Creando certeza en las ideas matemáticas vía el uso de tecnología digital[1]

Eduardo Basurto Hidalgo
Benemérita Escuela Nacional de Maestros
México
basurto.e@gmail.com

Resumen[2]

La incorporación de tecnologías digitales en el aula es cada vez más una realidad en muchos países, no obstante el dotar de dispositivos a las escuelas o incluso en algunos casos a cada estudiante, es apenas el cierre de la primera brecha digital, la del equipamiento, pero queda una segunda brecha digital que apenas comienza a cerrarse, la de lograr más y mejores aprendizajes apoyados en el uso de estos dispositivos. Por tal motivo, el presente trabajo pretende mostrar ideas puntuales sobre el uso de tecnología digital que permiten llevar a estudiantes de educación media a tener un pensamiento más plausible, es decir a tener certeza sobre la viabilidad de sus ideas en matemáticas, aún sin la presencia de pruebas formales que son factibles de exigirse hasta la educación superior.

Palabras clave

Tecnologías, digitales, pensamiento plausible.

Abstract

The incorporation of digital technologies into the classroom is an increasing reality in many countries. However, just giving devices to schools, or in some case to all students, barely closes the first digital gap, the equipment, but the second digital gap remains which is just beginning to close, that of offering more and better learning supported by the use of these devices. Therefore, this present work attempts to show specific ideas for using digital technology that permit secondary students to justify their thinking, that is, to be certain on the viability of their mathematical ideas, even without the use of formal proofs that cannot be required until higher education.

Key words

Digital technologies, justification of thinking.

[1] Este trabajo corresponde a una conferencia paralela dictada en la XIV CIAEM, celebrada en Tuxtla Gutiérrez, Chiapas, México el año 2015.

[2] El resumen y las palabras clave en inglés fueron agregados por los editores.

Recibido por los editores el 10 de noviembre de 2015 y aceptado el 15 de enero de 2016.

1. Introducción

El número de niños matriculados en primaria y secundaria en América Latina y el Caribe pasó de 53 millones a 127 millones entre 1970 y 2010. De hecho en el mismo periodo de tiempo el promedio del total de años de escolaridad completos en América Latina y el caribe prácticamente se ha duplicado como muestran las siguientes Figuras 1 y 2.Con lo que es posible considerar que en estas décadas ha existido un avance en la permanencia y cobertura educativa. Esto evidentemente no es equivalente a una mejora en la calidad de educación ya que en esta última intervienen más factores.

Por otro lado en términos de tecnología digital cuando se hace referencia a la brecha digital es necesario distinguir dos dimensiones. La primera es la brecha internacional, que plantea problemas clásicos sobre la difusión "relativamente lenta e irregular" del progreso tecnológico desde los países de origen hacia el resto del mundo. La segunda dimensión es la brecha doméstica la cual se centra en la inclusión universal, el crecimiento con equidad y la aparición de una nueva forma de exclusión. CEPAL (2003)

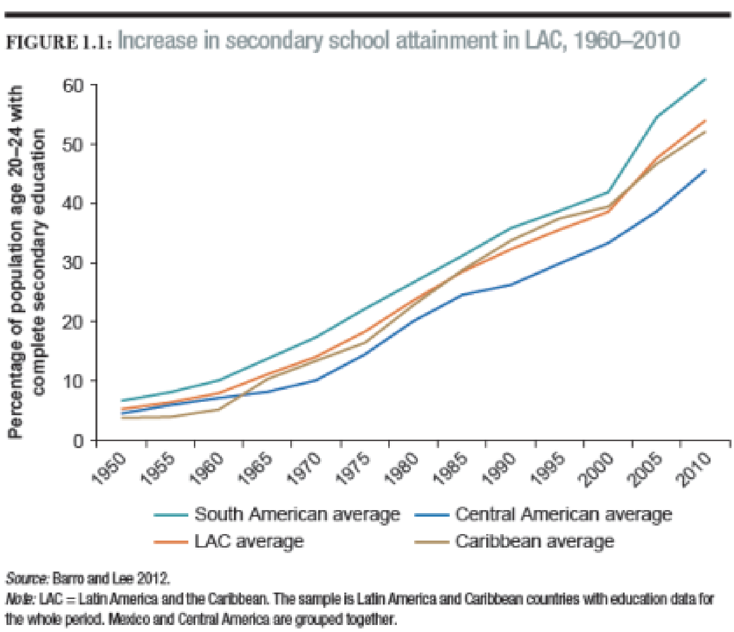


Figura 1: Great Teachers: How to Raise Student Learning in Latin America and the Caribbean (2014).

