la originalidad con que el estudiante dispone de las figuras para abarcar la totalidad de la región y el grado de exhausión [1] implementado para acercarse al valor exacto.

Para esto es fundamental que cada grupo de estudiantes exponga lo trabajado y que se concreten preguntas que generen discusión. A continuación, deben argumentar porqué el dibujo de la derecha brindará una mejor aproximación que el de la izquierda:

1. Es una aproximación entre figuras geométricas conocidas, inscritas y circunscritas, sobre otra por conocer, de manera que la diferencia entre unas y otras sea tan indeterminadamente pequeña que se consideran equivalentes.





El docente debe discutir con los estudiantes el uso adecuado de procedimientos matemáticos para desarrollar la estrategia. En los anteriores ejemplos, el docente verifica con la participación estudiantil que los cálculos de las áreas de las figuras sean correctos y que las fórmulas sean las indicadas. Inclusive, el estudiante puede buscar alternativas que simplifiquen los cálculos a realizar. Por ejemplo, aprovechando la simetría que presenta la figura.

En la actividad se potencian procesos matemáticos como *Representar,* al utilizar diferentes polígonos de área conocida para aproximar de la mejor manera el área de la región. Además, se evidencia el proceso *Razonar y argumentar* al deducir diferentes estrategias para encontrar mejores estimaciones y analizar la pertinencia y la coherencia de los resultados obtenidos. Al final, es importante que en conjunto se decida cuál o cuáles fueron las estrategias más eficientes y las estimaciones más cercanas al valor exacto.

Clausura o cierre

El cierre pedagógico que se hace en este caso no es de contenidos, sino que gira en torno al método o *heurística*[2] para resolver problemas referentes a la estimación de áreas no poligonales. Aquí se puede incidir sobre las estrategias expuestas, se introduce un análisis crítico de las acciones efectuadas, eligiendo las prácticas más eficientes, y se proponen actividades complementarias que fortalezcan la comprensión de los conocimientos trabajados.

Es esencial que este cierre no sea artificial o alejado del proceso recién vivido, hay que integrar las diferentes estrategias empleadas, analizando porqué algunas tuvieron mejor aproximación que otras.

Igualmente, se elabora una síntesis cognoscitiva respecto a la utilización de fórmulas de áreas poligonales conocidas en la resolución de problemas de este tipo; y con esto no sólo se crean nuevas heurísticas, sino que también se pueden asociar a elementos históricos como el *método de exhaución*.

2. Se puede definir *Heurística* como un arte, técnica o procedimiento práctico o informal para resolver problemas. La popularización del concepto se debe a *George Pólya*, con su libro *Cómo resolverlo* (How to solve it). Habiendo estudiado tantas pruebas matemáticas desde su juventud, quería saber cómo los matemáticos llegan a ellas.

Sin embargo, el docente debe tener claro que el objetivo de esta actividad no es enseñar métodos infinitesimales para encontrar el área bajo la curva, éste no es un tema contemplado en Educación Secundaria. No obstante, puede indicar cuál es el área exacta y comentar que existen métodos para este fin asociados a un área de las Matemáticas llamada *Cálculo Infinitesimal*.

En este sentido puede crear un "vínculo" con el saber matemático que se ha construido en la historia de las Matemáticas, al explorar las raíces intuitivas del método de exhaución desarrollado por varios matemáticos de la Antigüedad, entre ellos Eudoxo, Arquímedes, etc. El mismo tuvo una importancia metodológica en el tratamiento de problemas geométricos en la Grecia Clásica y en Alejandría, y esto incide en desarrollar una visión integral y humanista sobre la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas.

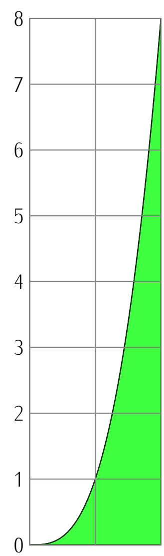
II Etapa: Movilización y aplicación de los conocimientos

En esta etapa se trata de fortalecer los conocimientos aprendidos ya sea en el mismo contexto o incluirlos en la aplicación de los nuevos conocimientos en contextos diferentes, planteándose la evaluación de los conocimientos asimilados. A manera de ilustración se proponen los siguientes ejercicios de diferente nivel de complejidad:

Ejercicio de Reproducción

Estime el área de la región sombreada. Para una mejor aproximación tome en cuenta los siguientes pares ordenados correspondientes a la línea curva de la superficie sombreada.

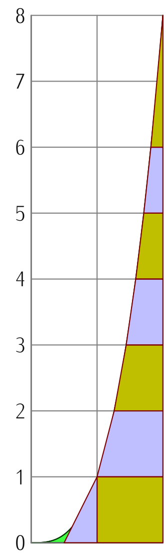
x	y
0	0
1	1
$\sqrt[3]{2}$	2
$\sqrt[3]{3}$	3
$\sqrt[3]{4}$	4
$\sqrt[3]{5}$	5
$\sqrt[3]{6}$	6
$\sqrt[3]{7}$	7
2	8



Solución

Una primera aproximación puede ser calcular el área de un triángulo con vértices en (0,0), (2,8) y (2,0), teniendo claro que el área será superior ($8u^2$) a la de la región. Un mejor acercamiento es calcular el área del triángulo con vértices (1,0), (2,8) y (2,0). Es interesante que el área del segundo triángulo citado tenga la misma área que la región sombreada 4u^2. En estos casos no se emplea la tabla, pero se puede aprovechar como un primer acercamiento.

Mediante la tabla se puede encontrar una mejor estimación considerando el área de la región sombreada como la suma de dos triángulos, un cuadrado y cinco trapecios rectángulos:



Triángulos:

$$\frac{0,5\cdot 1}{2}+\frac{(2-\sqrt[3]{6})\cdot 2}{2}=\frac{1}{4}+2-\sqrt[3]{6}\approx 0,43$$

Cuadrado:

$$1\cdot 1=1$$

Trapecios:

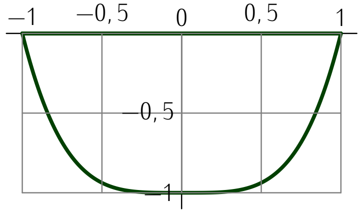
$$\frac{(1+2-\sqrt[3]{2})+(2-\sqrt[3]{2}+2-\sqrt[3]{3})+(2-\sqrt[3]{3}+2-\sqrt[3]{4})}{2}$$

$$+\frac{(2-\sqrt[3]{4}+2-\sqrt[3]{5})+(2-\sqrt[3]{5}+2-\sqrt[3]{6})}{2}\approx 2,59$$

Por lo que una estimación de la región sombreada es: $0,43+1+2,59=4,02u^2$. Esta es una muy buena aproximación, tomando en cuenta que el área exacta de la región es $4u^2$.

Ejercicio de Conexión

Estime el área de la superficie de la siguiente figura. Para una mejor aproximación, tome en cuenta que la línea curva representa una parte de la función $f(x)=x^4-1$.

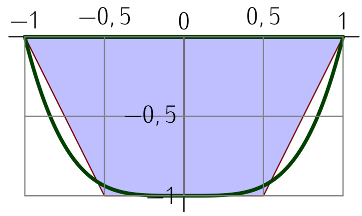


Solución

Una primera aproximación puede ser más intuitiva. Por ejemplo, no recurriendo a la información de que la parte curva representa la función $f(x)=x^4-1$.

Área del trapecio isósceles:

$$\frac{(2+1)\cdot 1}{2} = \frac{3}{2} = 1,5u^2$$

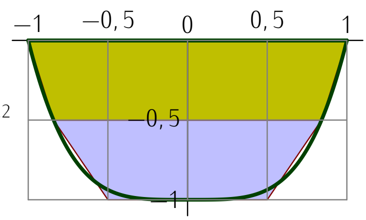


Otro método puede ser utilizando dos trapecios. En este caso se encuentra la preimagen de 0,5 de $f(x)$:

$$-0,5 = x^4 - 1 \Rightarrow \frac{1}{2} = x^4 \Rightarrow \pm\sqrt[4]{\frac{1}{2}} = x.$$

Posteriormente, se aprovecha la simetría de la figura:

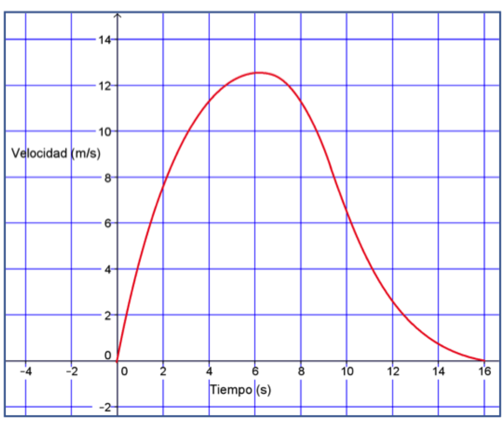
$$2\left(\frac{(1+\sqrt[4]{0,5})\cdot 0,5}{2} + \frac{(\sqrt[4]{0,5}+0,5)\cdot 0,5}{2}\right) \approx 1,59u^2$$



El área exacta de la región es $1,6u^2$; lo que evidencia que la segunda estrategia es mejor que la primera.

Ejercicio de Reflexión

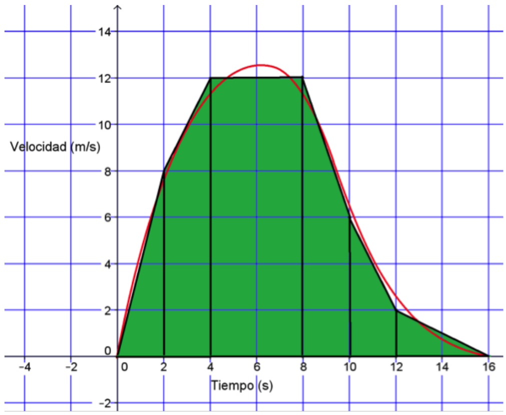
El siguiente gráfico representa la velocidad en tiempo determinado de un corredor en una competencia. El competidor tarda 16 segundos en realizar el recorrido. ¿Cuál es la distancia (en metros) del recorrido?



Solución

Primero hay que tener claro que la velocidad es igual a distancia recorrida entre el tiempo transcurrido, por lo que la distancia recorrida será el producto entre la velocidad y el tiempo transcurrido. Esto se puede representar como el área bajo la curva en el gráfico del problema.

Para estimar el área respectiva, en la siguiente imagen se utilizan triángulos, trapecios y un rectángulo:



Área bajo la curva:

$$\frac{2\cdot 8}{2}+\frac{(8+12)\cdot 2}{2}+4\cdot 12+\frac{(12+6)\cdot 2}{2}+\frac{4\cdot 2}{2}=8+20+48+22=98.$$

El anterior resultado indica que probablemente la competencia era de 100 metros planos.

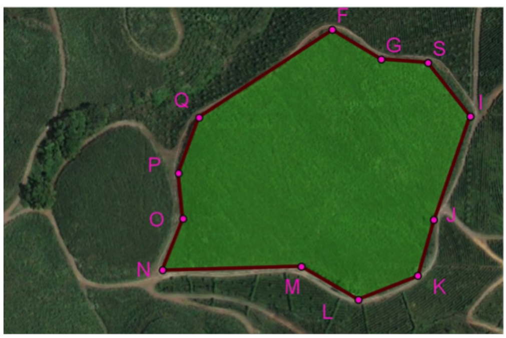
Contextualización activa

Si bien en este nuevo currículo se quiere favorecer problemas en contextos reales, esto no implica dejar de lado los problemas abstractos. En este caso, la idea con el problema era mostrar la conexión que se puede forjar en este tema entre las áreas de *Geometría* y *Relaciones y Álgebra*, además de construir objetos abstractos con base en una estrategia que permita asociaciones con los entornos en ciertos momentos para favorecer los aprendizajes.

Posteriormente se pueden sugerir ejercicios como estimar el área de terrenos irregulares como el que se presenta en la siguiente imagen de la Esmeralda de Turrialba en Cartago.

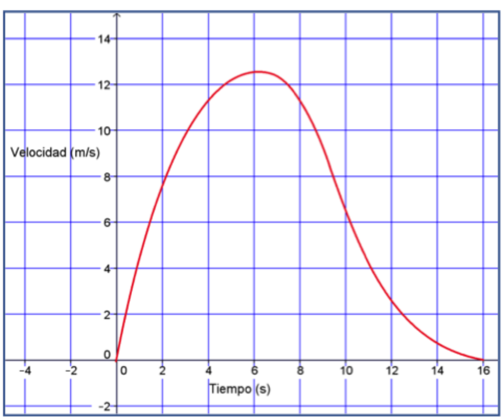
Imagen tomada de Google Map 2013

Aquí el elemento vital es la modelización geométrica del terreno, empleando para ello uno o varios polígonos. En la siguiente imagen se utiliza un dodecágono irregular, que se puede descomponer en otros polígonos:



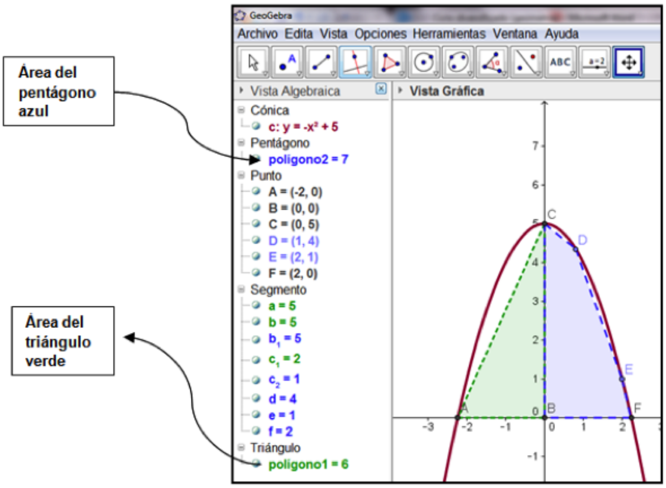
También, se pueden proponer ejercicios como el que se expuso en la sección de Movilización y aplicación de conocimientos:

El siguiente gráfico representa la velocidad de un corredor en un recorrido que tarda 16 segundos. ¿Cuál es la distancia (en metros) del recorrido?



Uso de tecnología

El *software de geometría dinámica*[3] es un recurso ágil y eficiente en el "trazado" de curvas y cálculo de áreas, entre otras cosas. Igualmente, proporciona la riqueza de poder variar parámetros y manipular objetos geométricos de manera rápida y fácil, lo que ayuda en ambientes donde se potencia el descubrimiento y la búsqueda de una mejor precisión.

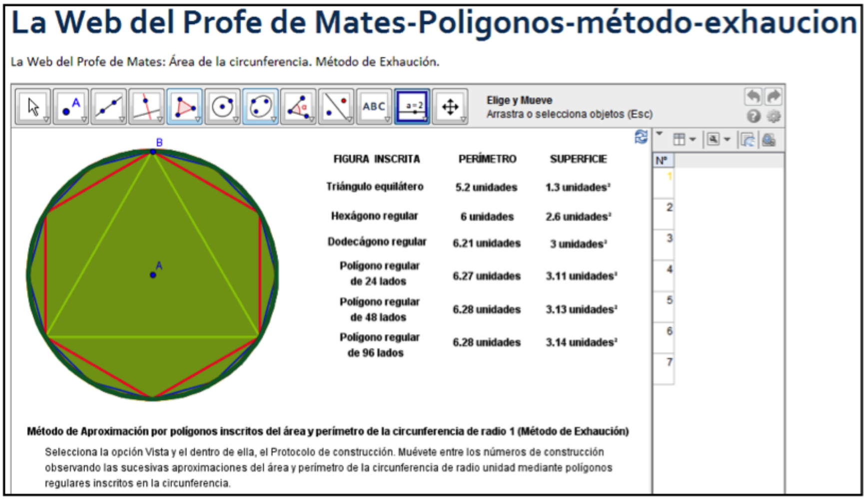


Existe en el ambiente educativo nacional gran diversidad de software de geometría dinámica, como por ejemplo *The Geometers Sketchpad*, *Cabri*, *GeoGebra*, etc. Por eso hay que aclarar que la elección de recursos queda en manos de las posibilidades del docente.

Existen aplicaciones ya elaboradas disponibles en Internet, que articuladas a la mediación pedagógica efectiva del docente pueden ser un recurso didáctico valioso para la construcción de nuevos aprendizajes.

Por ejemplo, en el sitio http://geogebratube.com/student/m30883 se presenta una aplicación hecha en GeoGebra que expone el *Método de Exhaución* de forma dinámica.

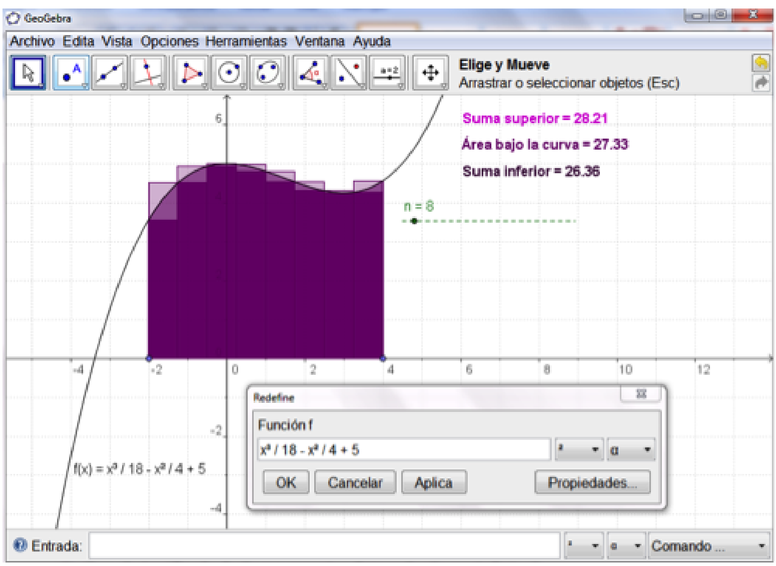
3. Software que permite el "trazado" de figuras dinámicas, o sea que se pueden manipular conservando las relaciones geométricas que estuvieron presentes en su construcción.



A la vez, existen sitios que permiten variar muchos parámetros como

http://docentes.educacion.navarra.es/msadaall/geogebra/figuras/d13riemann2.html

Se puede acceder a un archivo de GeoGebra donde se puede explorar el área bajo la curva de diferentes funciones en un intervalo determinado por el usuario.



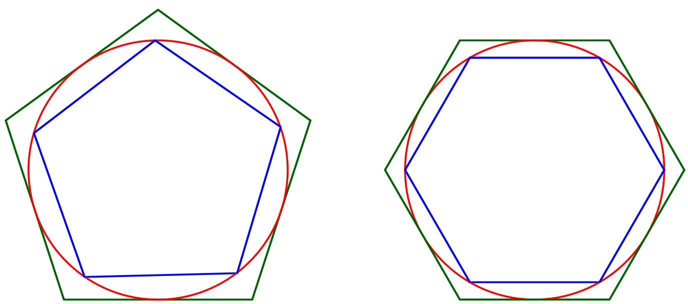
En esta aplicación se hace una estimación del área bajo la curva con rectángulos de igual base y diferente altura. Se dan dos estimaciones, una por exceso (superior a la real) y una por defecto (inferior a la real), y se muestra el área exacta de la curva para hacer las comparaciones respectivas.

Además se puede variar la cantidad de rectángulos de forma dinámica (deslizador n) y así observar que a mayor cantidad de rectángulos las aproximaciones se acercan más al valor exacto.

En este sentido, se puede cambiar la curva introduciendo su ecuación y cambiar el intervalo donde se calculará el área. Esto conecta con los primeros cursos universitarios de Cálculo o con programas preuniversitarios como MATEM.

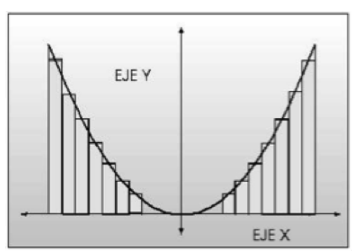
Uso de la historia de las Matemáticas

Hallar el área de una figura curva ha sido un problema trascendental para la Matemática a través de los tiempos, por lo que es significativo potenciar el problema con elementos históricos. Por ejemplo, es oportuno explicar en qué consistía el método de *Exhaución de Eudoxo,* el cual radicaba en inscribir polígonos de área conocida en la figura y circunscribir otros en torno a ella; al aumentar el número de los lados de los polígonos se encontraba una mejor aproximación del área. Eudoxo consiguió así encontrar la fórmula para calcular el área de un círculo.