TABLE 1.1: Average educational attainment of the adult population, 1960–2010
years of schooling completed

	1960	1970	1980	1990	2000	2010
Caribbean average	4.3	6.1	7.5	8.9	9.3	10.3
Central American average	3.8	4.5	6.2	7.4	8.2	9.6
South American average	4.5	5.9	7.2	8.3	8.9	10.5
LAC average	4.3	5.5	6.9	8.2	8.8	10.2
East Asian average	5.3	7.3	8.6	9.9	10.8	12.3
OECD average	7.7	9.0	10.1	10.8	11.3	12.1

Source: Barro and Lee 2012.
Note: LAC = Latin America and the Caribbean; OECD = Organisation for Economic Co-operation and Development. Based on average years of schooling completed for the population age 20 to 24. The sample is Latin America and Caribbean countries with education data for the whole period. The OECD average is calculated for 33 countries with education data for whole period. The East Asian average is calculated for four countries and two special administrative regions with education data for the whole period. Full table in Annex 1.1.

Figura 2: Great Teachers: How to Raise Student Learning in Latin America and the Caribbean (2014).

En esta segunda dimensión y en relación al sector educativo, existe una primera brecha digital en la que uno de sus aspectos es el acceso. Al respecto en México, cálculos con base en el *Censo de Escuelas, Maestros y Alumnos de Educación Básica y Especial* (CEMABE, 2013), indican que en promedio el 45.6 % de la escuelas de educación preescolar, el 64.2 % de las escuelas de educación primaria y el 85.1 % de las escuelas de educación secundaria cuentan con equipos de cómputo que sirven. Lo cual es interesante comprobarlo con la información contenida en la Figura 3.

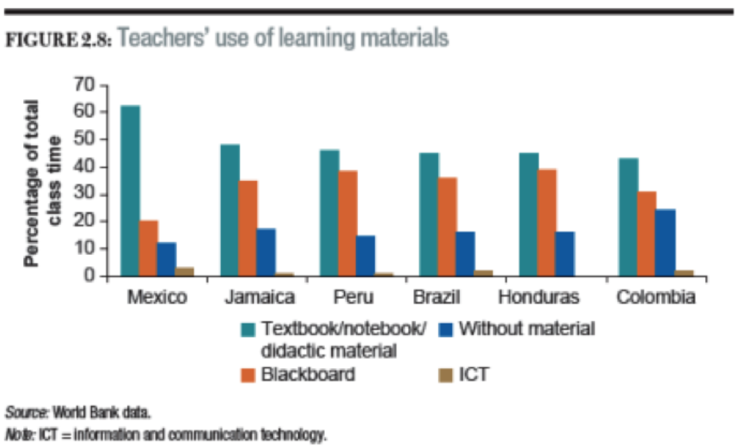


Figura 3: Great Teachers: How to Raise Student Learning in Latin America and the Caribbean (2014).

Por lo que podemos observar que a pesar de que se ha avanzado en el acceso, queda por abordar una segunda brecha digital en la educación, referida al uso y apropiación de estas tecnologías para el aprendizaje.

2. Aprovechemos las herramientas

El hombre ha podido extender sus capacidades cognitivas vía la interacción establecida con herramientas materiales y simbólicas. El desarrollo del conocimiento ha estado acompañado del uso de las tecnologías cognitivas. Investigaciones como las de Duval (1998), Godino y Batanero (1999), D'Amore (2001), entre otros, han afirmado el hecho de que la actividad matemática, dada la generalidad de su objeto de estudio, es esencialmente simbólica.

Como menciona Moreno (2014), el conocimiento depende, en todos los casos, de la mediación de los sistemas semióticos de representación. En el caso de las matemáticas, nos permite llegar a la conclusión de que no existen representaciones intrínsecas de los mismos, no hay pues objetos matemáticos al margen de una actividad semiótica. Aquí es importante distinguir entre el problema epistemológico y el didáctico. En el primer caso, el objeto matemático "nace" cuando producimos una representación que nos permite hablar de una experiencia en trance de ser matematizada. Ahora bien, desde la perspectiva didáctica, quien aprende está sometido a la presión de un objeto frente a él y su problema consiste en integrar las distintas perspectivas que ofrecen los sistemas de representación en juego. "El sentimiento de que algo está allí, debajo de las representaciones, conduce a una ilusión de realismo como si las representaciones tan solo describieran una realidad que ya existía anteriormente, al margen de las representaciones"

> Al refractar el objeto matemático en el medio digital, aparecen posibilidades nuevas para la justificación y la prueba de fenómenos nuevos asociados al objeto ahí representado. De ninguna forma insinuamos una sustitución abrupta de la epistemología tradicional, sino, más bien, subrayamos que estamos entrando a una nueva fase de exploración y de encuentro de formas distintas (pero no contradictorias entre ellas) de representar y concebir el objeto matemático. Ese es el rol principal de los objetos borde: nos brindan la posibilidad de considerar simultáneamente dos formas de conceptualizar: la digital y la de lápiz y papel. Moreno (2014)

Por otra parte, ha surgido una creciente utilización de la tecnología digital en los procesos de enseñanza - aprendizaje de las matemáticas como lo muestran los trabajos de Arzarello (2004), Borba y Villareal (2006), Artigue (2002), Vérillon y Rabardel (1995), Guin y Trouche (1999), entre otros.

Estos hechos vuelven necesario recurrir a la semiótica para entender los procesos de significado y sentido expresados en sistemas de signos surgidos en las producciones verbales y escritas de los sujetos al resolver tareas donde intervienen tecnologías digitales.

3. Propósito del trabajo

Se pretende generar la exploración de situaciones problemáticas cotidianamente incluidas en las currícula de la enseñanza media en matemáticas en México, a través de entornos tecnológicos digitales con prestaciones didácticas en sus aplicaciones, tales como la retroalimentación inmediata entre distintas representaciones de un mismo objeto matemático, así como la exploración dinámica de dichas representaciones. Esto a fin de reconocer la posibilidad que este tipo de dispositivos tiene para reinventar secuencialmente las situaciones problemáticas y llevarlas más allá de la simple ejecución sin una trayectoria reflexiva de dichos tipos de problemas, además de hacer factible una mayor certeza en las conjeturas de los estudiantes sin necesidad de pruebas formales y optimizando los procesos de abstracción.

4. Perspectiva teórica

En taller analizamos la evolución cognitiva de los sujetos desde el enfoque de la aproximación instrumental, dado que las acciones instrumentales producen una versión sígnica del conocimiento. Artigue (2002) menciona que un instrumento se diferencia del artefacto físico que lo origina por ser *"una entidad mixta, parte artefacto y parte proyectos cognitivos los cuales lo hacen un instrumento" (p.253)*. La conversión del artefacto en instrumento involucra una evolución en los diferentes usos del artefacto. Este proceso es llamado ***génesis instrumental.***

El proceso de *génesis instrumental* según Artigue (2002) se desarrolla en dos direcciones:

La primera se enfoca hacia el artefacto, asimilando progresivamente sus potencialidades y limitaciones, transformándolas para usos específicos. Esta parte es conocida como **:** ***instrumentalización del artefacto***

La segunda se dirige al sujeto, principalmente a la apropiación de planes de acción instrumentada los cuales eventualmente tomarán forma de técnicas instrumentadas que permitan dar respuestas a tareas: ***instrumentación***

El siguiente esquema retomado de Guin y Trouche (1999) intenta esquematizar el proceso de génesis instrumental.

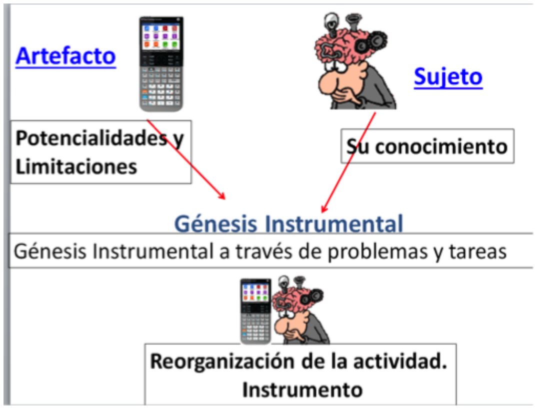


Figura 4: Esquema del proceso de génesis instrumental.

5. Resolución de problemas y el uso de tecnología digital

Menciona Santos (2007) que "El método inquisitivo se refiere a la importancia de que los estudiantes desarrollen la comprensión del conocimiento matemático a partir de la identificación de dilemas y la formulación de preguntas que se representan y exploran en términos de recursos y estrategias matemáticas."