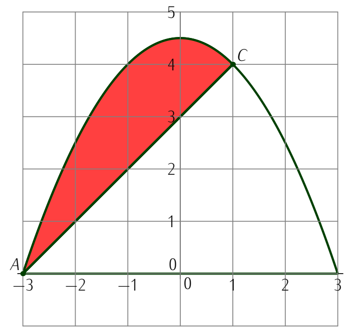


Tiempo después, Arquímedes empleó este mismo método para aproximar el número π. Utilizando un polígono de 96 lados inscritos y circunscritos mostró que $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$, esto es $3,1408450704 < \pi < 3,1428571429$.

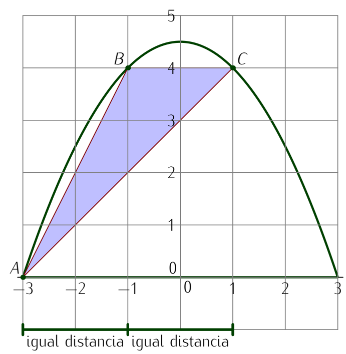
Para los siglos XVII y XVIII se retomó el espíritu del método de exhaución con el cálculo de áreas, buscando aproximaciones al área por medio de figuras geométricas representadas analíticamente; los rectángulos sustituyeron a los triángulos (o polígonos compuestos por triángulos) que se usaron anteriormente. En la siguiente figura tomada del *libro Geometrías no Euclidianas: Breve historia de una gran revolución intelectual*de Ángel Ruiz (1999) se muestra como se aproxima el área bajo la curva empleando rectángulos.



Considere la siguiente figura que ilustra el área sombreada de rojo delimitada por el segmento AC y el trazo de una parábola:



Arquímedes demostró que el área sombreada de la figura anterior es igual a 4/3 de la del triángulo inscrito que se ilustra en la siguiente figura. Para que esta propiedad se cumpla se necesita que las abscisas de A y C estén a la misma distancia de la abscisa de B.



Actitudes y creencias

El hecho de que el estudiante reflexione acerca de la posibilidad de efectuar una mejor aproximación a la ya desarrollada genera actitudes de *Perseverancia*, que es muy valiosa en el estudio de las Matemáticas.

En este tipo de actividades donde hay gran diversidad de estrategias y aproximaciones, la *Participación activa y colaborativa* se vuelve fundamental para el momento pedagógico *Discusión interactiva y comunicación*, en el cual cada estudiante o grupo de estudiantes deben exponer y argumentar la estrategia o estrategias empleadas, mientras los demás compañeros las analizan, discuten y realizan observaciones.

La *Confianza en la utilidad de las Matemáticas* se puede potenciar con el estudio del método de exhaución y sus repercusiones en el Cálculo infinitesimal que ahora es una herramienta técnico-científica muy importante en el análisis de procesos que contienen magnitudes en constante cambio, por ejemplo: la velocidad de las reacciones químicas, los cambios atmosféricos, los desarrollos sociales y económicos de las naciones, en la astronomía para calcular las órbitas de los satélites y de las naves espaciales, en medicina para medir el flujo cardiaco, en la estadística y en una gran diversidad de áreas.

En esta actividad se promueve la *Autoestima en relación con el dominio de las Matemáticas*, ya que se pueden apreciar las "escaleras pedagógicas" en un mismo problema, el cual puede ser abordado con diferente nivel de profundidad de conocimiento matemático. Las estrategias y resultados no se deben clasificar como correctos o incorrectos, sino como aproximaciones más o menos cercanas al valor real. Aquí es primordial valorar no tanto la estimación como la creatividad de la estrategia; esto ayudará a potenciar la autoestima en los estudiantes.

Sugerencias de evaluación

En este tipo de problemas de estimación en los que no hay una única solución, es claro que no se puede evaluar la exactitud de un resultado sino la eficiencia de la estrategia y su aproximación; también es relevante valorar la originalidad con que el estudiante dispone de las figuras para abarcar la totalidad de la región y el grado de exhaución implementado para lograr un mejor acercamiento al área exacta de la figura no poligonal.

Es imprescindible evaluar la argumentación y el análisis que realiza el estudiante al exponer su estrategia. De la misma manera, se tomará en cuenta la participación de los demás estudiantes de la clase al debatir y discutir la estrategia del compañero.

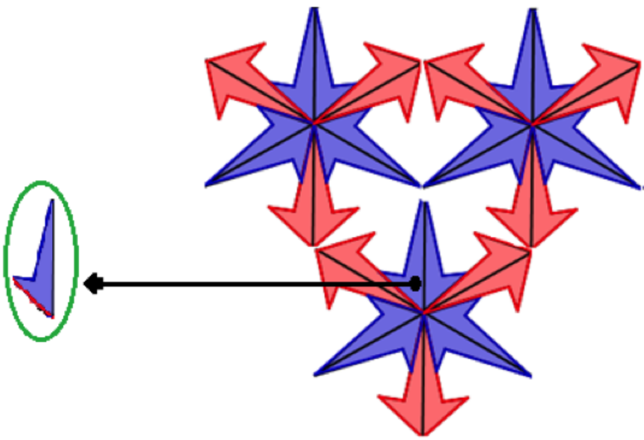
El docente debe valorar si el estudiante hace un uso adecuado de procedimientos matemáticos para desarrollar la estrategia. Inclusive, se puede considerar si el estudiante busca alternativas que simplifiquen los cálculos a efectuar. Por ejemplo, valorar si el estudiante aprovecha la simetría que presenta la figura en la simplificación de los cálculos matemáticos.

Undécimo año

Conocimientos	Habilidades específicas	Habilidades previas
Transformaciones en el plano: traslaciones, reflexiones, homotecias y rotaciones	✳ Resolver problemas relacionados con diversas transformaciones en el plano. ✳ Utilizar software de geometría dinámica para el análisis de las propiedades de las traslaciones, homotecias y reflexiones.	Geometría, Undécimo año ✳ Aplicar el concepto de traslación, homotecia, reflexión y rotación para determinar qué figuras se obtienen a partir de figuras dadas. ✳ Trazar la imagen reflejada de una figura dada con respecto a una recta. ✳ Trazar la imagen de una figura dada si se la somete a una rotación.

Propuesta de problema

Partiendo de la figura base (encerrada en un óvalo), reproduzca la siguiente figura:



Solución del problema

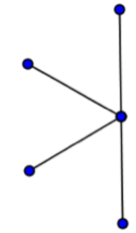
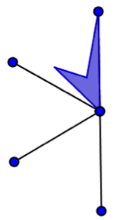
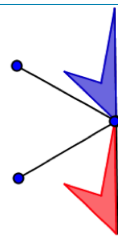
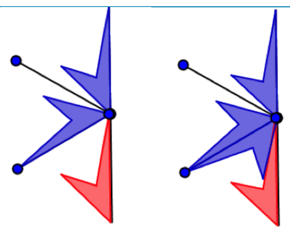
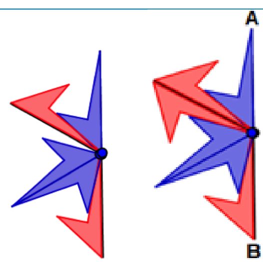
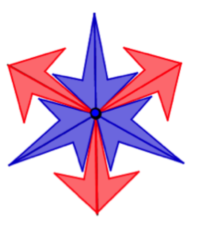
Este problema se puede abordar de dos maneras. Un primer acercamiento es hacer una reproducción de la figura base en cartulina, por ejemplo, y utilizarla como un manipulable concreto. Otra opción es usar papel cuadriculado o, si se cuenta con un laboratorio de computadoras en la institución, mediante el uso de un software de geometría dinámica que genere diferentes transformaciones sobre una figura dada, en este caso la figura base.

Figura base

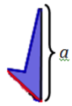
El propósito de esta actividad es que los estudiantes puedan notar que la figura puede obtenerse por medio de la aplicación de diversas transformaciones en el plano a partir de una figura base. Aquí tienen la libertad de usar software matemático o bien papel cuadriculado.

Como hay dos formas de desarrollar la actividad hay diferencias en el tratamiento del problema. Por ejemplo, si dispone como herramienta de un software dinámico de geometría es necesario valorar que las construcciones no sean generadas simplemente por trazos sin respaldo geométrico; deben originarse por una transformación específica con los parámetros y objetos matemáticos correctos.

Si se opta por la utilización de papel cuadriculado, el docente puede valorar el uso adecuado de instrumentos y la nitidez del trazado. En nuestro ejemplo, sería conveniente ver que los estudiantes lleven una bitácora de los pasos realizados para llevar un control de la construcción que desempeñan. Por ejemplo:

Construcción de segmentos por medio de rotaciones sucesivas de 60° en sentido antihorario.	
Se dibuja la pieza base de la construcción y se pinta de color azul.	
Se traslada verticalmente hacia abajo la pieza base tantas unidades como mida el segmento rotado anteriormente. Se puede pintar esta última de color rojo.	
Se hace una reflexión con respecto al segmento ubicado al lado izquierdo de la región azul. Luego se realiza otra reflexión respecto al lado de mayor longitud de la región obtenida recientemente.	
Se procede a rotar la pieza roja 120° en sentido horario. Luego se produce una reflexión sobre su segmento de mayor longitud.	
Se procede a realizar una reflexión de todas las regiones formadas hasta ahora con respecto al segmento AB.	

Sea a la longitud del segmento de la figura base, como se muestra a continuación:

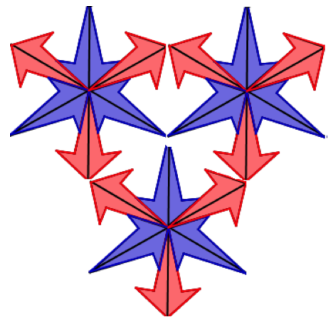


Se efectúan dos traslaciones de la figura formada anteriormente, una con vector

$$\left(\frac{a}{2}\sqrt{3}, \frac{3a}{2}\right)$$

y la otra con vector.

$$\left(-\frac{a}{2}\sqrt{3}, \frac{3a}{2}\right)$$

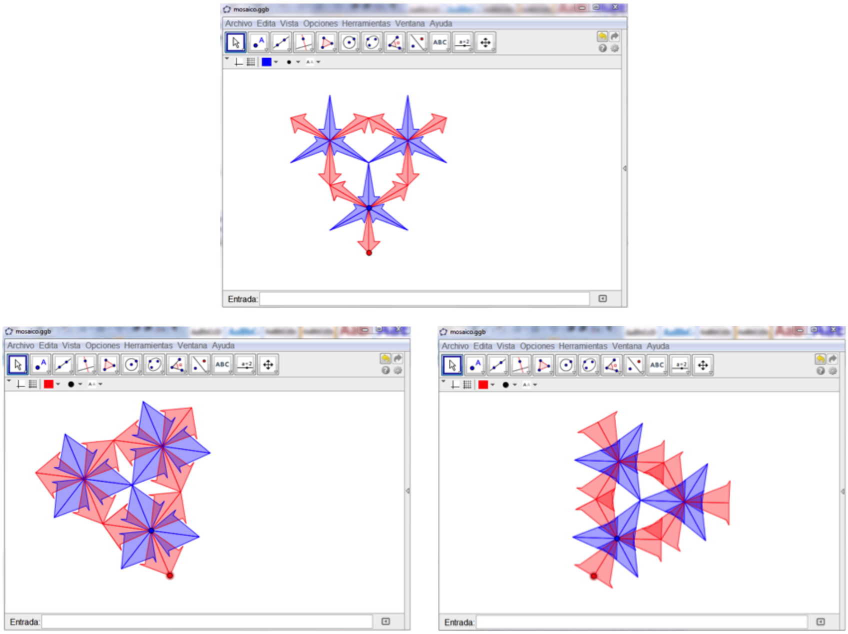


Hay que tener claro que este problema cuenta con gran diversidad de estrategias. Por ejemplo se puede formar la flecha azul con una reflexión con respecto al segmento con longitud a; las otras dos azules con rotaciones de 120° y 240° de la flecha original. La flecha roja inferior con una traslación con vector *(0,-a)* de la primer flecha azul construida y las otras dos flechas rojas por rotaciones de 120° y 240° grados de la flecha roja construida anteriormente.

Con la anterior bitácora se activa el proceso matemático *Razonar y argumentar,* ya que no sólo se pide la construcción sino también la justificación de los procedimientos. Asimismo, este tipo de actividades que ponen en práctica destrezas artísticas promueven actitudes positivas hacia las Matemáticas como el *Respeto, aprecio y disfrute de las Matemáticas.*

Es importante que el estudiante valore la pertinencia de la estrategia empleada, o bien que deduzca si existe una figura base que haga más eficiente la construcción de la figura. Por ejemplo, que la figura base a considerar fuese la de la derecha.

En esta actividad se puede potenciar el eje disciplinar *El uso inteligente y visionario de tecnologías digitales* y con esto reorganizar las demandas cognitivas que plantea el problema y redefinir las estrategias que se pueden diseñar. En este caso en particular la tecnología apoya y facilita la visualización de objetos y relaciones matemáticas; esto favorece la experimentación matemática. Por ejemplo, con el software libre de matemática dinámica *GeoGebra* se puede hacer esta construcción manteniendo las propiedades de la misma, esto quiere decir que al manipular dinámicamente algunos elementos de la figura base se modifican homólogamente las figuras que fueron producidas a partir de ésta, sin variar las características matemáticas de la construcción:



Imágenes elaboradas con GeoGebra 4.2

Si quiere realizar esta construcción paso a paso, puede acceder a los videos instruccionales que se encuentran en los siguientes enlaces:

- Parte 1: http://www.youtube.com/watch?v=7f_SDkImeLA
- Parte 2: http://www.youtube.com/watch?v=tP8yz0ySrvc
- Parte 3: http://www.youtube.com/watch?v=FVa8eeB-jAQ
- Parte 4: http://www.youtube.com/watch?v=dEjEuqN4F0w

Para este tipo de actividades se requiere tener suficiente tiempo para probar, experimentar, construir, equivocarse y reflexionar. Eso implica que debe existir un planeamiento muy metódico del tiempo en las lecciones y que se adopten las tecnologías en función estricta del aporte que ofrezcan al logro de fines de aprendizaje consignados.

Relaciones y Álgebra

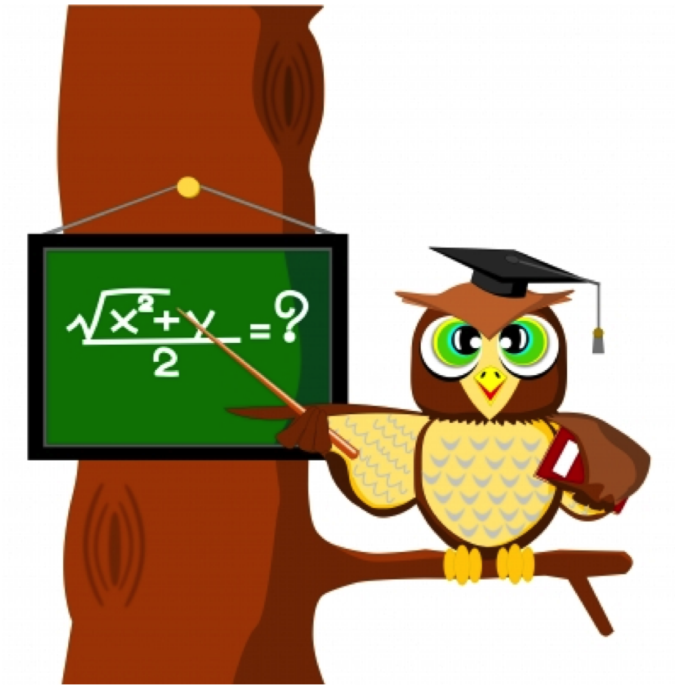


Imagen cortesía de bandrat en FreeDigitalPhotos.net

Décimo año. Problema principal

Conocimientos	Habilidades específicas	Habilidades previas
Funciones: Concepto de función y de gráfica de una función, elementos para el análisis de una función: dominio, imagen, preimagen, ámbito, inyectividad, crecimiento, decrecimiento, máximo y mínimos, análisis de gráficas de funciones. Composición de funciones, función lineal, función cuadrática.	✳ Analizar gráfica y algebraicamente la función cuadrática con criterio $f(x) = ax^2+bx+c$	**Relaciones y Álgebra, Noveno año.** ✳ Identificar situaciones dadas que pueden ser expresadas algebraicamente en la forma $y = ax^2+bx+c, \quad a \neq 0$ ✳ Representar tabular, algebraica y gráficamente una función cuadrática.

Con el objetivo de orientar una lectura apropiada del problema es necesario comentar las indicaciones puntuales relacionadas con la habilidad; en ellas se detalla que la función cuadrática ya fue estudiada en Noveno año, por lo que es considerada una habilidad adquirida. Entonces, como objetivo del problema que se plantea se pretende precisar para Décimo año las propiedades de la función cuadrática.

Se indica además que se debe hacer un estudio sistemático para la representación gráfica que incluya: punto de intersección con el eje de las ordenadas, intersección con el eje de las abscisas, intervalos de crecimiento o decrecimiento, concavidad, intervalos del dominio donde es positivo o negativo y su conexión con la solución de desigualdades cuadráticas, máximos o mínimos de la función (vértice), ámbito de la función, eje de simetría e intervalos máximos donde la función es inyectiva. Los puntos anteriores deben verse en conjunto, articuladamente y no por separado.

Conviene analizar la influencia de los parámetros *a, b* y *c* en el tipo de gráfica y utilizar transformación en el plano: homotecias y traslaciones (MEP, 2012, p.341). Una buena estrategia consiste en la técnica de completar cuadrados (MEP, 2012, 345-346).

Etapas de organización de la lección

I Etapa: El aprendizaje del conocimiento

Propuesta de problema

El siguiente problema puede ser trabajado en subgrupos de tres estudiantes.

Imagen cortesía de FreeDigitalphotos.net

Un conductor, a cierta velocidad, mira un obstáculo en la carretera. Transcurre cierto intervalo de tiempo para que presione los frenos (tiempo de reacción) y otro intervalo de tiempo para que el vehículo se detenga (tiempo de frenado). Durante los intervalos de tiempo mencionados el vehículo recorre ciertas distancias:

- Distancia de reacción: la distancia recorrida por el vehículo desde el instante en que el conductor mira el obstáculo hasta el instante en que presiona los frenos.
- Distancia de frenado: la distancia recorrida por el vehículo mientras se está frenando.

En la siguiente tabla se representa la distancia total (de reacción y de frenado) en función de la velocidad de un vehículo liviano (Tinoco, L. 2009), es decir, la distancia recorrida desde el instante en que el conductor mira el obstáculo hasta que el vehículo se detiene.

Velocidad en que se transita y la distancia total recorrida desde el instante en que el conductor mira el obstáculo y el automóvil se detiene.

Velocidad en que se transita y la distancia total recorrida desde el instante en que el conductor mira el obstáculo y el automóvil se detiene	
Velocidad (km/h)	Distancia total recorrida (m)
10	2,44
20	5,88
30	10,24
40	15,61
50	22,01
60	29,34
70	37,71
80	47
90	57
100	69
110	81
120	94
130	106
140	123
150	139

Con base en la información anterior, responda las siguientes preguntas:

1. Un conductor de un automóvil liviano que viaja a una velocidad de 60 km/h observa un autobús detenido a una distancia aproximada de 50 m delante de su auto. ¿Logrará el conductor evitar la colisión con el autobús? ¿Y si el vehículo viaja a 100 km/h logrará evitar la colisión? Justifique su respuesta.
2. Las leyes costarricenses[4] obligan que un vehículo liviano que viaja por una autopista se mantenga a una distancia mayor a 50 m del vehículo que va adelante. En tales condiciones, ¿cuál es la mayor velocidad que un vehículo debe mantener para evitar la colisión con el vehículo que va adelante si éste se detiene bruscamente? Utilice los datos de la tabla y justifique su respuesta.

4. Ver Anexo 1

3. Si un conductor viaja a 115 km/h y observa un obstáculo al frente, estime la distancia que su vehículo recorre hasta detenerse. Justifique su respuesta.
4. Construya un posible gráfico de la distancia total recorrida por un automóvil liviano en función de la velocidad.
5. Determine un posible modelo algebraico que describa la distancia total recorrida por un automóvil liviano en función de la velocidad.
6. Si un conductor se encuentra a 50 m de distancia de un semáforo y observa que éste acaba de ponerse en rojo y que no existen obstáculos adelante, ¿a qué velocidad máxima puede viajar para lograr detenerse al llegar al semáforo? Utilice el modelo obtenido en la pregunta 5.

Trabajo estudiantil independiente

Al abordar la solución del problema, individualmente o en pequeños grupos, se espera que el estudiantado utilice algunas estrategias para puntualizar las respuestas a las preguntas formuladas. Para cada una de las preguntas se activará el proceso *Plantear y resolver problemas*; conforme esto sucede se obtienen algunos resultados:

Para la pregunta 1

Se espera que cada estudiante busque directamente en los datos la información que necesita. La respuesta es directa y se encuentra al observar el número a la derecha de la velocidad de 60 km/h y de 100 km/h respectivamente. Si la velocidad es de 60 km/h la distancia total recorrida será de 29,34 m que es menor que 50 m, por lo tanto, en este caso no habrá colisión, mientras que para una velocidad de 100 km/h la distancia total recorrida será de 69 m que es mayor que 50 m, y en este caso se interpreta que los vehículos colisionarán.

Para la pregunta 2

El estudiante tendrá que hacer una lectura de los datos. La interpretación inmediata es que la velocidad será menor o igual que 80 km/h, suponiendo que tales límites de velocidad son permitidos por ley en la zona de circulación del vehículo. En esta pregunta se activa el proceso *Razonar y argumentar*.

Las preguntas 1 y 2 son ejemplos de problemas de reproducción, debido a que las habilidades adquiridas previamente por los estudiantes les permiten hallar directamente las respuestas. Además, existe conexión con el área de *Estadística*, por la necesidad de interpretar información presentada en la tabla.

Para la pregunta 3

La búsqueda de soluciones para esta pregunta es más rica en estrategias. En realidad no se puede determinar la respuesta exacta con los datos proporcionados; se puede estimar un intervalo para la distancia recorrida por el vehículo.

Aquí se fortalece el proceso *Razonar y argumentar*, debido a que es pertinente realizar un análisis de los datos para justificar la respuesta. En esta parte de la solución son necesarias algunas estrategias y el carácter integrado con otras áreas, activándose la conexión con *Números* y *Estadística y Probabilidad*. El problema tiene un estrecho vínculo con el contexto, debido a la problemática con las conductas temerarias en la conducción.

A continuación se brindan algunas posibles estrategias para la pregunta número 3.

a) Decir que la distancia se encuentra entre 81 m y 94 m, información que puede expresarse mediante la siguiente desigualdad $81 < d < 94$.

b) Calcular el promedio de las distancias recorridas por vehículos que viajan a 110 km/h y a 120 km/h, pues la velocidad dada es de 115 km/h, esto es $\frac{81+94}{2} = 87,5$ metros.

   Esta estrategia pone en evidencia la necesidad de que el docente visualice las posibles respuestas dadas por el estudiantado. En este caso se está suponiendo que al incrementarse la velocidad (de 110 a 115 y de 115 a 120) hay un aumento en la distancia total que sigue el mismo comportamiento que la velocidad, es decir, la distancia es directamente proporcional a la velocidad.

   Aquí se puede ver la importancia del papel docente al prever las posibles estrategias que el estudiantado utilizará para resolver el problema, lo que abre espacios para preguntas generadoras que obliguen al estudiante a encontrar el error o desechar la estrategia adoptada. Se debe recordar que la intervención docente no consiste en brindar la respuesta o indicar el error sino orientar el proceso.

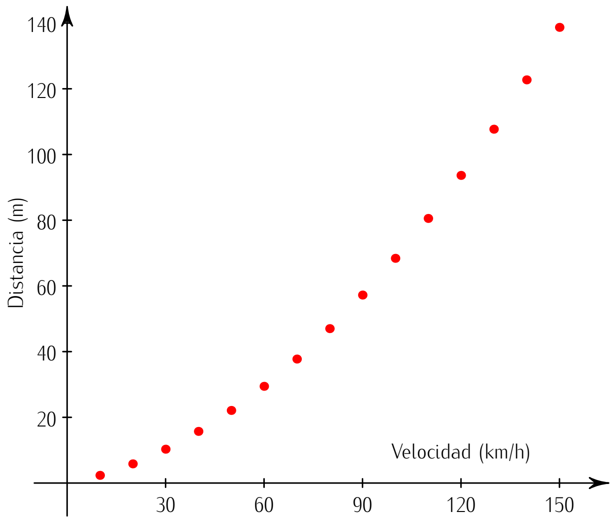
c) Utilizar regla de 3 con uno de los datos.

Con 110 km/h: $110 \longrightarrow 81$ $115 \longrightarrow x$ Por lo tanto $x \approx 84,68m$.	Con 120 km/h: $120 \longrightarrow 94$ $115 \longrightarrow x$ Por lo tanto $x \approx 90,08m$.

Cuando el estudiante propone este tipo de solución se deben plantear preguntas como la siguiente: ¿por qué las respuestas son diferentes al suponer que distancia y velocidad son directamente proporcionales? Esto permitirá un análisis de la respuesta e insistir en la necesidad de elaborar un modelo que se ajuste lo mejor posible a los datos suministrados.

Para la pregunta 4

Se puede esbozar el gráfico ubicando los puntos en el plano de coordenadas y dibujando una curva que pasa por los puntos o bien líneas poligonales que unen los puntos. Es fundamental saber cuál variable se ubica en cada eje de coordenadas. En la representación gráfica se podrá observar que los datos de las dos variables: velocidad y distancia total recorrida no son proporcionales. Con esta actividad se activa el proceso denominado *Representar*.



Observando los puntos que representan los datos del problema, se percibe que una recta no es la mejor curva de ajuste para ellos, se espera que los estudiantes logren asociar esta representación con la función cuadrática abordada en Noveno año.

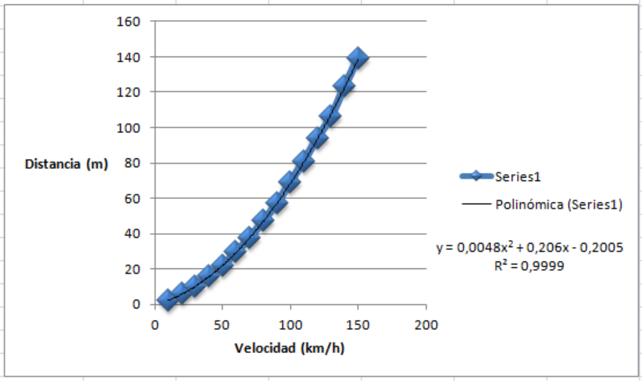
Para la pregunta 5

 El papel del docente es esencial para la elaboración del modelo, y en este caso es recomendable utilizar tecnología digital. La elaboración del modelo podría ser desarrollada en un laboratorio de computo o bien sugerida como un trabajo extra clase. Se puede emplear un software como Microsoft Office Excel, que permite construir modelos matemáticos.

Con Microsoft Office Excel podemos encontrar la *línea de tendencia* para los puntos correspondientes a los datos de la tabla. Esta *línea de tendencia* es una curva de regresión o curva de mejor ajuste a los datos. Con Microsoft Office Excel se puede escoger entre regresión lineal, polinomial (seleccionando el grado del polinomio), logarítmica, potencial y exponencial. Además, es provechoso explorar otras opciones, como por ejemplo software libres para computadoras o celulares que permiten graficar de manera similar a la propuesta.

Al seleccionar la opción polinomial, con $n = 2$, se obtiene la siguiente representación y la ecuación que mejor describe el comportamiento de los datos.

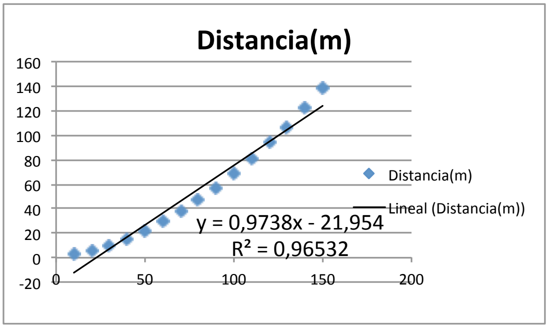
Velocidad (Km/h)	Distancia (m)
10	2,44
20	5,88
30	10,24
40	15,61
50	22,01
60	29,34
70	37,71
80	47
90	57
100	69
110	81
120	94
130	106
140	123
150	139



La representación algebraica para el modelo polinomial de segundo grado que se ajusta muy bien a los datos de la tabla es $d(v) = 0,0048v^2 + 0,206v - 0,2005$, con un coeficiente de determinación $R^2 = 0,9999$. Debe recordarse que en general $0 < R^2 < 1$, cuanto más próximo a la unidad se encuentre R^2, indica que el modelo proporciona una buena predicción para la variable dependiente (distancia total, en metros) como función de la variable independiente (velocidad, en km/h).

Sin embargo, puede permitirse al estudiante experimentar las opciones de líneas de tendencia antes de elegir la polinomial de segundo grado.

Por ejemplo, se podría utilizar una regresión lineal, calcular el coeficiente de determinación y compararlo con el obtenido anteriormente. Con esto se dará cuenta que el modelo cuadrático es mejor que el lineal.



Es conveniente que el estudiantado resuelva las preguntas anteriores aprovechando el modelo obtenido.

Para la pregunta 6

Se debe partir del polinomio encontrado en el inciso 5 para responder a la pregunta 6. El estudiantado ya había visto la relación entre funciones y ecuaciones en Octavo y en Noveno año, por lo que podría emplearse durante la intervención del docente.

Remplazando d por 50 metros y utilizando una calculadora científica o bien Microsoft Office Excel, se resuelve la ecuación $0,0048v^2 + 0,206v - 0,225 = 50$ para obtener las soluciones aproximadas $v = 83km/h$, $v = -126km/h$. En este caso, la solución es la positiva y por lo tanto la velocidad máxima a la que puede ir el vehículo para lograr detenerse al llegar al semáforo es de aproximadamente 83 km/h. Se debe aprovechar este recurso para reflexionar sobre el significado de $v = -126km/h$ en Física; no debe descartarse la solución únicamente por ser negativa, sino por su significado en el contexto.

Discusión interactiva y comunicación

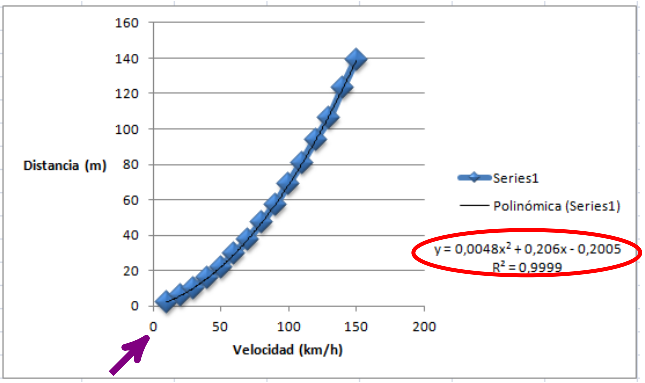
En esta etapa se espera que el estudiante comparta sus hallazgos con los demás miembros de la clase, por ejemplo que comunique las estrategias seguidas, incluso aquellas que no fueron exitosas, así como las respuestas encontradas. Nuevamente en este espacio se activan los procesos *Razonar y argumentar*, y *Comunicar*. Se espera también que los estudiantes debatan unos con otros sobre la veracidad de las respuestas halladas y las estrategias adoptadas, y que un representante de cada subgrupo comunique las ideas respecto a cada pregunta. Este proceso será dirigido por el docente, solicitando la respuesta a cada pregunta. Hay dos posibilidades: la primera analizar las preguntas de una en una o recolectar todas las respuestas y realizar un análisis al final de la plenaria. En ambos casos se debe formalizar algún concepto a raíz de las respuestas proporcionadas por el estudiantado.

Una vez que el estudiante comparta los hallazgos encontrados con los demás compañeros de clase, el docente puede mostrar otras posibles soluciones, si las existiera.

Clausura o cierre

El docente debe retomar las soluciones del estudiantado y señalar los conceptos que estaban implícitos en la solución del problema. A través de la tabla y la gráfica obtenida se pueden establecer conceptos relacionados con la función cuadrática.

Velocidad (Km/h)	Distancia (m)
10	2,44
20	5,88
30	10,24
40	15,61
50	22,01
60	29,34
70	37,71
80	47
90	57
100	69
110	81
120	94
130	106
140	123
150	139



Se puede indicar que es un ejemplo de una función cuadrática. La velocidad, en este caso, recibe el nombre de variable independiente y sus valores se llaman preimágenes. La distancia recibe el nombre de variable dependiente y sus valores son denominados imágenes. En el ejercicio se pueden reseñar otros conocimientos como: crecimiento, decrecimiento, mínimo, máximo, etc.

Resumen teórico

Una función cuadrática es aquella cuyo criterio es representado algebraicamente por:

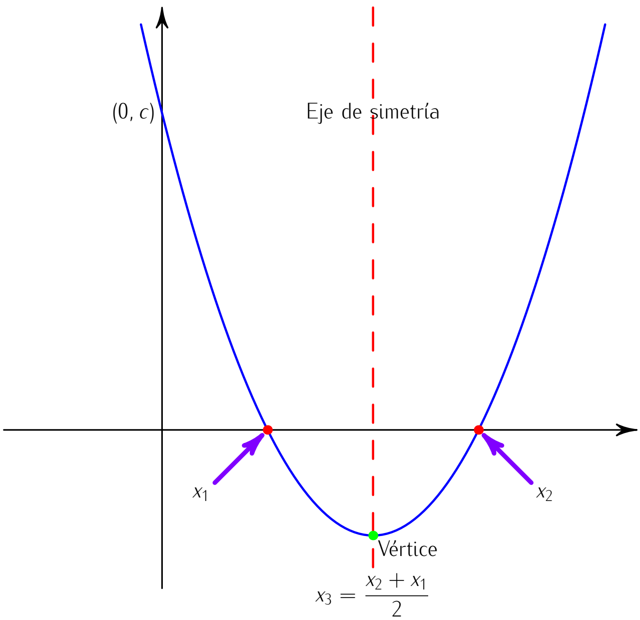
$$y = ax^2 + bx + c, \text{ o bien } f(x) = ax^2 + bx + c$$

a, b, c son números reales, con $a \neq 0$. En la representación anterior, la variable x, real, se denomina variable independiente, mientras que la variable y se conoce como variable dependiente.
En la representación anterior ax^2 es el término cuadrático, $bx + c$ es el término lineal, c es el término independiente.
La representación gráfica de una función cuadrática, cuando x asume todos los valores reales, es tal que el dominio es una parábola cóncava hacia arriba (cuando $a > 0$) o cóncava hacia abajo (cuando $a < 0$).

En las indicaciones puntuales (MEP, 2012, p.341 y 411), se menciona la importancia de analizar la influencia de los parámetros *a, b* y *c* en el tipo de gráfica; esto puede lograrse de distintas maneras:

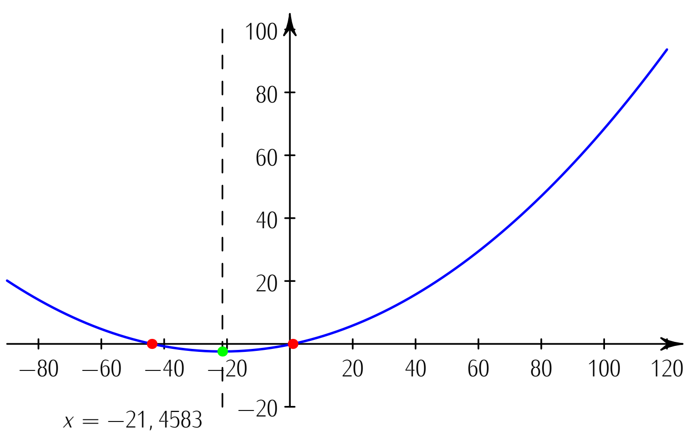
a) Empleando la técnica de completar cuadrados
b) Utilizando transformación en el plano: homotecias y traslaciones
c) Mediante actividad de laboratorio (uso de software) para llegar a concluir el comportamiento de los parámetros.

Conjuntamente, se pueden buscar los puntos de intersección de la parábola con el eje x, es decir, los valores de x para los cuales $y = ax^2 + bx + c = 0$ (también conocidos como raíces de la ecuación cuadrática), el eje de simetría, el vértice y algunos puntos de interés de la parábola.



En la representación gráfica anterior, las abscisas x_1 y x_2 de los puntos de intersección de la parábola con el eje x son las raíces de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, mientras que la recta vertical $x_3 = \frac{x_1+x_2}{2}$, destacada en rojo y que pasa por el vértice, es el eje de simetría de la parábola.

Se puede graficar la función cuadrática $f(x) = 0,0048x^2 + 0,206x - 0,2005$ encontrada en el problema con todos los elementos citados:



En este momento, se amplía la información al graficar la función mediante varios de sus puntos, entre ellos los de intersección con el eje x que corresponden a $(0,9521,\ 0)$ y $(-43,8688,\ 0)$. Igualmente, el vértice correspondiente a $(-21,4583,\ -2,4152)$, con eje de simetría en $x=-21,4583$.

Estos elementos de la gráfica permiten la discusión sobre por qué en el problema original sólo se representa una parte de ella, activando así el proceso *Razonar y argumentar*.

El docente puede aprovechar una actividad diseñada previamente en GeoGebra u otro software para que el estudiante represente esta función y experimente con otras funciones del mismo tipo, para que deduzca algunas de las propiedades de la función cuadrática.

Se sugiere mediante preguntas generadoras utilizar todo el material previamente trabajado para precisar otros elementos, por ejemplo señalando la intersección con el eje y. ¿Qué relación hay entre este punto y la ecuación representada? El docente puede incluir en el cierre las nociones implícitas en el problema, recurriendo a algún material como el siguiente:

1. Punto de intersección con el eje de las ordenas (eje y)
Es el punto de intersección de la gráfica de la función con criterio $f(x)=ax^2+bx+c$ con el eje y, es decir, el punto $(0,c)$.

2. Puntos de intersección con el eje de las abscisas (eje x)
Son los puntos por donde la gráfica de la función va a cortar el eje x. La gráfica de una función cuadrática puede cortar el eje x en dos puntos distintos, en un solo punto o en ningún punto. Para encontrar las raíces (abscisas de los puntos de intersección con el eje x) se debe utilizar la siguiente fórmula general:

$$\text{Si } f(x)=ax^2+bx+c, \text{ entonces } x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\ x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Se puede determinar previamente el número de cortes al eje x analizando el discriminante (Δ): Si $\Delta=b^2-4ac$, las opciones son:

- ✳ $\Delta=0$, existen dos soluciones reales idénticas, por tanto una única intersección con el eje x.
- ✳ $\Delta>0$, existen dos soluciones reales diferentes, por tanto dos intersecciones con el eje x.
- ✳ $\Delta<0$, no existen soluciones reales, por ende no hay intersecciones con el eje x.

Si la gráfica de la función interseca el eje x en dos puntos, estos corresponden a $(x_1,0)$ y $(x_2,0)$, donde x_1,x_2 con las raíces de la ecuación $ax^2+bx+c=0$.

En este momento se puede retomar la demostración propuesta para las soluciones de las ecuaciones cuadráticas y que se presenta a continuación:

Para la función con criterio $f(x) = ax^2+bx+c$ completamos cuadrados para obtener:

$$f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right] = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

que representa una parábola con vértice en el punto:

$$\left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right) = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{\Delta}{4a}\right)$$

Si la parábola interseca el eje de las abscisas en dos puntos, entonces la abscisa de su vértice coincide con el punto medio de las intersecciones con ese eje.

3. Concavidad

De acuerdo con el valor de a se puede establecer la concavidad de la parábola, si

$a > 0$, cóncava hacia arriba

$a < 0$, cóncava hacia abajo

4. Máximo o mínimo de la función (vértice):

Como todo punto en el plano, el vértice tiene un valor en el eje "x" y un valor en el eje "y". Para encontrar el valor en el eje x del vértice se usa la siguiente fórmula:

$$x = \frac{-b}{2a}$$

El resultado obtenido se reemplaza en la ecuación de la parábola para encontrar el valor en el eje y del vértice. Otra manera de obtener la ordenada puede ser a través de la siguiente fórmula:

$$y = \frac{-\Delta}{4a}$$

Finalmente, el vértice de una parábola puede expresarse como $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{\Delta}{4a}\right)$ y representa el punto máximo de la función cuadrática (si $a < 0$) o bien el punto mínimo (si $a > 0$).

5. Ámbito de la función

El ámbito o rango (recorrido) es el conjunto formado por todas las imágenes; es decir, es el conjunto conformado por todos los valores que puede tomar la variable dependiente. Estos valores están determinados además por el dominio de la función.

6. Eje de simetría

Es la recta vertical que pasa por el vértice de la parábola y viene dado por

$$x = \frac{-b}{2a}$$

Adaptado de http://www.scribd.com/doc/15863946/Funcion-cuadratica

Es fundamental destacar que en las indicaciones puntuales (MEP, 2012, p.411) se detallan otros elementos de las funciones cuadráticas que deben abordarse, entre ellos:

1. Intervalos de crecimiento o decrecimiento
2. Intervalos donde la función es positiva o negativa y su conexión con la solución de desigualdades cuadráticas
3. Intervalos máximos donde la función es inyectiva

Para esto puede aplicarse otro problema que permita fortalecer la habilidad de *Analizar gráfica y algebraicamente la función cuadrática con criterio*, respecto a los elementos anteriormente mencionados.

En este problema se potencian los siguientes procesos: *Razonar y argumentar, Plantear y resolver problemas, Comunicar, Conectar* y *Representar*.