Este uso constante de herramientas computacionales permite a los estudiantes construir representaciones dinámicas de los conceptos y problemas matemáticos, lo cual resulta importante para realizar exploraciones, reconocer conjeturas y eventualmente proponer argumentos que las justifiquen o soporten.

La cita anterior refleja la esencia del enfoque actual de muchas curricula de matemáticas en diversos países, ya que, en todos ellos, este ciclo de visualizar, reconocer, examinar, argumentar, y comunicar resultados son procesos fundamentales del quehacer de la disciplina que los estudiantes deben practicar sistemáticamente. Ahora bien estos ciclos pueden ser enriquecidos de manera sustancial con la ayuda de herramientas de tecnología digital.

El empleo de instrumentos de tecnología digital en la construcción del conocimiento matemático de los estudiantes no solamente facilita la identificación e implementación de estrategias de resolución, sino también potencia el repertorio de las heurísticas. El uso de la tecnología influye directamente en la conceptualización y forma de interactuar con los problemas.

Esto es posible ya que las herramientas digitales permiten al estudiante despojarse de esfuerzos largos y complejos en algoritmos que si bien son parte importante del conocimiento matemático que el estudiante debe desarrollar, también es fundamental que centre su actividad cognitiva de análisis de relaciones, regularidades, ejemplos y contraejemplos, ya que en muchos casos el estudiante desvía la mayor parte de su atención a las técnicas y procesos en momentos en los que debe centrarse en la reflexión.

Kaput (1992) afirmó que

> las limitaciones mayores del uso de la computadora en las siguientes décadas serían probablemente menos debidas a las limitaciones tecnológicas y más a las limitaciones de la imaginación humana y a las restricciones de los viejos hábitos y estructuras sociales (p. 515).

A más de dos décadas de esta afirmación es evidente que se ha vuelto una realidad ya que hoy en día, una dificultad al intentar utilizar herramientas digitales en la enseñanza de la matemática, es el cambio necesario en la actuación pedagógica del profesor, ya que su uso implica un cambio de estrategia de enseñanza. Ya no es útil un esquema expositivo y lineal. Se requiere diseñar y experimentar estrategias para facilitar la interacción del alumno con los conceptos matemáticos. Así, surgen actividades como: experimentar, conjeturar, generalizar, poner a prueba hipótesis, deducir, reflexionar, etc., que son elementos extraños a una situación de clases expositiva normal.

Para organizar la forma en que la tecnología pueda tener efectos importantes en la educación de las matemáticas, Rubin (2000) propone cinco tipos de oportunidades generadas por las TIC, las cuales son: conexiones dinámicas; herramientas sofisticadas; comunidades ricas en recursos matemáticos; herramientas de diseño y construcción; y herramientas para explorar complejidad.

En este sentido, el dispositivo tecnológico como la calculadora HP Prime concebido desde su diseño para permitir este tipo de oportunidades de manera natural desde sus módulos de aplicaciones creados para ofrecer mayor ergonomía cognitiva a los estudiantes.

Por ejemplo, sin mayores técnicas instrumentadas un alumno podrá explorar en cada aplicación diferentes representaciones de un mismo objeto matemático a través de la terna de herramientas, SYMB, PLOT y NUM, en cualquier aplicación ver Figura 5

Figura 5: Esquema de vinculación entre las herramientas de representación y las aplicaciones del dispositivo.

Dentro de sus módulos de aplicación esta la presencia de elementos dinámicos como se ve en la Figura 6.

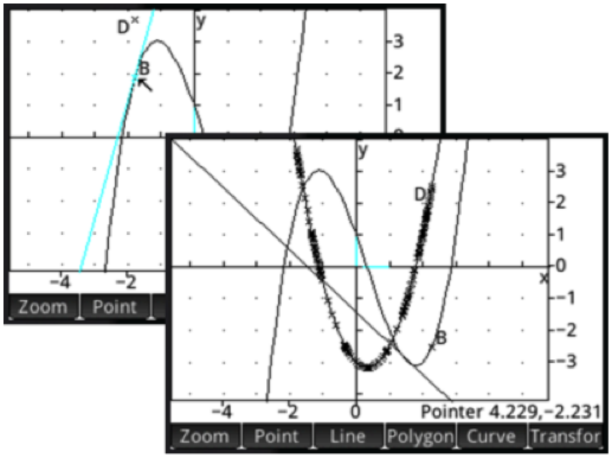


Figura 6: Ejemplo de elementos dinámicos en gráficas.