Conjuntamente, hay que tomar en cuenta los ejes transversales del MEP: el respeto a las leyes de tránsito, la cortesía y la responsabilidad al manejar para mantener la paz en las carreteras, así como evitar la contaminación ambiental y sónica. También es inherente discutir y analizar lo que sucede con la distancia de reacción y de frenado en tiempos de lluvias.

II Etapa: Movilización y aplicación de los conocimientos

El problema propuesto puede catalogarse de acuerdo a su nivel de complejidad como de conexión, debido a que requiere relacionar conocimientos de *Relaciones y Álgebra* con *Geometría, Números, Estadística y Probabilidad* y otras áreas de conocimiento como la Educación Vial.

Asimismo, puede realizarse esta segunda etapa mediante ejercicios de reproducción y conexión que pretenden fortalecer las habilidades aprendidas en la resolución del problema.

Por ejemplo, pueden emplearse problemas de reproducción o conexión sobre aplicaciones de las funciones cuadráticas, como los siguientes:

- ✳ Un fabricante establece que el ingreso "I" obtenido por la producción y venta de "x" cantidad de artículos está dado por la función $I = 350x - 0,25x^2$.
  - Calcule el ingreso cuando se venden 100 artículos.
  - Si el ingreso obtenido es de ₡ 120 000, determine la cantidad de artículos vendidos.
  - ¿Cuál es la cantidad de artículos vendidos para recibir el ingreso máximo?
  - ¿Qué sucede si se supera esa cantidad de artículos vendidos?
- ✳ Un objeto es lanzado verticalmente hacia arriba logrando una altura dada en metros de acuerdo con la función $h(t) = 18t - 3t^2$, con t en segundos.
  - ¿Cuánto tiempo tarda en alcanzar la altura máxima?
  - ¿Cuál es la altura máxima?
  - ¿Cuánto tiempo aproximadamente transcurre en el descenso desde el punto máximo hasta que el objeto toca el piso?

✳ La ingeniería ha edificado obras maravillosas para mejorar la calidad de vida de las personas; un ejemplo de ello son los puentes colgantes que unen pueblos y ciudades. En Costa Rica tenemos el puente *La Amistad de Taiwán* ubicado sobre el río Tempisque en la provincia de Guanacaste, cuya longitud es de 900 m en total. Pero existen otros de mayor longitud como el Golden Gate ubicado en California, Estados Unidos, con una longitud de 1280 m entre sus torres. Hay una sustancial diferencia entre ellos, en el Golden Gate los cables que lo soportan forman una parábola.

Puente de la Amistad de Taiwán en Guanacaste. Imagen libre de Wikipedia

Puente Golden Gate en California. Imagen cortesía de FreeDigitalphotos.net

El puente Golden Gate posee torres de 227,38 m de altura, separadas por una distancia de 1280 m. El puente está suspendido de dos enormes cables que miden 0,91 m de diámetro, el ancho de la calzada es de 27,43 m y ésta se encuentra aproximadamente a 67 m del nivel del agua. Como se indicó previamente, los cables constituyen una parábola y tocan la calzada o tablero en el centro del puente. Determine la altura de los cables a una distancia de 304,8 m del centro del puente.

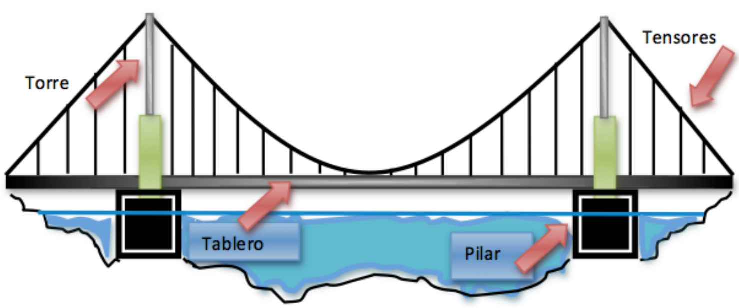


Imagen: Elaboración propia

Nota: El docente se puede apoyar en la tecnología, recurriendo por ejemplo a una hoja de cálculo. Se determinan tres puntos: los extremos de las torres y el punto mínimo (centro del puente); con la línea de tendencia o mejor ajuste se adquiere el criterio de la parábola. Este dato se compara con el obtenido mediante otras estrategias.

A continuación se proporcionan algunos problemas abstractos de reproducción:

* Se sabe que la función cuadrática de ecuación $f(x) = ax^2 + bx + c$ pasa por los puntos $(1, 1)$, $(0, 0)$ y $(-1, 1)$. Calcule a, b y c.
* Una parábola tiene su vértice en el punto $(1, 1)$ y pasa por el punto $(0, 2)$. Halle su ecuación.

Contextualización activa

En los fundamentos de los nuevos programas se indica que un elemento medular de la contextualización activa es la modelización; este problema es un ejemplo de cómo plantear una situación que requiera de un modelo y que a su vez tiene relación con situaciones de la cotidianidad.

Se puede iniciar la clase con algún editorial o noticia que tenga relación con el problema, por ejemplo: sobre la nueva ley de tránsito o un accidente por exceso de velocidad, puede ser de un periódico físico o digital. De este modo se fortalece la contextualización del objeto matemático que posteriormente se trabajará.

Por ejemplo:

Accidente en carretera a Limón.
Dos personas pierden la vida al chocar contra bus.

Tránsito dice que falso adelantamiento es la causa probable del fatal percance. En el autobús viajaban 52 pasajeros; 5 fueron atendidos por crisis nerviosa.

Ferlin Fuentes A. y Katherine Chaves R. ferlin.fuentes@nacion.com 12:00 a.m.20/08/2012

La carretera que recorre el Parque Nacional Braulio Carrillo volvió a ser testigo de un accidente mortal.

Una pareja falleció ayer luego de que el Toyota Yaris en que viajaban colisionara de frente contra un autobús con 52 pasajeros. El percance ocurrió a las 4:22 p. m., 10 kilómetros antes del puente sobre el río Sucio.

Cáceres puntualizó que el accidente ocurrió en una zona de la carretera donde no se permite adelantar, pues está demarcada con una línea amarilla doble.

Identidades. La Fuerza Pública confirmó que las víctimas son un hombre y una mujer, pero no trascendieron sus identidades.

La Policía de Tránsito facilitó varios datos a los agentes del Organismo de Investigación Judicial (OIJ) que iniciaron la investigación. ***Uno de ellos es que el carro quedó a 4,40 metros del sitio donde colisionó con el autobús. "Con todos estos datos es posible determinar la velocidad en la que venía el automóvil, pero, de momento, son datos preliminares.*** Ya quedará a cargo de los agentes judiciales determinarlo en un estudio posterior", dijo Cáceres. En el lugar, los agentes del OIJ recolectaron datos sobre las marcas de frenado que dejó el bus sobre la calzada e inspeccionaron el automóvil accidentado.

El aparatoso accidente fue atendido por cruzrojistas de Santo Domingo y San Isidro de Heredia, así como unidades de bomberos de Tibás y San José. Rigoberto Rodríguez, paramédico de la Cruz Roja en San Isidro de Heredia, dijo que las personas perdieron la vida dentro del vehículo. "Cuando llegamos al sitio, ya las personas se encontraban fallecidas dentro del vehículo. También fue necesario atender a cerca de cinco pasajeros del autobús, principalmente por crisis nerviosas", explicó Rodríguez. El levantamiento de los cuerpos se realizó a las 8:15 p. m. Fueron trasladados a la Medicatura Forense, en San Joaquín de Flores.

Tomado de http://www.nacion.com/2012-08-20/Sucesos/Dos-personas-pierden-la-vida-al-chocar-contra-bus.aspx

Al finalizar la lectura, el docente debe enfatizar del texto anterior las siguientes líneas: *Uno de ellos (de los datos) es que el carro quedó a 4,40 metros del sitio donde colisionó con el autobús. "Con todos estos datos es posible determinar la velocidad en la que venía el automóvil, pero, de momento, son datos preliminares"*, porque evidencian como en la realidad las Matemáticas y la modelización se encuentran con mucha frecuencia en la vida cotidiana.

Para finalizar este apartado, es elemental recordar que según los nuevos programas:

> Debe destacarse que no se trata de que todos los problemas de aula sean de modelización, pero que estos sean una parte importante de la acción educativa. Además, resolver problemas en contextos reales ofrece significados, sentido de utilidad y medios diversos para poner en juego las capacidades y habilidades matemáticas, y permite andamios para la construcción de los aprendizajes desde lo concreto hacia lo abstracto" (MEP, 2012, p.51).

Uso de tecnología

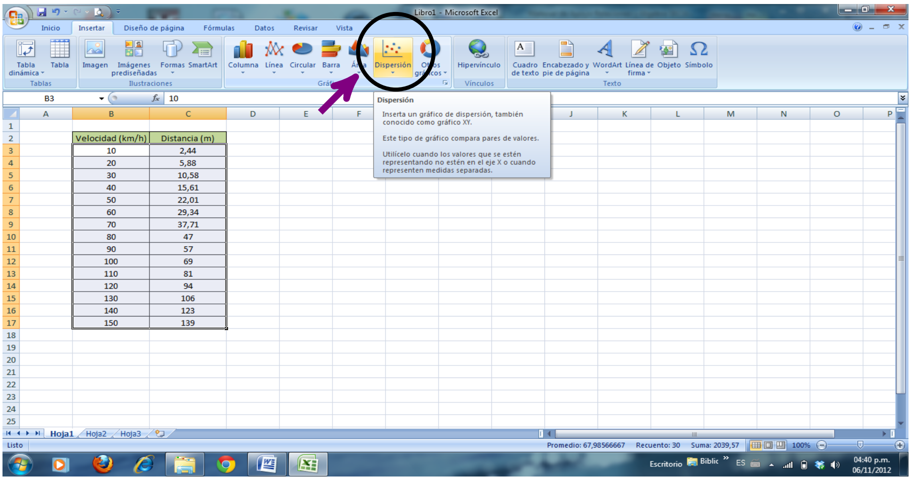
Como se mencionó previamente, el uso de Microsoft Office Excel puede ser una herramienta muy valiosa para potenciar las habilidades pretendidas con este problema. En las indicaciones puntuales de esta habilidad (MEP, 2012, p.449) se señala que:

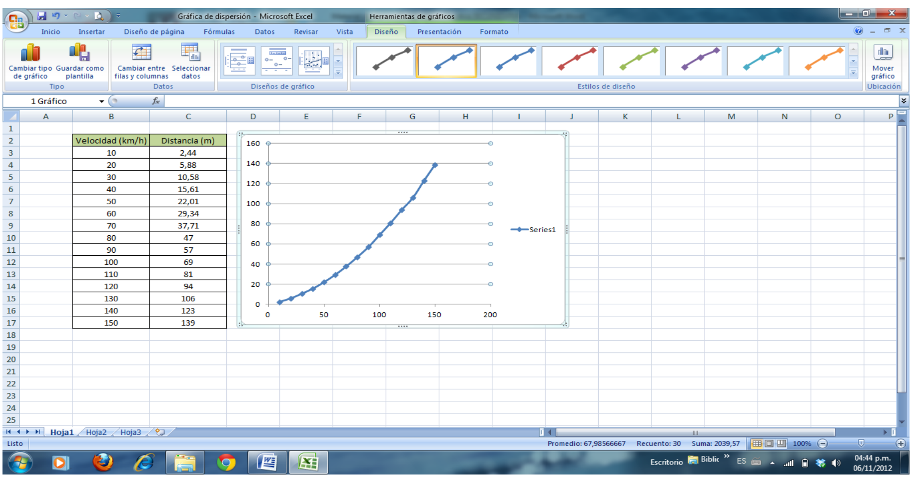
> Es recomendable usar software matemático para facilitar la observación de las características descritas para $y = ax^2 + bx + c$ y para aproximar soluciones de ecuaciones de segundo grado.

Microsoft Office Excel permite encontrar la *línea de tendencia* para los puntos correspondientes a los datos de la tabla. Esta *línea de tendencia* es una curva de regresión o curva de mejor ajuste a los datos. Se puede escoger cualquiera de las siguientes curvas: regresión lineal, polinomial (seleccionando el grado del polinomio), logarítmica, potencial y exponencial.

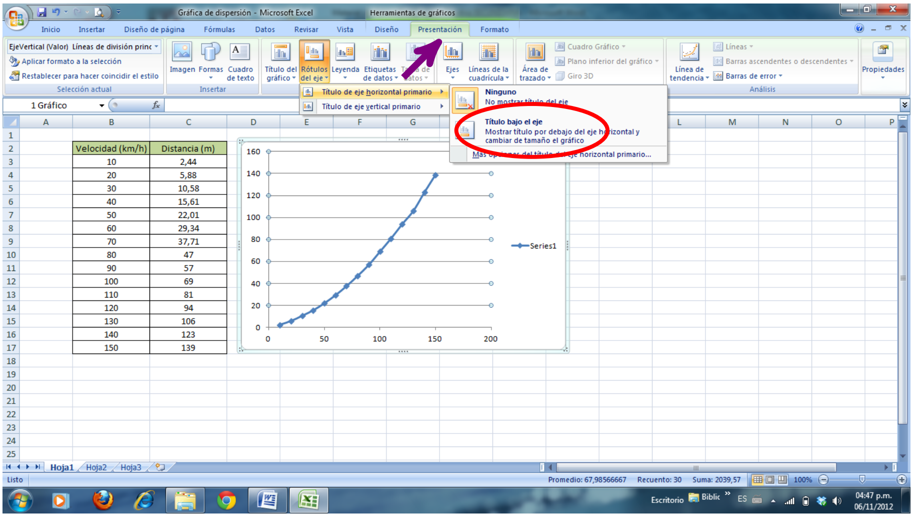
A continuación se detallan los pasos a seguir para poder realizar la representación de los puntos y una ecuación de segundo grado que se ajuste a los datos:

- ✳ Digitamos la tabla en Excel.
- ✳ Seleccionamos las dos columnas.
- ✳ Insertamos una gráfica tipo dispersión.

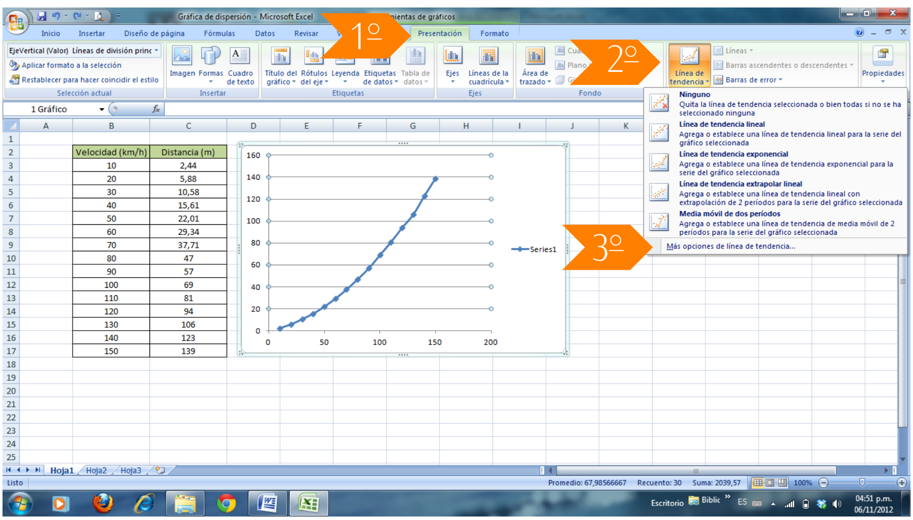




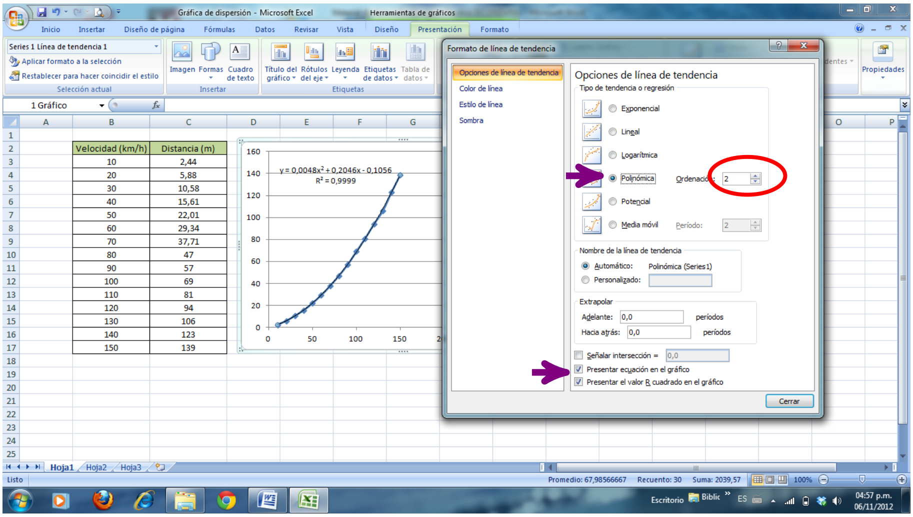
- ✳ Se pueden agregar los títulos e información de los ejes en *Presentación*.



- ✳ Seleccionamos el gráfico construido por Excel.
- ✳ Escogemos la opción *presentación, línea de tendencia, más opciones de línea de tendencia.*

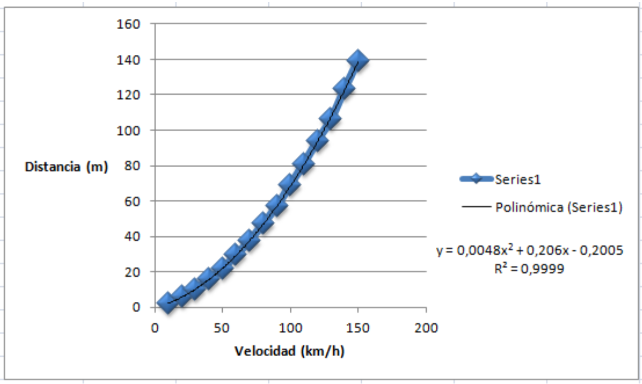


- ✳ En este caso escogemos un polinomio de orden 2 y marcamos las opciones: presentar ecuación y el valor de R^2.



Finalmente, el resultado es el siguiente, donde aparecen los datos y la representación gráfica, así como una ecuación de segundo grado que hace una aproximación y modela la situación planteada.

Velocidad (Km/h)	Distancia (m)
10	2,44
20	5,88
30	10,24
40	15,61
50	22,01
60	29,34
70	37,71
80	47
90	57
100	69
110	81
120	94
130	106
140	123
150	139



La representación algebraica para el modelo polinomial de segundo grado que se ajusta muy bien a los datos de la tabla es $d(v) = 0,0048v^2 + 0,206v - 0,2005$, con un coeficiente de determinación $R^2 = 0,9999$, indicando que el modelo proporciona una buena predicción para la variable dependiente (distancia) como función de la variable independiente (velocidad).

Es esencial que los docentes tomen en cuenta la siguiente información: en las gráficas generadas por Excel, aparece la ecuación del modelo y un número etiquetado con R^2. Este número se conoce como *coeficiente de determinación*, que mide la "bondad del ajuste efectuado". La "bondad de predicción o de ajuste" depende de la relación entre las variables. Si dos variables no covarían, no se pueden hacer predicciones válidas. La medida de la capacidad del modelo de regresión para obtener buenas predicciones es el cuadrado del coeficiente de correlación de Pearson, e indica la proporción de variación de la variable dependiente ***y*** que es explicada por la variable independiente ***x*** (variable predictora o explicativa).

El coeficiente de determinación varía de 0 a 1. Un valor cero indica que la variable predictora tiene capacidad nula para explicar o predecir la variable ***y***. Cuánto más cercano a 1 sea R^2, mejor será la predicción.

Uso de la historia de las Matemáticas

Con el objetivo de humanizar las Matemáticas se puede presentar una breve reseña del estudio que realizaron los babilonios sobre las ecuaciones cuadráticas o un video que muestre su evolución a través de los siglos. En la introducción del tema estos recursos pueden ofrecer elementos de motivación a la clase, debido a que revelan el rostro humano del conocimiento a estudiar.

Los babilonios

Las ecuaciones cuadráticas ya habían sido tratadas por los babilonios en la antigüedad. Existe más de medio millón de tablillas cuneiformes que todavía están siendo descifradas e interpretadas, abarcando un período que va desde el año 2100 a. C. hasta el año 300 a. C.; de ellas unas 400 se relacionan con las Matemáticas. Las tablillas de interés matemático abarcan temas que incluyen fracciones, contratos, préstamos, interés simple y compuesto, ecuaciones cuadráticas y cúbicas y el teorema de Pitágoras.

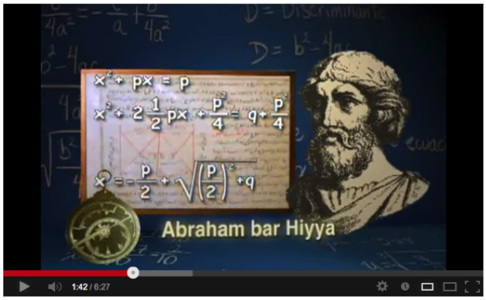
Los babilonios utilizaban un sistema numérico sexagesimal (base 60) y la notación posicional. Los problemas algebraicos eran planteados y resueltos verbalmente (lenguaje coloquial).

Tablilla YBC 7289
La diagonal contiene una aproximación para $\sqrt{2}$ en base 60
http://www.math.ubc.ca/ cass/ Euclid/ybc/ybc.html

Tablilla Plimpton 322.
Columnas con ternas pitagóricas
http://en.wikipedia.org/wiki/Plimpton_322

Muchas de las tablillas babilónicas contienen problemas que se reducen a una ecuación cuadrática. La forma estándar de algunos de los problemas: $x + y = a$, $xy = b$, que es equivalente a una ecuación cuadrática en la variable x (o en la variable y), sugiere que ellos estaban tratando con la relación entre el área y el perímetro de un rectángulo.

Se puede proyectar un video que narre el trabajo sobre las ecuaciones en diferentes épocas de la humanidad y con diferentes personajes; esa información se puede encontrar en el siguiente enlace: http://www.youtube.com/watch?v=6AOaT2DOoHg.



Actitudes y creencias

El docente puede disponer del problema de la velocidad-frenado para exponer las habilidades matemáticas que poseen los estudiantes y que les han permitido modelar una situación de la vida real. La elaboración del modelo requiere de un trabajo en equipo y de un nivel cognitivo superior, con este problema se pueden favorecer todas las actitudes que el programa promueve:

Perseverancia cuando se requiere tiempo para resolver las seis preguntas formuladas, *Confianza en la utilidad de las Matemáticas* debido a que modeliza una situación real como la relación de la velocidad y distancia recorrida al momento de frenado, *Participación activa y colaborativa* porque se propone el trabajo en grupo, *Autoestima en relación con el dominio de las Matemáticas* al utilizar conocimientos previos en la solución del problema, y finalmente al hallar la solución se evidencia una construcción intelectual propia de los estudiantes fomentando el *Respeto, aprecio y disfrute de las Matemáticas*.

Sugerencias de evaluación

Al considerar la evaluación de los aprendizajes debe tomarse en cuenta que la resolución de problemas tiene dos enfoques: uno como estrategia pedagógica y otro como estrategia de evaluación. Al utilizarse como esta última no se deben incluir ideas matemáticas con las cuales el estudiantado no haya tenido contacto previamente, pero el problema debe ser una tarea matemática que exige al sujeto usar la información que posee de una manera novedosa. Se debe recordar que el objetivo de la evaluación es cuantificar el dominio de una o más habilidades que se hayan adquirido.

A continuación se presentan dos tipos de ítems: de selección única y de resolución de problemas. Estos ejercicios de selección única se proponen para ser abordados sin el uso de la calculadora, con el objetivo de promover el análisis, lo que deberá ser valorado por el docente. Se ofrecen dos problemas abstractos y dos contextualizados.

✳ Se sabe que la función cuadrática de ecuación $y = ax^2 + bx + c$ pasa por los puntos (1,1), (0, 0) y (-1,1). ¿Cuál es el criterio de la función resultante de sumar uno a la ecuación que satisface los puntos anteriores?

a) $x^2 - 1$
b) x^2
c) $x^2 + 1$
d) $x^2 + 2$

✳ Se sabe que la función cuadrática de ecuación pasa por los puntos (-3,0) y (2, 0). Al determinar un criterio de la función la respuesta corresponde a

a) $f(x) = x^2 - x - 6$
b) $f(x) = x^2 + x + 6$
c) $f(x) = x^2 - x + 6$
d) $f(x) = x^2 + x - 6$

Es pertinente indicar que el estudiante ya ha enfrentado situaciones como éstas, sin embargo, hay una necesidad de emplear el conocimiento de manera novedosa debido a la variación del problema en los que se solicita.

✳ Un fabricante estipula que el ingreso "I" obtenido al vender su producto es de ₡ 122 500. Determine cuál modelo genera esa ganancia al vender 700 unidades, denominadas x. La respuesta corresponde a:

a) $I(x) = 350x^2 - 1$
b) $I(x) = 350x + 250$
c) $I(x) = 350x - 0,25x^2$
d) $I(x) = 350x + 0,25x^2$

El siguiente problema puede aplicarse para el apartado de desarrollo en una prueba:

✳ Un objeto es lanzado verticalmente hacia arriba desde el piso, logra una altura en metros de acuerdo con la función $h(t) = 5t - 0,9t^2$ (t representa el tiempo en segundos).

I Parte

Recuerde que el objeto es lanzado desde el suelo.

- ¿Cuánto tiempo transcurre hasta que el objeto toca el suelo?
- ¿Qué altura tiene el objeto a los 4,15 s de haberse lanzado?
- Haga la representación gráfica del problema.

II Parte

Suponga que el objeto es lanzado por una persona cuya altura es de 1,62 m.

- ¿Cuál será la altura máxima alcanzada?
- ¿De cuánto es la diferencia entre la altura máxima alcanzada en la primera parte y la segunda? Justifique por qué se obtiene ese resultado.
- ¿Cuánto tiempo aproximadamente transcurre en el descenso desde el punto máximo hasta que el objeto toca el piso?
- Haga la representación gráfica del problema.

Undécimo año

Conocimientos	Habilidades específicas	Habilidades previas
Funciones y modelización	✳ Utilizar las funciones estudiadas para plantear y resolver problemas a partir de una situación dada. ✳ Analizar el tipo de función que sirva de modelo[5] para una situación dada.	Geometría, Undécimo año ✳ Analizar gráfica, tabular y algebraicamente las funciones exponenciales. ✳ Plantear y resolver problemas en contextos reales utilizando ecuaciones exponenciales. ✳ Identificar y aplicar modelos matemáticos que involucran las funciones exponenciales. ✳ Resolver problemas en contextos reales utilizando ecuaciones logarítmicas. ✳ Utilizar logaritmos para resolver ecuaciones exponenciales de la forma $a^{f(x)} = b^{g(x)}$, a, b números reales positivos y distintos de 1; f, g polinomios de grado menor que 3. ✳ Identificar y aplicar modelos matemáticos que involucran las funciones logarítmicas.

Propuesta de problema

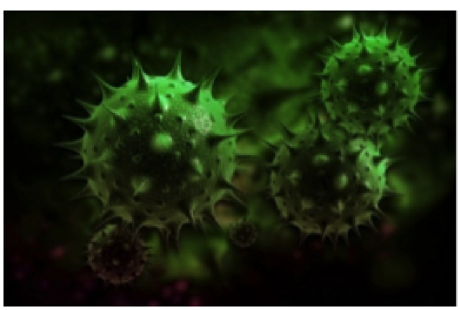
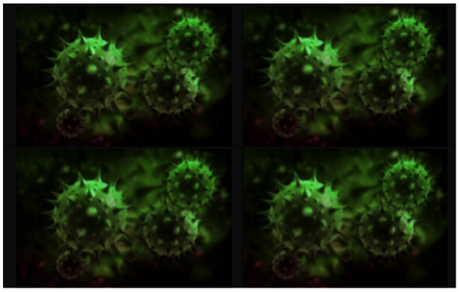


Imagen cortesía de FreeDigitalphotos.net

Una población de bacterias comenzó con 100 bacterias y se duplica cada cuatro horas.

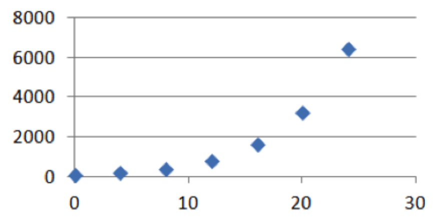


Determine el modelo que describe el crecimiento de las bacterias y calcule en cuánto tiempo el número de bacterias será de 30 000.

Solución del problema

Primero se puede explorar intuitivamente la relación de la cantidad de bacterias con respecto al tiempo en horas, por medio de una tabla y una gráfica de los puntos obtenidos.

Tiempo	Cantidad de bacterias
0	100
4	200
8	400
12	800
16	1 600
20	3 200
24	6 400



A partir de aquí se espera que los estudiantes realicen una descomposición de los datos para poder determinar el modelo que describe la situación:

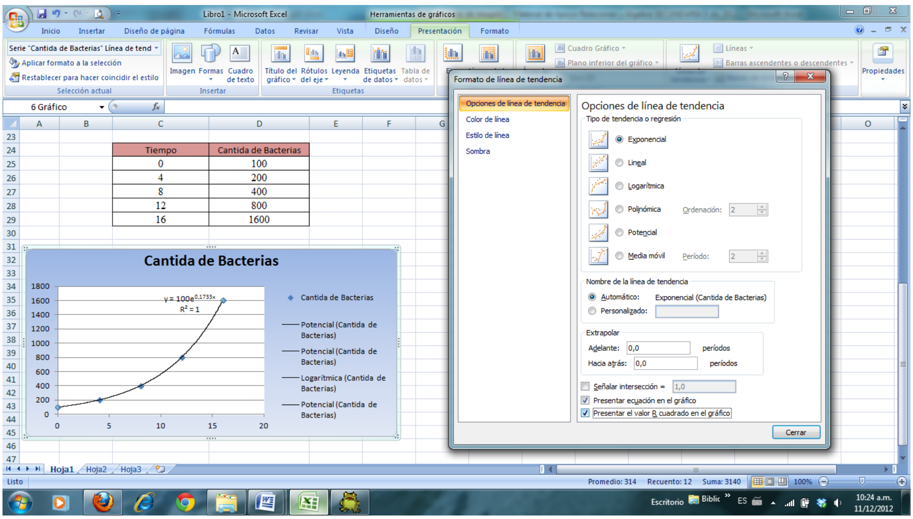
Tiempo	Cantidad de bacterias	Observando los datos	Usando potencias	Escribiendo los datos en relación con el tiempo	Conclusión
0	100	100 x 1	100 x 2^0	....	A partir de aquí puede observarse el comportamiento de los datos y puede generalizarse: $N(t) = 100 \times 2^{t/4}$
4	200	100 x 2	100 x 2^1	100 x $2^{4/4}$	
8	400	100 x 4	100 x 2^2	100 x $2^{8/4}$	
12	800	100 x 8	100 x 2^3	100 x $2^{12/4}$	
16	1600	100 x 16	100 x 2^4	100 x $2^{16/4}$	
....	....	....	....	....	

Luego de visualizar este comportamiento creciente se puede pensar en el siguiente modelo exponencial $N(t) = 100 \times 2^{t/4}$ para determinar la cantidad de bacterias después de t horas.

Tenemos que el número de bacterias es $N(t) = 30000 = 100 \times 2^{t/4}$, despejando t obtenemos:

$$300 = 2^{t/4} \Rightarrow \log_2 300 = \frac{t}{4} \Rightarrow 4\log_2 300 = t \approx 32,92 \text{ horas}$$


Para fortalecer las habilidades desarrolladas con este problema se puede hacer uso de la tecnología, empleando Microsoft Office Excel mediante los conocimientos adquiridos sobre la herramienta.



Al obtener la ecuación se puede verificar que los resultados hallados gracias a la deducción de la fórmula coinciden con la fórmula expuesta por Excel. En la opción de *Línea de tendencia* para este caso se elige Exponencial y se indica la presencia de la ecuación.

Estadística y Probabilidad

Imagen cortesía de renjith krishnan y jscreationzs en FreeDigitalPhotos.net

Décimo año. Probabilidad

Conocimientos	Habilidades específicas	Habilidades previas
Probabilidad * Reglas básicas de las probabilidades * Otras propiedades de las probabilidades: probabilidad de la unión, probabilidad del complemento	* Aplicar los axiomas y propiedades básicas de probabilidades en la resolución de problemas e interpretar los resultados generados. * Utilizar las probabilidades para favorecer la toma de decisiones en problemas vinculados con fenómenos aleatorios.	**Estadística y Probabilidad, Décimo año.** * Determinar eventos y sus resultados a favor dentro de una situación aleatoria. * Diferenciar entre eventos más probables, menos probables e igualmente probables, de acuerdo con los puntos muestrales a favor de cada evento. * Determinar la probabilidad de un evento como la razón entre el número de resultados favorables entre el número total de resultados.

Propuesta de problema para Probabilidad

Dentro de los aspectos que se deben tomar en cuenta, está el uso adecuado de las probabilidades: es fundamental que los estudiantes analicen las situaciones en las que intervienen probabilidades y no se dejen engañar por trucos numéricos.

El siguiente problema ha sido adaptado de un ejemplo que se publica en el texto "Godino, J. y Batanero, C. *Estocástica y su didáctica para maestros*. Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada, recuperado de http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/

Suponga que se desarrolla un juego de dados con las siguientes reglas:

- Se lanzan dos dados sucesivamente y se calcula la diferencia de puntos entre el mayor y el menor.
- Si el resultado de la diferencia es 0, 1 o 2 puntos entonces gana uno de los jugadores y se le entrega una ficha.
- Si el resultado de la diferencia es 3, 4, o 5 el otro jugador gana una ficha.
- Comienzan con un total de 10 fichas cada uno y el juego termina cuando uno de ellos se queda sin fichas.

a) ¿Es este juego equitativo para ambos jugadores? Justifique su respuesta.

b) Si usted tuviera que jugar, ¿cuál jugador preferiría ser?

c) ¿Cuántas fichas debería ganar cada jugador para que el juego sea equitativo sin cambiar el resto de las reglas?

Solución del problema

a) En el análisis del problema, los estudiantes primeramente deben observar todos los puntos del espacio muestral, correspondientes a los posibles resultados que se obtienen al lanzar dos dados con números de uno a seis. Estos resultados se simbolizan como pares ordenados donde el primer elemento representa el resultado del primer dado y el segundo elemento el del segundo dado. Los puntos muestrales al lanzar dos dados se pueden representar en el siguiente cuadro.

Resultados posibles al lanzar dos dados

	Segundo dado					
Primer dado	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Debido a que el juego consiste en restar los valores obtenidos en cada dado se deben determinar todas las posibles diferencias. El cuadro siguiente expresa las diferencias absolutas entre los resultados de los dados.

Diferencia absoluta entre los posibles resultados al lanzar dos dados

	Segundo dado					
Primer dado	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	2	0	1
6	5	4	3	1	1	0

La cantidad de casos favorables al primer jugador (resultados 0, 1 o 2) es 24, por lo que la probabilidad de que este jugador gane es de $\frac{24}{36} = \frac{2}{3}$. Mientras tanto, la cantidad de casos favorables para el segundo jugador es 12 y la probabilidad correspondiente es $\frac{12}{36} = \frac{1}{3}$. De acuerdo con los resultados, se esperaría que por cada dos juegos que gane el primer jugador el segundo ganaría uno. Por lo tanto el juego no es equitativo.

b) De acuerdo con lo anterior, el primer jugador tiene el doble de probabilidad de ganar.

c) Debido a que el jugador al que se le asigna una diferencia de 0, 1 o 2 tiene el doble de probabilidad que el otro jugador, entonces se debería compensar esta diferencia. Esto quiere decir que cada vez que gane el primer jugador se le deberá dar una ficha, mientras que si gana el segundo jugador se le deben otorgar dos fichas. Así la ganancia esperada sería la misma para cada uno de ellos.

En el cierre se pueden concretar las reglas básicas de las probabilidades y otras propiedades de las probabilidades como la probabilidad de la unión, que se emplea en la solución del problema, y la probabilidad del complemento.

Décimo año. Estadística

Conocimientos	**Habilidades específicas**	**Habilidades previas**
Estadística Media aritmética ponderada	✳ Utilizar la media aritmética ponderada para determinar el promedio cuando los datos se encuentran agrupados en una distribución de frecuencias.	**Estadística y Probabilidad, Décimo año.** ✳ Resumir un grupo de datos mediante el uso de la media aritmética.

Propuesta de problema para Estadística

No siempre los datos están a disposición, esto ocurre sobre todo cuando la información ha sido recolectada por otras personas. El siguiente problema puede sugerirse para que sea resuelto individualmente.

Suponga que una compañía de hardware para computadoras está promoviendo un concurso para ascender a un agente de ventas al puesto de administrador de una de sus sucursales. Para tal efecto, el Gerente General decidió aplicar una prueba de conocimientos básicos sobre administración a todos sus agentes vendedores y seleccionar en una primera etapa a aquellos que obtengan calificaciones más altas que el puntaje promedio. La prueba tuvo un valor total de 120 puntos y los datos obtenidos en la prueba se resumen en la siguiente tabla:

Puntajes	Frecuencia
De 60 a menos de 70	2
De 70 a menos de 80	6
De 80 a menos de 90	8
De 90 a menos de 100	11
De 100 a menos de 110	9
De 110 a 120	7

Desafortunadamente, una vez que le entregaron los puntajes a cada agente y construyeron la distribución de frecuencias, perdieron las notas individuales y solamente les quedó esta distribución.

Aunque pueden recuperar la información pidiendo a los agentes que devuelvan la carta en la que les entregaron la calificación de la prueba deciden trabajar con la información que poseen.

Con esta información determine el puntaje promedio de la prueba e indique cuántos agentes vendedores (aproximadamente) quedaron seleccionados en la primera etapa.

Solución del problema

Cada subgrupo enfrenta la dificultad de que los datos se encuentran agrupados en una distribución de frecuencias, por lo que no se conocen los valores particulares. Para calcular el puntaje promedio se requiere para cada intervalo encontrar un valor que represente los demás valores de ese intervalo.

Se acostumbra representar cada intervalo con su punto medio. No obstante, para establecer el promedio se debe considerar que cada punto medio debe ponderarse con la frecuencia correspondiente, de este modo el puntaje promedio ponderado se determina por:

Puntajes	Frecuencia	Punto medio	Punto medio por Frecuencia
De 60 a menos de 70	2	65	130
De 70 a menos de 80	6	75	450
De 80 a menos de 90	8	85	680
De 90 a menos de 100	11	95	1045
De 100 a menos de 110	9	105	945
De 110 a 120	7	115	805
Total	**43**		**4 055**

Con lo cual

$$\text{Puntaje promedio ponderado } = \frac{4055}{43} = 90,3$$

Entonces, el puntaje promedio es de 90,3 por lo que únicamente los agentes que obtuvieron notas superiores a 90,3 estarán siendo seleccionados para la primera etapa. Por ello, aproximadamente 27 agentes fueron seleccionados. Deberán comunicar que la nota mínima para continuar con el proceso de selección es de 90,3 y que todos los agentes que cumplan con este requisito se presenten con la carta donde se les entregó su calificación para continuar con el proceso.

En la etapa de cierre se debe resaltar la relevancia del uso del promedio ponderado, para determinar la media aritmética en aquellos casos en que los datos tienen diferentes ponderaciones.

En este problema se puede promover el uso de tecnologías digitales como la calculadora o computadora. La calculadora puede ser empleada para simplificar los cálculos y concentrar los esfuerzos en la interpretación de los resultados obtenidos y para especificar la nota mínima con tal de continuar con el proceso de selección. Una hoja de cálculo también ayudaría a simplificar los cálculos aritméticos.

Undécimo año. Probabilidad

Conocimientos	Habilidades específicas	Habilidades previas
Posición relativa: estandarización	✳ Aplicar estandarización para comparar la posición y variabilidad de dos o más grupos de datos.	✳ Resolver problemas del contexto estudiantil que involucren el análisis de las medidas de posición y de variabilidad.

Propuesta de problema para Probabilidad

Generalmente se tiende a establecer comparaciones por medio del promedio, pero algunas veces dichas comparaciones, desde un punto de vista relativo, no se ajustan a la realidad principalmente porque el promedio es afectado por los datos extremos. El siguiente problema es un ejemplo que refleja estos casos:

Juan y Miguel quieren saber cuál de los dos obtuvo un mejor rendimiento en el examen de admisión a una universidad. Juan realizó el examen en el 2009 y obtuvo una calificación de 660, mientras que Miguel obtuvo 645 en el 2011, ambos en una escala de 800 puntos. Juan indica que no hay nada que discutir pues su calificación es más alta.

Pero Miguel le indica que aunque eso es cierto, en el 2009 la calificación media o promedio fue de 630 con una desviación estándar de 30 puntos, mientras que en el 2011 la calificación promedio fue de 610 con una desviación estándar de 25 puntos. Por ello Miguel dice que fue él quien obtuvo un mejor rendimiento.

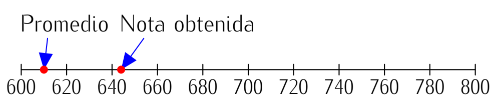
Con base en esta información, ¿quién cree que tiene la razón? ¿Por qué?

Solución del problema

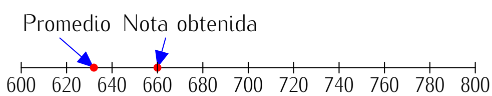
Se espera que cada estudiante sea capaz de aprovechar las diferentes medidas estadísticas para realizar un análisis de datos coherente con la naturaleza del problema.

Cada subgrupo debe visualizar la situación, preferiblemente por medio de diagramas o gráficos. El siguiente esquema representa la situación de cada uno de los jóvenes:

Calificación obtenida por Miguel (2011)



Calificación obtenida por Juan (2009)



Si bien desde el punto de vista de la posición de las calificaciones la nota de Juan es mucho mayor, se debe tener presente que la calificación promedio en el 2011 fue mucho menor que en el 2009. Por esta razón, se debe tener mucho cuidado de llegar a conclusiones apresuradas.

La diferencia entre la nota obtenida respecto al promedio en ambos casos es positiva, este valor es de 35 para Miguel y de 30 para Juan, por lo que podrían pensar que Miguel obtuvo una mejor calificación, pues su diferencia o desviación respecto al promedio es superior. Para concluir el análisis se requiere tomar en cuenta la variabilidad en cada caso. Entonces, en términos relativos se tiene el siguiente análisis:

$$\begin{aligned} \text{Valor relativo de la nota de Miguel } &= \frac{645-610}{25} = 1,4 \\ \text{Valor relativo de la nota de Juan } &= \frac{660-630}{30} = 1 \end{aligned}$$

En términos relativos la calificación obtenida por Miguel es más alta que la nota obtenida por Juan, entonces Miguel tiene razón en su apreciación.

En la clausura se debe enfatizar que la estandarización o tipificación se utiliza para comparar datos aislados entre diferentes conjuntos. Al estandarizar las notas de Juan y Miguel lo que se hizo fue relativizar el valor de cada nota de modo que se pueda realizar la comparación correspondiente. La estandarización o tipificación para un dato se determina por la siguiente fórmula:

$$\text{estandarización} = \frac{\text{dato} - \text{promedio}}{\text{desv est}}$$

En el problema anterior se recomienda el uso de la calculadora para simplificar los cálculos matemáticos y concentrar su esfuerzo en la interpretación de los resultados obtenidos.

Durante la resolución del problema anterior puede promoverse la confianza en la utilidad de las Matemáticas, pues el estudiantado puede apreciar cómo se utiliza la Estadística para resolver un problema sobre la comparación de dos notas de dos asignaturas diferentes.

Undécimo año. Estadística. Problema principal

Conocimientos	Habilidades específicas	Habilidades previas
Análisis de datos	✳ Resolver problemas del contexto estudiantil que involucren el análisis de las medidas de posición y las medidas de variabilidad: recorrido, recorrido intercuartílico para la toma de decisiones acertadas. ✳ Resumir la variabilidad de un grupo de datos mediante la desviación estándar e interpretar la información que proporcionan.	✳ Identificar la importancia de la variabilidad para el análisis de datos. ✳ Reconocer la importancia de la variabilidad de los datos dentro de los análisis estadísticos y la necesidad de cuantificarla. ✳ Resumir un grupo de datos mediante el uso de la moda, la media aritmética, la mediana, los cuartiles, el máximo y el mínimo, e interpretar la información que proporcionan dichas medidas. ✳ Resumir la variabilidad de un grupo de datos mediante el uso del recorrido y el recorrido intercuartílico e interpretar la información que proporcionan. ✳ Utilizar diagramas de cajas para comparar la posición y la variabilidad de dos grupos de datos. ✳ Utilizar la calculadora o la computadora para simplificar los cálculos matemáticos en la determinación de las medidas de variabilidad.

Etapas de organización de la lección

I Etapa: El aprendizaje del conocimiento

Propuesta de problema

Para este problema se recomienda organizar la clase en subgrupos de tres alumnos.

Este año Pedro se graduó de la Universidad y está listo para trabajar. Para el próximo año tiene tres ofertas de trabajo en tres ciudades distintas con el mismo sueldo. Sin embargo, padece de algunos problemas de salud y le afectan los cambios de temperatura, por lo que debe escoger una ciudad en la cual la temperatura sea lo más agradable y estable posible. Entre la información que le proporcionan respecto a la temperatura en grados centígrados en esas tres ciudades se encuentra lo siguiente:

Temperatura	Ciudad		
	A	B	C
Promedio anual	25	24	25
Mediana anual	24	24	23
Moda anual	24	24	22

Además de la información anterior, Pedro solicita que le envíen una muestra aleatoria de las temperaturas en grados centígrados a las doce mediodía de quince días escogidos durante el año en las tres ciudades. Los datos solicitados se ofrecen a continuación:

Ciudad	Temperaturas en grados centígrados a las 12 mediodía de 15 días diferentes seleccionados al azar														
A	15	30	28	25	10	35	30	17	25	29	33	13	25	24	31
B	24	2	-1	29	39	38	30	15	25	28	33	18	36	14	24
C	29	22	23	29	27	18	17	24	26	25	27	26	27	25	25

Con la información anterior realice un análisis de los datos para ayudarle a Pedro a tomar una decisión. Para favorecer la comprensión de la situación construya un diagrama de cajas con los datos de las tres ciudades. ¿Cuál de las tres ciudades debería escoger Pedro para trabajar el próximo año? ¿Cuál de las tres ciudades no recomendaría a Pedro? Justifique su respuesta.

Trabajo estudiantil independiente

En esta etapa cada subgrupo debe idear una estrategia para resolver el problema, por lo que se activa el proceso *Resolver y plantear problemas*. Hay tres posibles abordajes del problema, que se distinguen entre sí dependiendo de si se realiza o no el análisis de las medidas de posición que se muestran en el enunciado del problema o si sólo se construye e interpreta un diagrama de cajas. A continuación se exponen las tres posibles estrategias.

Estrategia 1

Como se indicó en esta estrategia cada subgrupo comienza por resolver el problema analizando las medidas de posición para las tres ciudades. Cada subgrupo podría considerar las siguientes preguntas que deben ser respondidas mediante el análisis de algunas medidas estadísticas:

- ¿Son similares las temperaturas promedio en las tres ciudades?
- ¿Son similares las temperaturas medianas en las tres ciudades?
- ¿Son similares las temperaturas más frecuentes en cada ciudad?
- ¿Qué se puede concluir acerca del análisis comparativo de las medidas de posición de las temperaturas anuales en estas tres ciudades? ¿Cuál de las tres ciudades presenta la temperatura más estable?

Algunos comentarios que podría hacer cada subgrupo respecto a las preguntas anteriores son los siguientes:

- Las temperaturas promedio anuales son muy similares en las tres ciudades. De hecho dos ciudades tienen la misma temperatura promedio anual (A y C) y la temperatura promedio anual de la tercera ciudad (B) está un grado centígrado por debajo de las otras dos. Por lo que no hay diferencias significativas en cuanto a la temperatura promedio de las tres ciudades.

- Algo similar ocurre con la temperatura mediana anual en las tres ciudades, dado que hay dos ciudades que tienen la misma mediana anual de temperatura (A y B) y la temperatura mediana anual de la tercera (C) es un grado centígrado inferior a las otras dos.

- Lo mismo sucede con la temperatura anual más frecuente, ya que dos de las ciudades (A y B) coinciden en la temperatura anual más frecuente, mientras que la temperatura más frecuente en la tercera ciudad (C) está dos grados centígrados por debajo de la temperatura más frecuente en las otras dos ciudades.

- Del análisis comparativo de las medidas de posición de las temperaturas en las tres ciudades, cada subgrupo debería concluir que para comprobar cuál de las tres ciudades posee las temperaturas más estables no es suficiente con elaborar un análisis basado en las medidas de posición, sino que es necesario realizar un análisis de algunas medidas de variabilidad estudiadas hasta el momento, como son el valor máximo, el valor mínimo, el recorrido y el recorrido intercuartílico. En este momento se activa el proceso *Razonar y argumentar,* pues cada subgrupo debe justificar por qué es insuficiente un análisis comparativo de las medidas de posición de las temperaturas en las tres ciudades para determinar cuál de ellas presenta la temperatura más estable.

Se podría formular la siguiente pregunta para guiar a los subgrupos hacia el cálculo e interpretación de algunas medidas de variabilidad de las temperaturas en grados centígrados a las doce mediodía de quince días escogidos durante el año en las tres ciudades:

- Debido a que las medidas de posición son insuficientes para definir cuál de las tres ciudades presenta la temperatura más estable, ¿qué otras medidas estadísticas estudiadas en clase se pueden poner en juego para determinar cómo varían las temperaturas en cada ciudad?

Se pretende que los miembros de los subgrupos calculen e interpreten la temperatura mínima y la máxima, el recorrido y el recorrido intercuartílico para analizar la variabilidad de las temperaturas en las tres ciudades, pues son conocimientos previos que poseen, y además que las presenten por medio de una tabla, activándose así el proceso *Representar*. Es conveniente que el docente esté alerta en caso que los estudiantes intenten calcular nuevamente las medidas de posición de las temperaturas en grados centígrados de la muestra que se proporciona, pues como ya se mencionó este tipo de análisis no permite determinar cuál de las tres ciudades posee la temperatura más estable.

Se espera que a partir de la pregunta generadora que se formuló anteriormente los estudiantes se cuestionen lo siguiente:

- ¿Cuál es la temperatura mínima y la máxima en cada una de las tres ciudades?
- ¿Cuál de las tres ciudades presenta el menor recorrido de las temperaturas?
- ¿Cuál temperatura corresponde al primer y tercer cuartil?
- ¿Cuál de las tres ciudades presenta el menor recorrido intercuartílico?
- Con base en los resultados obtenidos, ¿cuál de las tres ciudades presenta las temperaturas más estables?

Cada subgrupo podría realizar los siguientes procedimientos para dar respuesta a las preguntas anteriores.

- Para obtener el recorrido se calcula la diferencia entre el valor máximo y el mínimo, por lo que para cada ciudad el recorrido es el siguiente:

Ciudad	**Máximo**	**Mínimo**	**Recorrido**
Ciudad A	35°C	10°C	25°C
Ciudad B	39°C	-1°C	40°C
Ciudad C	29°C	17°C	12°C

  En la tabla anterior se observa que la ciudad C ofrece el menor recorrido. Esto podría ser un indicador de que la ciudad C presenta las temperaturas más estables al presentar un menor rango de variación. Por el contrario, la ciudad B presenta el mayor recorrido, lo que podría indicar que en esta ciudad las temperaturas son menos estables pues el rango de variación es mayor.
- Para concretar el recorrido intercuartílico se debe calcular la diferencia entre el tercer cuartil y el primer cuartil. También se deben ordenar los datos de menor a mayor magnitud. A continuación se presentan las temperaturas en grados centígrados a las doce mediodía de quince días escogidos durante el año en las tres ciudades ordenadas desde la menor hasta la mayor temperatura.

Ciudad	Temperaturas en grados centígrados a las 12 mediodía de 15 días diferentes seleccionados al azar														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
A	10	13	15	17	24	25	25	25	28	29	30	30	31	33	35
B	–1	2	14	15	18	24	24	25	28	29	30	33	36	38	39
C	17	18	22	23	24	25	25	25	26	26	27	27	27	29	29

En el caso del primer cuartil, debido a que $\frac{n+1}{4} = \frac{16}{4} = 4$ se tendría que el primer cuartil está determinado por el cuarto dato, entonces para cada ciudad el primer cuartil es:

Ciudad	1er cuartil
A	17°C
B	15°C
C	23°C

Del mismo modo, debido a que se tendría que el tercer cuartil está determinado por el 12vo dato, entonces para cada ciudad el tercer cuartil es:

Ciudad	3er cuartil
A	30°C
B	33°C
C	27°C

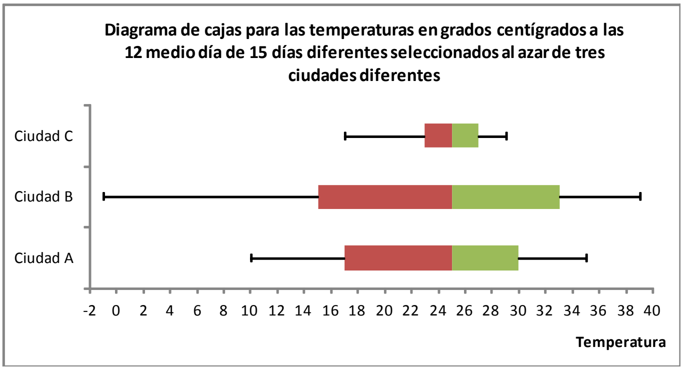
Con la información anterior se puede calcular el recorrido intercuartílico para cada ciudad, tal como aparece a continuación:

Ciudad	3er cuartil	1er cuartil	Recorrido intercuartílico
A	30°C	17°C	13°C
B	33°C	15°C	18°C
C	27°C	23°C	4°C

En la tabla anterior se observa que la ciudad que presenta el menor recorrido intercuartílico es la ciudad C, esto quiere decir que la ciudad C posee el menor rango de variabilidad del 50 % de los valores centrales (el recorrido intercuartílico de la ciudad C es 4), mientras que en la ciudad B se presenta el mayor rango de variabilidad del 50 % de los datos centrales.

- El análisis comparativo de las medidas calculadas permite concluir que en la ciudad C las temperaturas son más estables (menos variables) dado que presentan el menor recorrido y el menor recorrido intercuartílico (rango de variabilidad del 50 % de los valores centrales). Por el contrario, la ciudad B ofrece las temperaturas más variables. Debido a lo anterior se aconseja a Pedro aceptar el trabajo de la ciudad C y no se le recomienda aceptar la oferta de empleo de la ciudad B porque presenta las temperaturas menos estables.

Por último, cada subgrupo debe elaborar el siguiente diagrama de cajas, porque el problema así lo indica, activándose por segunda vez en este problema el proceso *Representar*. Se sugiere la utilización de una hoja de cálculo como Microsoft Office Excel y la ayuda del docente al momento de construir este diagrama. A continuación se presenta el diagrama de cajas para las temperaturas en grados centígrados a las doce mediodía de quince días diferentes seleccionados al azar en las tres ciudades.



Cada subgrupo debe ser capaz de interpretar la información incluida en el anterior diagrama de cajas. Por ejemplo, del cuadro anterior se puede observar que la ciudad C refleja el menor recorrido, porque el tamaño de los bigotes correspondientes a la caja de la ciudad C es el más pequeño de los tres. Se puede observar que la caja de la ciudad B presenta los bigotes más largos, por lo que en esta ciudad el recorrido de las temperaturas es mayor. Además, en la ciudad C el 50 % de las temperaturas centrales se encuentran entre 23 °C y 27 °C, mientras que en la ciudad B entre 15 °C y 33 °C, aproximadamente. Queda claro del diagrama anterior que en tendencia central las temperaturas son muy similares, no así cuando se analizan las otras medidas de posición: los extremos y los cuartiles, que son muy diferentes. No debe perderse de vista que el propósito de lectura de este gráfico es determinar cuál de las tres ciudades presenta las temperaturas más estables.

Este diagrama complementa la información que proporcionó el análisis de algunas medidas de variabilidad. Se evidencia claramente que desde todo punto de vista la ciudad C presenta mucha menor variabilidad en las temperaturas respecto a las otras dos ciudades, al mismo tiempo la ciudad B se revela como la que posee las temperaturas más variables.

En conclusión, la información obtenida de este diagrama reafirma los resultados obtenidos anteriormente de que Pedro debe aceptar la oferta de trabajo de la ciudad C por que en ella se evidencian las temperaturas más estables.

Por último, en una plenaria se debe comentar que debido a que la muestra de días que se escogió es relativamente pequeña, el análisis efectuado parte del supuesto que las temperaturas son suficientemente representativas del comportamiento anual para cada una de esas ciudades, además que el año seleccionado no es atípico sino que realmente representa el comportamiento normal de las temperaturas en cada una de las ciudades.

Estrategia 2

Es posible que algún subgrupo no considere obligatorio realizar el análisis de las medidas de posición de las temperaturas en las tres ciudades. En realidad la información que suministra este análisis es insuficiente para resolver el problema; el objetivo de presentar en el problema las medidas de posición es que el estudiante descubra que en algunos casos no es suficiente con realizar un análisis de estas medidas, sino que se vuelve necesario el análisis de algunas medidas de variabilidad.

Debido a lo anterior se espera que cada subgrupo efectúe un análisis de las medidas de variabilidad similar al que se describió en la estrategia 1. Es oportuno mencionar que en este análisis no se podrá emplear la desviación estándar ni el coeficiente de variación, pues son conocimientos que aún no se han estudiado. En el caso de la desviación estándar se utilizará el problema propuesto para introducir dicho concepto en la clausura, cuando cada subgrupo haya compartido con los demás los hallazgos obtenidos.

Además de realizar el análisis de algunas medidas de variabilidad, los subgrupos que resuelvan el problema siguiendo esta estrategia deben construir un diagrama de cajas con el cual corroborarían las conclusiones obtenidas a partir del análisis de algunas medidas de variabilidad. El diagrama de cajas que se espera que construya cada subgrupo es similar al que se presentó en la descripción de la estrategia 1.

Estrategia 3

Puede suceder que algunos subgrupos no consideren forzoso elaborar un análisis de las medidas de posición ni de variabilidad estudiadas hasta el momento, sino que intenten resolver el problema construyendo el diagrama de cajas y a partir de la información que suministra tomar una decisión. Las recomendaciones para la elaboración de este diagrama son las que se presentaron en la estrategia 1.

Es evidente que al utilizar cualesquiera de las tres estrategias y un análisis correcto se llega a las mismas conclusiones.

En resumen, la primera estrategia consiste en realizar un análisis de las medidas de posición; sin embargo, este tipo de análisis es insuficiente para tomar una decisión respecto a qué ciudad recomendarle a Pedro para que trabaje el próximo año. Por esta razón, en la segunda estrategia se deberá efectuar un análisis de algunas medidas de variabilidad estudiadas hasta el momento: el recorrido y el recorrido intercuartílico y con base en este análisis se tomará la decisión de cuál ciudad recomendar a Pedro. Luego se espera que construyan el diagrama de cajas con las temperaturas de las tres ciudades y gracias a la interpretación de este diagrama reafirmar la decisión tomada.

Por último, en la tercera estrategia cada subgrupo únicamente construye el diagrama de cajas y a partir de la información que éste suministra toman una decisión.

Como se puede notar, la primera estrategia considera dentro de su análisis las otras dos posibles estrategias.

Discusión interactiva y comunicación

En esta etapa cada uno de los subgrupos comunica a los demás miembros de la clase la estrategia adoptada y los resultados a los que llegaron, activándose el proceso *Comunicar*. De esta manera comparten las respuestas a cada una de las preguntas que se hicieron durante la resolución del problema y comparan dichas respuestas con las proporcionadas por los demás subgrupos. El docente debe estar atento a las justificaciones que dará cada subgrupo y a la interpretación de las medidas estadísticas empleadas para corroborar que sean correctas. Así, al justificar cada subgrupo las respuestas se activa el proceso *Razonar y argumentar.*

En caso que alguno de los subgrupos se haya valido de la primera estrategia para resolver el problema es importante que se pregunte por la interpretación de las tres medidas de posición. Por ejemplo podría preguntarse lo siguiente: ¿Qué significa que la temperatura promedio anual en la ciudad B sea 24? ¿Qué significa que la temperatura mediana anual en la ciudad A sea 24? ¿Qué significa que la moda anual de las temperaturas en la ciudad C sea 23?

Una vez que se haya efectuado el análisis de las medidas de posición de las temperaturas se pueden generar las siguientes preguntas:

- ¿Cuál de las tres ciudades tiene la mayor temperatura?
  Se espera que contesten que la temperatura es similar en las tres ciudades.
- Según el análisis concebido hasta el momento, ¿se podría definir cuál de las tres ciudades presenta la temperatura más estable?

Se espera que mencionen que aún no se sabe con certeza cuál de las tres ciudades tiene la temperatura más estable y por consiguiente no podrían recomendarle a Pedro cuál ciudad escoger para que trabaje el próximo año.

Es indispensable que a partir de las intervenciones descubran que el análisis de las medidas de posición es insuficiente y no permite tomar una decisión acertada sobre la ciudad que debe escoger Pedro para trabajar el próximo año, pues todas ofrecen temperaturas similares. Se puede recordar al estudiantado que lo que Pedro necesita es determinar cuál de las tres ciudades posee la temperatura más estable.

Cuando los subgrupos estén comunicando los resultados obtenidos mediante el análisis de las medidas de variabilidad estudiadas hasta el momento, es elemental que se formulen preguntas como las siguientes: ¿Qué significa que el recorrido de las temperaturas en la ciudad C sea 12? ¿Qué significa que el recorrido intercuartílico sea 4 en la ciudad C? ¿Cuál de las tres ciudades presenta el menor recorrido y cuál el menor recorrido intercuartílico? ¿Permite el análisis de algunas medidas de variabilidad determinar cuál de las tres ciudades presenta las temperaturas más estables? ¿Qué conclusión se puede obtener del análisis de algunas medidas de variabilidad?

Cuando los subgrupos presenten a los demás miembros de la clase el diagrama de cajas que construyeron se pueden lanzar preguntas como las siguientes: ¿Cuál de las tres ciudades presenta el mayor recorrido? ¿En cuál de las tres ciudades es menor el rango del 50 % de las temperaturas centrales? ¿En cuál de las tres ciudades es mayor el rango del 50 % de las temperaturas centrales? ¿Permite el gráfico de cajas determinar cuál de las tres ciudades presenta la temperatura más estable?

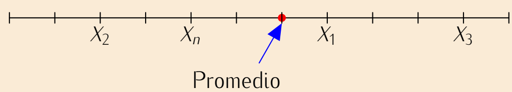
Clausura o cierre

En este momento de planificación de la lección se debe recurrir a las respuestas y los argumentos propuestos por cada uno de los subgrupos para establecer una relación entre el trabajo desempeñado en la resolución del problema y las habilidades específicas que se pretenden abordar. Por ejemplo, se debe enfatizar en que en algunos casos cuando se busca comparar conjuntos de datos que en apariencia son muy diferentes entre sí, puede ocurrir que no existan diferencias significativas entre las medidas de tendencia central, lo que ocurre en el problema sugerido. En estos casos, además de efectuar un análisis de los datos aprovechando las medidas de posición, se requiere elaborar un análisis de las medidas de variabilidad. En este problema se pueden emplear el recorrido y el recorrido intercuartílico para medir la variabilidad de las temperaturas de las tres ciudades. También pueden bosquejarse gráficos estadísticos como los diagramas de puntos y el diagrama de cajas.

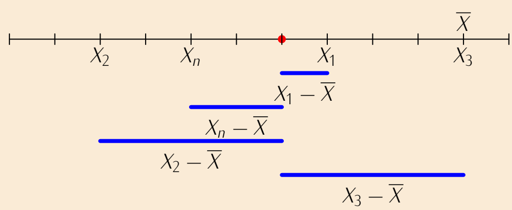
Por otra parte, se puede utilizar este problema para introducir los conceptos de desviación estándar y coeficiente de variación:

Desviación estándar

Para medir la variabilidad de una forma más precisa, es necesario buscar una medida que en su cálculo utilice toda la información de los datos. En este sentido, la medida que mejor se ajusta a este principio consiste en determinar las diferencias o desviaciones de cada dato respecto al promedio. Es decir, se tienen n datos $X_1, X_2, \ldots, X_n$, en cualquier orden, los cuales se representan en la recta numérica, donde se ubica al promedio con el símbolo $\overline{X}$ como lo ilustra la figura siguiente:



Entonces para calcular la desviación estándar se debe determinar la diferencia de cada dato con el promedio, como se refleja en seguida:



Se pueden calcular todas las diferencias de cada dato con el promedio, entre más grandes sean estas diferencias, en valor absoluto, mayor variabilidad presentan los datos y entre más pequeñas sean menos variabilidad. No obstante, si se suman estas diferencias el resultado es cero. Por esta razón, para utilizar las diferencias o desviaciones sin que se anulen se recurre a la siguiente suma:

$$(X_1 - \overline{X})^2 + (X_2 - \overline{X})^2 + (X_3 - \overline{X})^2 + \cdots + (X_n - \overline{X})^2$$

Debido a que esta suma normalmente toma valores muy grandes se tiende a dividir entre el número de datos n cuando se trabaja con una población o entre $n-1$ cuando se trabaja con una muestra. Las razones por las cuales no se utiliza el mismo denominador son eminentemente técnicas dentro de la *teoría estadística*.
Seguidamente se puede subrayar la definición de la variancia, que es la siguiente:

Se define la *variancia* de un grupo de datos $X_1, X_2, \ldots, X_n$ por medio de las siguientes fórmulas:

$$\text{Variancia} = \begin{cases} \dfrac{(X_1-\overline{X})^2+(X_2-\overline{X})^2+(X_3-\overline{X})^2+\cdots(X_n-\overline{X})^2}{n} & \text{si los datos conforman toda la población} \\ \dfrac{(X_1-\overline{X})^2+(X_2-\overline{X})^2+(X_3-\overline{X})^2+\cdots(X_n-\overline{X})^2}{n-1} & \text{si los datos conforman una muestra} \end{cases}$$

Cuando se desean comparar dos grupos de una misma naturaleza, es más variable aquel que tenga una mayor variancia. Sin embargo, debido a que esta medida está constituida por la suma de los cuadrados de las desviaciones, las unidades de medida que tienen los datos quedan al cuadrado; para simplificar esto se acostumbra obtener la raíz cuadrada de la variancia. A esta nueva medida se le llama *desviación estándar*, y se puede representar por *Des_est*. Por lo anterior, se tiene:

$$\text{Desv\_est} = \sqrt{\text{Variancia}}$$

Debido a que tanto la variancia como la desviación estándar han sido definidas por una serie de operaciones matemáticas, se les puede catalogar como un índice de variabilidad, por lo que se van a interpretar en función de su magnitud, es decir, entre más grandes sean los valores que éstas tomen, mayor será la variabilidad del conjunto de datos.

Es esencial recordar que el cálculo de las medidas estadísticas juega un rol secundario dentro de los análisis estadísticos descriptivos, por lo que se puede hacer manualmente con el apoyo de una calculadora científica que tenga funciones estadísticas o mediante el uso de la computadora, por medio de una hoja de cálculo o con un programa especializado. En cualquier procedimiento es necesario saber si los datos conforman todas las observaciones de una población o simplemente una muestra de ella, pues como se indicó previamente hay diferencias en la fórmula de cálculo.

Una vez que se haya explicado el concepto de desviación estándar y la manera de utilizar la calculadora para obtener esta medida estadística, se puede exponer el siguiente problema:

> Utilice la desviación estándar para que de una forma más directa y convincente se le pueda argumentar a Pedro cuál ciudad debería seleccionar para el trabajo que debe realizar.

Se podría manipular la calculadora o una computadora para calcular la variancia y la desviación estándar de las temperaturas en las tres ciudades. En el siguiente cuadro se expresan los valores de la variancia y la desviación estándar para las temperaturas en las tres ciudades.

Ciudad	**Variancia**	**Des_Est**
A	57,7	7,6
B	146,3	12,1
C	12,7	3,6

El cuadro anterior indica que las temperaturas de la ciudad C son las que presentan menor variabilidad, mientras que la ciudad B es la que tiene mayor variabilidad en sus temperaturas. Estos resultados coinciden con los obtenidos en la solución del problema propuesto.

En la clausura se debe enfatizar en la interpretación de las medidas estadísticas aprovechadas en la resolución del problema. En la siguiente tabla se resumen todas las medidas estadísticas empleadas en el problema propuesto y se incluyen también la variancia y la desviación estándar.

Medida estadística	**Ciudad**		
	A	B	C
Máximo	35	39	29
Mínimo	10	–1	17
Recorrido	25	40	12
Recorrido intercuartílico	13	18	4
Variancia	57,7	146,3	12,1
Desviación estándar	7,6	12,1	3,6

Interpretación:

Para efectos didácticos se pueden interpretar las medidas del siguiente modo:

Máximo: La temperatura más alta (o máxima) en la ciudad A es de 35 °C, mientras que en las ciudades B y C son 39 °C y 29 °C grados centígrados, respectivamente.

Mínimo: La temperatura más baja (o mínima) en la ciudad A es de 10 °C. En las ciudades B y C las temperaturas más bajas son –1 °C y 17 °C, respectivamente.

Recorrido: En la ciudad A las temperaturas de los 15 días muestreados se dispersan en un rango de 25 °C, en la ciudad B en un rango de 40 °C y en la ciudad C en un rango de 12 °C.

Recorrido intercuartílico: En la ciudad A el 50 % de las temperaturas centrales se dispersan en un rango de 13 °C, en la ciudad B en un rango de 18 °C y en la ciudad C en un rango de 4 °C.

Desviación estándar: En la ciudad A la temperatura promedio fue 24,7 °C con una desviación estándar de 7,6 °C, en la ciudad B la temperatura promedio fue 23,6 °C con una desviación estándar de 12,1 °C y en la ciudad C la temperatura promedio fue 24,7 °C con una desviación estándar de 3,3 °C.

En la resolución de este problema pueden activarse cuatro de los cinco procesos matemáticos que se proponen en los nuevos programas de estudio. Se activa el proceso *Razonar y argumentar* debido a que los subgrupos deben argumentar ante los demás miembros de la clase los resultados obtenidos, específicamente cuál de las tres ciudades recomienda a Pedro para que trabaje el próximo año. A la vez se impulsa el proceso *Plantear y resolver problemas* pues por las características del problema su resolución no es trivial, por lo que se debe diseñar una estrategia y los métodos más adecuados para resolverlo. Por ejemplo, deben valorar si el análisis de las medidas de posición permite determinar en cuál de las tres ciudades la temperatura es más estable y si no cambiar de estrategia por una que les permita resolver el problema. En la resolución del problema se puede afianzar el proceso *Comunicar,* dado que se debe expresar oralmente a todos los miembros de la clase la estrategia utilizada para resolver el problema, así como los resultados y argumentos matemáticos que justifican su solución. Por último se promueve el proceso *Representar,* pues el estudiante debe representar en un gráfico algunas medidas estadísticas (diagrama de cajas) y a partir de su interpretación puede resolver el problema.

II Etapa: Movilización y aplicación de conocimientos

En esta etapa se busca reforzar y ampliar los aprendizajes consumados. Se podría proponer el siguiente problema para ser resuelto en los mismos subgrupos de trabajo con el objetivo de fortalecer las habilidades adquiridas.

Considere la siguiente información sobre el tipo de cambio del dólar respecto al colón anunciado en ventanilla por los intermediarios cambiarios.

Tipos de cambio anunciados en ventanilla por los intermediarios cambiarios

En colones costarricenses por dólar de los Estados Unidos de América

martes, 11 de diciembre de 2012

Tipo de Entidad	Entidad Autorizada	Compra	Venta	Diferencial Cambiario	Última Actualización
Bancos públicos	Banco Crédito Agrícola de Cartago	493,00	503,00	10,00	26/11/2012 04:46 p.m.
	Banco de Costa Rica	492,75	501,75	9,00	11/12/2012 01:34 a.m.
	Banco Nacional de Costa Rica	492,50	502,00	9,50	10/12/2012 06:54 a.m.
	Banco Popular y de Desarrollo Comunal	492,00	502,00	10,00	26/11/2012 03:25 p.m.
Bancos privados	Banco BAC San José S.A.	493,00	504,00	11,00	10/12/2012 08:35 a.m.
	Banco Bansol	496,00	503,00	7,00	05/11/2012 09:47 a.m.
	Banco BCT S.A.	493,00	507,00	14,00	02/11/2012 04:03 p.m.
	Banco Cathay de Costa Rica S.A.	493,00	504,00	11,00	26/11/2012 05:38 p.m.
	Banco Citibank de Costa Rica S.A.	493,00	504,00	11,00	10/12/2012 02:33 a.m.
	Banco Davivienda (Costa Rica) S.A	494,00	505,50	11,50	27/11/2012 02:04 p.m.
	Banco General (Costa Rica) S.A.	492,00	505,00	13,00	10/12/2012 09:46 p.m.
	Banco Improsa S.A.	492,00	505,00	13,00	26/11/2012 12:44 p.m.
	Banco Lafise S.A.	492,50	504,50	12,00	10/12/2012 08:36 a.m.
	Banco Promérica S.A.	491,00	504,75	13,75	04/12/2012 05:24 p.m.
	Banco Scotiabank de Costa Rica S.A.	493,00	504,00	11,00	06/12/2012 10:29 p.m.
Financieras	Financiera Cafsa S.A.	492,00	504,00	12,00	10/12/2012 05:49 p.m.
	Financiera Comeca S.A.	493,00	506,00	13,00	26/11/2012 11:44 a.m.
	Financiera Desyfin S.A.	498,50	506,00	7,50	23/11/2012 02:12 p.m.
	Financiera G&T Continental Costa Rica S.A.	498,50	502,50	4,00	05/12/2012 08:14 a.m.
	Financiera Multivalores S.A.	492,75	506,75	14,00	26/11/2012 09:38 a.m.

Obtenido de
http://indicadoreseconomicos.bccr.fi.cr/indicadoreseconomicos/Cuadros/frmConsultaTCVentanilla.aspx

Con base en los datos del cuadro anterior, determine cuál entidad financiera presenta menor variabilidad y cuál mayor variabilidad respecto al diferencial cambiario.

Solución

Se espera que cada subgrupo se plantee las siguientes interrogantes:

1. ¿Qué significa el diferencial cambiario?
2. ¿Entre qué par de valores varía el diferencial cambiario para cada entidad financiera?

3. ¿Cuál es la mayor diferencia entre dos diferenciales cambiarios para cada tipo de entidad? ¿Qué conclusión puede obtener a partir de estos valores?
4. ¿Cuál entidad financiera presenta menor variabilidad y cuál mayor variabilidad? ¿Qué indican estos resultados?

Cada subgrupo podría realizar el siguiente análisis:

1. Se espera que cada subgrupo interprete el diferencial cambiario como la diferencia entre el valor de compra y venta del dólar respecto al colón. Para responder las preguntas del problema anterior se deben calcular las medidas estadísticas que se brindan en la siguiente tabla:

Medidas estadísticas	Tipo de entidad		
	Bancos públicos	Bancos privados	Financieras
Mínimo	9	7	4
Máximo	10	14	14
Recorrido	1	7	10
Promedio	9,625	11,659	10,100
Desviación estándar	0,479	1,924	4,219
Coeficiente de variación	0,050	0,165	0,518

De acuerdo con los datos de la tabla anterior:

1. El diferencial cambiario en los bancos públicos varía entre 9 y 10, en los bancos privados varía entre 7 y 4 y en las financieras varía entre 4 y 14.
2. En los bancos públicos la mayor diferencia es 1, mientras que en los bancos privados es 7 y en las financieras 10. Estos datos indican que la mayor variabilidad respecto al diferencial cambiario se presenta en las financieras, mientras que la menor variabilidad en los bancos públicos.
3. Si se comparan las desviaciones estándar de los tres tipos de entidades se observa que las financieras son las que presentan mayor variabilidad, mientras que los bancos públicos los que ofrecen menor variabilidad. Al comparar el coeficiente de variación para cada tipo de entidad se corrobora lo que anteriormente se concluyó. Estos resultados indican que el diferencial cambiario varía más entre las financieras, mientras que en los bancos públicos el diferencial cambiario es muy similar.

Contextualización activa

Estadística y Probabilidad es una de las áreas que más se presta para la elaboración de problemas contextualizados. Por ejemplo, en el problema analizado se recurre a información que refiere a un contexto real o que puede imaginarse como real, ya que las temperaturas que se presentaron pueden ser las temperaturas reales de una ciudad en particular.

Para introducir las definiciones de las medidas de posición o variabilidad se pueden aplicar problemas que contengan datos reales de los mismos estudiantes, como el peso, edad, estatura, programas de televisión preferidos, gastos del recibo de agua o electricidad, etc.

Por ejemplo, se podría llevar una báscula para pesar a todos los miembros de la clase, luego se realiza un análisis de las medidas de posición y variabilidad según el sexo. Suponga que las medidas de posición son las que aparecen en la siguiente tabla:

Medidas estadísticas	Hombres	Mujeres
Promedio	69,2 kg	41,5 kg
Moda	47 kg	45 kg
Mediana	65 kg	47 kg
Desviación estándar	9,8 kg	5,6 kg

A partir de esta información se puede preguntar: ¿cuál conjunto de datos es más variable, el peso de los hombres o el de las mujeres? Los datos de la tabla parecieran indicar que los pesos de los hombres son más variables, pues la desviación estándar de este conjunto es mayor. Sin embargo, como se ha mencionado si se requiere comparar la variabilidad entre dos conjuntos se debe emplear el coeficiente de variación.

El coeficiente de variación del peso de los hombres es $\frac{9{,}8}{69{,}2} \approx 0,13$ y el de las mujeres $\frac{5{,}6}{41{,}5} \approx 0,13$, por lo tanto ambos conjuntos poseen una variabilidad relativa similar.

También se puede disponer de datos publicados en revistas y periódicos de circulación nacional e internacional sobre diversos asuntos de interés, o bien considerar datos que recolectan instituciones gubernamentales. En la siguiente tabla se reseña el nombre de tres instituciones, su dirección web y el tipo de información que se puede encontrar.

Institución	Dirección web	Información que se puede obtener
Instituto Nacional de Estadísticas y Censos	www.inec.go.cr	Población, tasas de fecundidad y mortalidad, extensión territorial por provincia, por cantón, por distrito, densidad de población, índices de precios, entre otros.
Instituto Meteorológico Nacional	www.imn.ac.cr	Datos climáticos como las temperaturas mínimas y máximas, precipitación, tablas sobre mareas, entre otros.
Banco Central de Costa Rica	www.bccr.fi.cr	Tipo de cambio del colón respecto a distintas monedas como el dólar o el euro. Se pueden encontrar datos relacionados con tasas de interés y finanzas públicas, entre otros.

Los datos recolectados por éstas y otras instituciones se pueden aprovechar para elaborar problemas contextualizados.

A continuación se presenta el tipo de cambio de compra y venta del dólar de los Estados Unidos de América respecto al colón publicado en la página web del Banco Central de Costa Rica.

Tipo cambio de compra y de venta del dólar de los Estados Unidos de América
Referencia del Banco Central de Costa Rica
En colones costarricenses

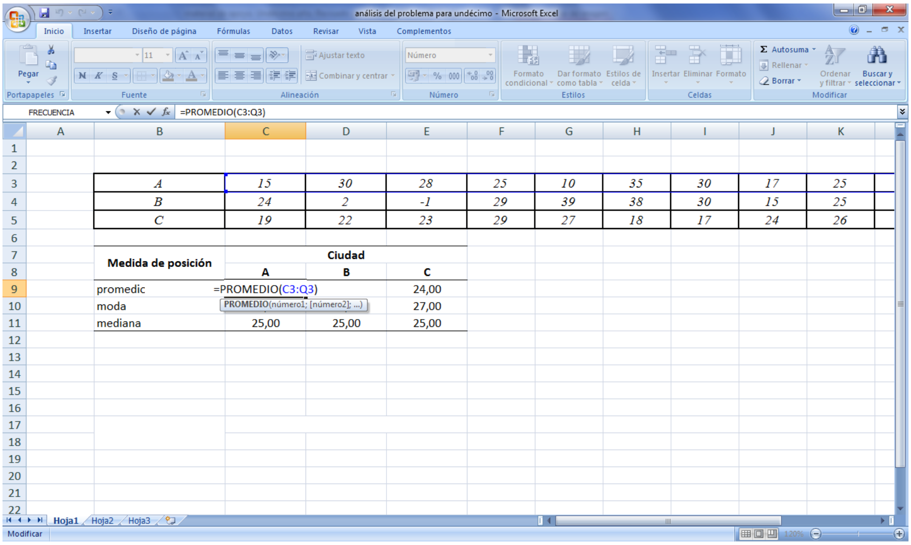
	TIPO CAMBIO COMPRA	TIPO DE CAMBIO VENTA
12 Nov 2012	494,14	505,21
13 Nov 2012	494,21	505,21
14 Nov 2012	494,16	505,15
15 Nov 2012	494,19	505,12
16 Nov 2012	494,18	505,24
17 Nov 2012	494,02	505,24
18 Nov 2012	494,02	505,24
19 Nov 2012	494,02	505,24
20 Nov 2012	494,23	505,18
21 Nov 2012	494,19	505,14
22 Nov 2012	494,20	505,11
23 Nov 2012	494,17	505,12
24 Nov 2012	494,18	505,27
25 Nov 2012	494,18	505,27
26 Nov 2012	494,18	505,27
27 Nov 2012	493,27	503,66
28 Nov 2012	492,85	503,32
29 Nov 2012	492,82	503,32
30 Nov 2012	492,81	503,17
1 Dic 2012	492,82	503,28
2 Dic 2012	492,82	503,28
3 Dic 2012	492,82	503,28
4 Dic 2012	492,89	503,45
5 Dic 2012	492,88	503,34
6 Dic 2012	492,87	503,26
7 Dic 2012	492,90	503,19
8 Dic 2012	492,87	503,02
9 Dic 2012	492,87	503,02
10 Dic 2012	492,87	503,02
11 Dic 2012	492,89	503,07

Obtenido de http://indicadoreseconomicos.bccr.fi.cr/indicadoreseconomicos/Cuadros/frmVerCatCuadro.aspx?idioma=1&CodCuadro=%20400

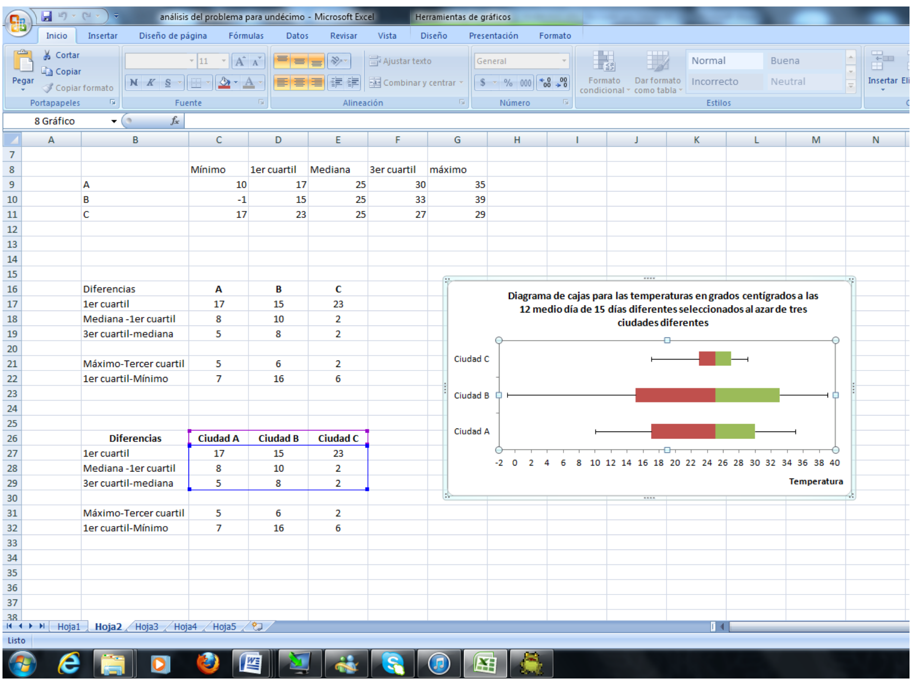
Con los datos de la tabla anterior, ¿cuál tipo de cambio es más variable, el de compra o el de venta?

Uso de tecnología

Para el problema en el que se debía establecer cuál de las tres ciudades presentaba la temperatura más estable es imprescindible la utilización de tecnologías digitales, con el propósito de simplificar los cálculos numéricos que requiere la determinación de las medidas estadísticas. Por ejemplo, en la siguiente figura se revela la forma en que se empleó la hoja de cálculo Microsoft Office Excel para calcular las medidas de posición del problema.

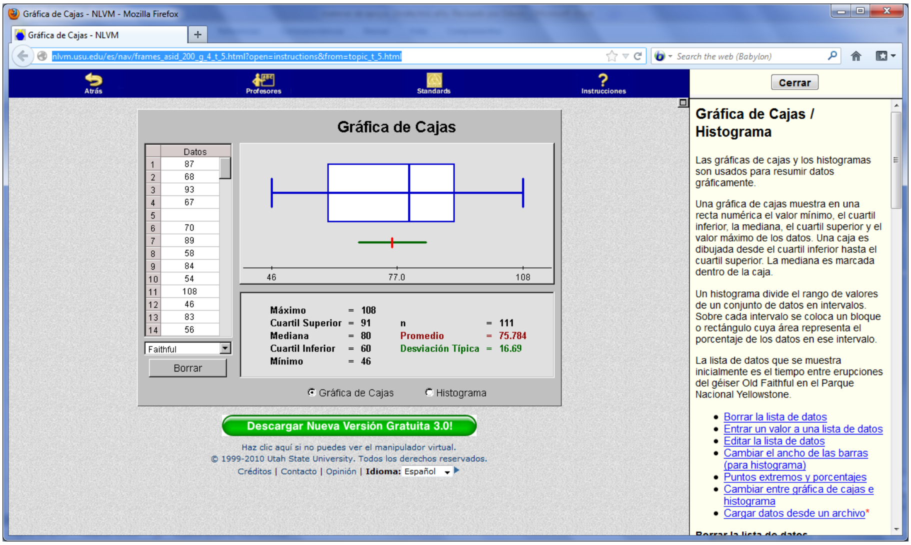


O bien para crear el diagrama de cajas, tal como se muestra en la siguiente figura:



En la figura anterior aparecen todas las medidas estadísticas que se necesitan para construir el diagrama de cajas, pero se omiten los procedimientos a seguir, pues no es el propósito de este material.

Pueden visitarse páginas web con contenido educativo. Por ejemplo, en la siguiente dirección web http://nlvm.usu.edu/es/nav/topic_t_5.html que corresponde a la Biblioteca virtual de recursos manipulativos se pueden encontrar actividades sobre Estadística y Probabilidad para grados desde el Pre-kinder hasta Secundaria. En esta página web se puede encontrar el siguiente applet para elaborar diagramas de cajas.



En este applet únicamente se introducen los datos y automáticamente se crea el diagrama y se presentan los cálculos.

Actitudes y creencias

Según los nuevos programas de Matemáticas "al igual que sucede con las capacidades matemáticas, el progreso de las actitudes y creencias positivas hacia las Matemáticas se debe promover en la acción de aula a través de la intervención docente" (p. 38). En este sentido, mediante el problema propuesto se pueden promover las siguientes actitudes:

- *Perseverancia:* Se debe ser persistente al resolver el problema, principalmente cuando los estudiantes concluyan que no es suficiente con realizar un análisis de las medidas de posición sino que es necesario un análisis de las medidas de variabilidad de las temperaturas en las tres ciudades. Además, el problema propuesto no promueve repeticiones mecánicas de procedimientos simples ni requiere la memorización sin sentido de fórmulas matemáticas. Su resolución no es trivial, debido a esto es imperioso que el estudiante sea persistente en la búsqueda de la solución. Es oportuna la labor docente para que los subgrupos no se den por vencidos y continúen buscando estrategias que les permitan resolver el problema.

- *Confianza en la utilidad de las Matemáticas:* Al resolver el problema se puede visualizar la utilidad de la Estadística y en particular de las medidas de variabilidad en la resolución de problemas de la vida cotidiana. Pueden emplearse conceptos estadísticos para tomar decisiones acertadas.

✳ *Participación activa y colaborativa:* La manera en que se organiza la lección ofrece oportunidades para que el estudiante se involucre y participe activamente, por ejemplo al momento de comunicar los resultados obtenidos a los demás miembros de la clase.

Sugerencias de evaluación

A continuación se sugieren dos problemas que pueden servir de ejemplo para evaluar los aprendizajes adquiridos por medio de los problemas planteados.

1. Observe la siguiente información de algunas medidas estadísticas correspondientes al número anual de defunciones por cada 10 000 habitantes, que se presentaron en Costa Rica en el período 1990-2010.

Costa Rica: Medidas estadísticas del número de defunciones según la causa de muerte para tres grupos de enfermedades. Período 1990-2010 (defunciones por 10 000 habitantes)

Medidas estadísticas	Causa de muerte		
	Aparato respiratorio	Aparato digestivo	Tumores (cancer)
Promedio	3,8	2,6	8,3
Mediana	3,8	2,6	8,2
Moda	3,9	2,6	8,1
Desviación Estándar	0,46	0,29	0,46

Fuente: http://www.estadonacion.or.cr/index.php/estadisticas/costa-rica/compendio-estadistico/estadisticas-sociales

De acuerdo con la información del cuadro, considere las siguientes proposiciones:

a) ¿Cuál medida estadística se debe utilizar si se quiere determinar cuál causa de muerte es más variable?

b) ¿Cuál de las tres enfermedades presenta la menor variabilidad relativa?

c) ¿Cuál de las tres enfermedades produjo más defunciones para el período 1990-2010?

d) ¿Las causas de muerte por enfermedades en el aparato respiratorio y por tumores presentaron la misma variabilidad relativa?

Solución

a) Para comparar en términos de variabilidad relativa, se utiliza el coeficiente de variación.

b) El cuadro siguiente incluye, para cada una de las tres enfermedades, el valor que tomó el coeficiente de variación.

Medidas estadísticas	Causa de muerte		
	Aparato respiratorio	Aparato digestivo	Tumores (cancer)
Promedio	3,8	2,6	8,3
Mediana	3,8	2,6	8,2
Moda	3,9	2,6	8,1
Desviación Estándar	0,46	0,29	0,46
Coeficiente de variación	0,121	0,112	0,055

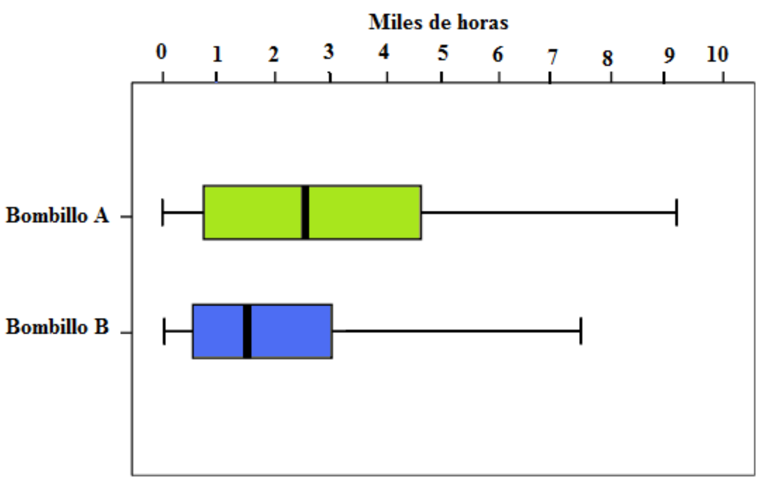
Según los datos del cuadro anterior, la causa de muerte con menor variabilidad relativa fue la de los tumores (cáncer).

c) A la vez se puede notar que los tumores produjeron, en el periodo en cuestión, mayor cantidad de defunciones, lo cual puede notarse en los valores del promedio, mediana y moda respectivos, que son mayores que los valores de las otras causas de muerte.

d) La variabilidad relativa (coeficiente de variación) de las enfermedades respiratorias fue de 0,121, mientras que para los tumores fue de 0,055. Por lo tanto, las causas de muerte por enfermedades en el aparato respiratorio y por tumores no presentaron la misma variabilidad relativa.

2. Una empresa produce dos tipos de bombillos, se toma una muestra aleatoria de 26 bombillos de cada tipo y se les pone a funcionar sin interrupción para determinar la vida útil de los mismos. El siguiente diagrama de cajas representa la vida útil de los bombillos para cada una de esas muestras, los datos se representan en miles de horas.

Vida útil de una muestra aleatoria de 26 bombillos de dos tipos A y B



De acuerdo con la información del diagrama anterior, conteste y justifique las siguientes preguntas:

a) ¿Cuál tipo de bombillo tiene mayor vida útil?
b) ¿En cuál tipo de bombillo la vida útil es menos variable?
c) ¿Cuál tipo de bombillo presenta mayor dispersión del 50 % de los datos centrales?

Solución

a) Según el diagrama anterior, se observa que en los bombillos A el primer cuartil, la mediana, el tercer cuartil y el máximo correspondientes a la vida útil de los bombillos son mayores respecto a los bombillos B, por ello se puede decir que en términos generales los bombillos A tienen un vida útil mayor que los bombillos B.
b) Tanto el recorrido como el recorrido intercuartílico de la vida útil de los bombillos muestreados es menor en los bombillos B, por ello se nota una menor variabilidad.
c) Los bombillos B presentan mayor dispersión del 50 % de los datos centrales.

En el primero de los problemas debe realizarse un análisis tanto de las medidas de posición como de variabilidad. En el segundo problema se debe interpretar la información representada en el diagrama de cajas.

Anexos

Anexo 1: Nota sobre Ley de Tránsito

Observaciones sobre las leyes de tránsito en Costa Rica, disponibles en http://www.csv.go.cr/
LEY DE TRANSITO POR VÍAS PÚBLICAS Y TERRESTRES (y sus reformas)
Ley No. 7331 de 13 de abril de 1993
Publicada en La Gaceta No. 76 de 22 de abril de 1993
Ley de Tránsito por Vías Públicas y Terrestres No. 7331Tít.3.Reglas para la conducción de vehículos.
Cap.1.Los conductores de vehículos.Art.86. (*)
Artículo 86.- (*)
El conductor de un vehículo que circule por la vía pública debe mantener la distancia razonable y prudente, que garantice la detención oportuna en caso de que el vehículo que lo precede frene intempestivamente. Para ello, el conductor debe considerar su velocidad, las condiciones de la vía, del clima y las de su propio vehículo.

Artículo 134.-(*)

Se impondrá una multa de treinta por ciento (30 %) de un salario base mensual, correspondiente al 'Auxiliar administrativo 1" que aparece en la relación de puestos del Poder Judicial, de conformidad con la Ley del presupuesto ordinario de la República, aprobada en el mes de noviembre anterior a la fecha en que se cometa la infracción de tránsito, sin perjuicio de las sanciones conexas:

a) Al conductor que no cumpla las disposiciones que se establecen en el artículo 86 de esta Ley, sobre la distancia que debe guardar con respecto al vehículo que va adelante.

Ley de Tránsito por Vías Públicas y Terrestres No. 7331Tít.3. Reglas para la conducción de vehículos.
Cap.1.Los conductores de vehículos.Art.97. (*)
Artículo 97.- (*)
Los vehículos de tránsito lento están sujetos a las siguientes regulaciones:
c) Cuando varios vehículos de tránsito lento circulen uno detrás del otro, deben mantener suficiente espacio entre ellos. En ningún caso, esa distancia puede ser menor de *cincuenta metros*, para permitir a otros vehículos que circulen a mayor velocidad y para realizar la maniobra de rebase con seguridad y sin contratiempos.

Anexo 2: Modelos que pueden trabajarse con los estudiantes

Las funciones exponenciales y logarítmicas son muy ricas para modelar fenómenos o situaciones de la vida real. Algunos de estos modelos podrían ser desarrollados por los estudiantes en forma de proyectos, como por ejemplo:

- La cantidad de números primos menores o iguales que el número real positivo x, representada por la función $\Pi(x)$, se comporta aproximadamente como la función $\frac{x}{\log x}$ para valores muy grandes de x. Aquí la historia de las Matemáticas es muy importante, pues varios reconocidos matemáticos como Gauss, Legendre, Chebyshev, Euler, Riemann, Hadamard, de la Vallé Poisson, Selberg y Paul Erdös trabajaron en este problema.
- La dimensión fractal es una generalización de la dimensión euclidiana. Si un objeto es recubierto por $N(L)$ objetos unitarios de longitud L, entonces una dimensión fractal del objeto se define como $D = \frac{\log(N(L))}{\log(1/L)} = -\frac{\log(N(L))}{\log(L)}$.
- La escala de Richter es una manera de transformar lecturas de amplitudes de ondas registradas por sismógrafos en números que miden la magnitud M de un temblor. Todos los temblores son comparados con un temblor nivel cero cuyas lecturas sismográficas miden 0.001 milímetros a una distancia de 100 kilómetros del epicentro. Un temblor cuya lectura sismográfica mide x milímetros tiene magnitud $M(x) = \log \frac{x}{x_0}$ en donde $x_0 = 0,001$ es la lectura del temblor nivel cero, con x y x_0 medidos a una misma distancia del epicentro.
- La intensidad de sonido es una expresión de la cantidad de energía que pasa por un centímetro cuadrado de área transversal en un segundo, es decir, la densidad de flujo de energía. El decibelio (dB) es la unidad relativa utilizada para expresar la relación entre dos magnitudes acústicas o bien entre una magnitud acústica y otra magnitud de referencia. La intensidad del sonido en decibelios se calcula como:

  $$I_{dB} = 10 \log_{10} \left(\frac{I}{I_0} \right)$$

  en donde I_{dB} es la intensidad sonora en decibelios, $I(W/m^2)$ intensidad sonora en escala lineal, $I_0 = 10^{-12} Watts/m^2$ el umbral de audición.
- En química, el pH de una solución es la medida de la acidez de la solución. El pH se calcula como: $pH = -\log[H^+]$ con $[H^+]$ la concentración de iones de hidrógeno en la solución. El rango de pH es de 0 a 14. El agua pura, una solución neutra, tiene un pH de 7. Un ácido como el vinagre tiene un pH menor que 7 mientras que una solución alcalina como el amoniaco tiene un pH mayor que 7.
- Si invertimos C_0 colones (valor presente) a una tasa de interés anual i (porcentual) compuesta n veces al año, entonces la cantidad (valor futuro) obtenida t años después es dada por: $C(t) = C_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{n}\right)^{nt}$. Si el interés se compone continuamente $(n \to \infty)$ entonces $C(t) = C_0 \cdot e^{it}$.
- El término inflación se utiliza para describir la pérdida de valor de la moneda. Si la tasa de inflación promedio es de r por ciento por año, entonces el valor real de C_0 colones después de n años es: $C(n) = C_0 \cdot (1 - r)^n$.
- La ecuación $N(t) = N_0 \cdot e^{kt}$, $k > 0$ describe el crecimiento no limitado de una población en el instante t con N_0 la cantidad inicial de los miembros de la población

y k la tasa de crecimiento poblacional. La ecuación logística $N(t) = \frac{c}{1+a\cdot e^{-bt}}$, siendo c el valor umbral de la población; el tamaño de la población tiende a c cuando t tiende a infinito, b es la tasa de crecimiento (si es positivo) o la tasa de decaimiento (si es negativo).

* La cantidad de material radioactivo presente en el instante t es dada por $A(t) = A_0 \cdot e^{-kt}$, $k > 0$, con $A_0 = A(0)$ la cantidad inicial de material radioactivo y k la tasa de decaimiento. Todos los organismos vivos contienen carbono 12 (estable) y 14 (radioactivo con vida media de 5600 años). Cuando un organismo muere, la cantidad de carbono 12 no cambia mientras que la de carbono 14 disminuye, y esto hace posible poder calcular cuándo murió el organismo.
* La temperatura u de un cuerpo en cualquier instante t es modelada por la función: $u(t) = T + (u_0 - T) \cdot e^{-kt}$, $k > 0$, en donde T es la temperatura (constante) del medio ambiente, $u_0 = u(0)$ es la temperatura inicial del cuerpo. El modelo se conoce como ley de Newton de enfriamiento.
* La ecuación altimétrica establece que la presión atmosférica disminuye con la altitud (sobre el nivel del mar) según la ley $P(h) = P_0 \cdot e^{-h/800}$, con P_0 la presión a nivel del mar ($h = 0$), h dada en metros.

Bibliografía

Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires. Secretaría de Educación. Dirección General de Planeamiento. Dirección de Currícula. (2006). *Cálculo mental con números racionales: Apuntes para la enseñanza*. Argentina: Plan plurianual para el mejoramiento de la enseñanza 2004-2007. Recuperado de http://www.buenosaires.gov.ar/areas/educacion/curricula/pdf/primaria/calculo_racional_web.pdf

Katz, V. (2010). *A History of Mathematics*. An introduction. Tercera Edición. Addison-Wesley.

Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (2012). *Programas de estudio de Matemáticas para la Educación General Básica y el Ciclo Diversificado*. San José, Costa Rica: autor.

Ruiz, A. (1999). *Geometrías no euclidianas: Breve historia de una gran revolución intelectual*. San José, Costa Rica: Editorial de la Universidad de Costa Rica.

Ruiz, A. (2003). *Historia y filosofía de las Matemáticas*. EUNED, San José, CR.

Smorodinski, Y. (1983) *La temperatura*. Moscú: Mir.

The National Council of Teachers of Mathematics (2006) *Historical topics for the Mathematics classroom*. Reston: NCTM, Inc.

Vázquez, A. M. (2006). Grecia, un universo de agua. Disponible en http://info.uned.es/geo-1-historia-antigua-universal/ PDF/09_GRECIA_AGUA %20Y %20CULTURA.pdf

Créditos

Este documento de apoyo a la implementación de los nuevos programas de Matemáticas fue elaborado por el proyecto *Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica*.

Este proyecto del Ministerio de Educación Pública de Costa Rica es apoyado financieramente por la Fundación Costa Rica-Estados Unidos de América para la Cooperación.

Autores

Ángel Ruiz

Edison De Faria Campos

Edwin Chaves Esquivel

Hugo Barrantes Campos

Jonathan Espinoza González

Luis Armando Hernández Solís

Marianela Zumbado Castro

Miguel González Ortega

Ricardo Poveda Vásquez

Revisores

Angel Ruiz

Christiane Valdy

Damaris Oviedo Arce

Grace Vargas

Javier Barquero

Susanne Blais

Editor gráfico del documento original

Miguel González Ortega

Edición filológica

Julián Ruiz

Director general del proyecto

Ángel Ruiz