Al respecto de poder explorar la complejidad sin complicaciones técnicas se tiene un módulo de graficas avanzadas que permite profundizar en gráficos poco explorados como son, secciones cónicas, fórmulas generales de polinomios y ecuaciones implícitas en x e y entre otras.

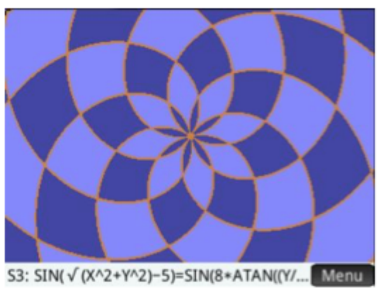


Figura 7: Ejemplo de un gráfico avanzado.

6. Desarrollo del Mini-curso

Se desarrollará en 4 partes:

La **primera parte** tiene como objetivos, discutir acerca de las posturas sobre el uso de tecnología digital en la enseñanza de las matemáticas, así como plantear dos situaciones digamos conocidas por su estructura en la mayoría de los curricula de los países de la zona, a fin de ser analizados y resueltos sin el uso de tecnología digital.

Situación 1:

Un tinaco tiene dos llaves para lograr una cierta mezcla de dos componentes, una de ellas puede llenarlo en diez minutos, si trabaja sola y a toda su capacidad; la otra, trabajando también sola, a toda su capacidad, puede llenarlo en veinte minutos. Si ambas llaves trabajan simultáneamente a toda su capacidad ¿Cuánto tiempo tardarán en llenar el tinaco?

Este problema será resuelto en el medio estático o de papel y lápiz junto con las estimaciones y discusión de los posibles caminos de resolución en este medio. Además de sus potencialidades en el entorno de aula como secuenciarían su intervención.

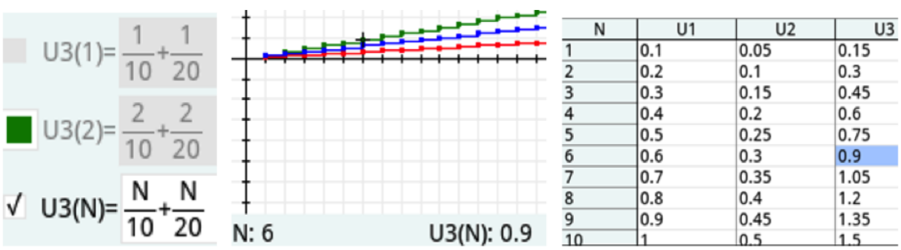
Situación 2:

Construiremos la representación gráfica de un teorema poco conocido que es el Teorema de Napoleón, el cual afirma que: Si se construyen tres triángulos equiláteros a partir de los lados de un triángulo cualquiera, todos al interior o todos al exterior, entonces los centros de los triángulos equiláteros forman también un triángulo equilátero.

La **segunda parte** pretende mostrar la nueva herramienta digital HP Prime Graphing Calculator, destacando las potencialidades que algunas de sus aplicaciones ofrecen desde el punto de vista de didáctico, y o no solo ejecutor como la mayoría de los dispositivos de su tipo.

En la **tercera parte** se pedirá a los asistentes al taller que analicen algunos aspectos de los problemas planteados en la primera parte del taller, vía ciertas aplicaciones del dispositivo HP Prime, con la finalidad de que al explorar las versiones digitales de los objetos matemáticos involucrados en dichos problemas hagan vivencial el potencial que tiene el uso de entornos tecnológicos en problemas que cotidianamente se incluyen en las curricula, pero analizados desde una exploración digital secuenciada.

Sobre la situación 1, se analizarán las variantes que ofrece el medio tecnológico para explorar la situación es su estado inicial por ejemplo vía sucesiones.



N	U1	U2	U3
1	0.1	0.05	0.15
2	0.2	0.1	0.3
3	0.3	0.15	0.45
4	0.4	0.2	0.6
5	0.5	0.25	0.75
6	0.6	0.3	0.9
7	0.7	0.35	1.05
8	0.8	0.4	1.2
9	0.9	0.45	1.35
10	1	0.5	1.5

Figura 8: Interacciones de las representaciones Symb, Plot y Num de la HP Prime en la aplicación de sucesiones.

De ahí se verá como a través del medio tecnológico se puede ir a donde antes o bien no se arribaba por falta de tiempo o por el nivel de complejidad en términos de algoritmos pero que no obstante siempre estuvo ahí para su análisis.

Como, ¿qué sucedería si tuviéramos más llaves?

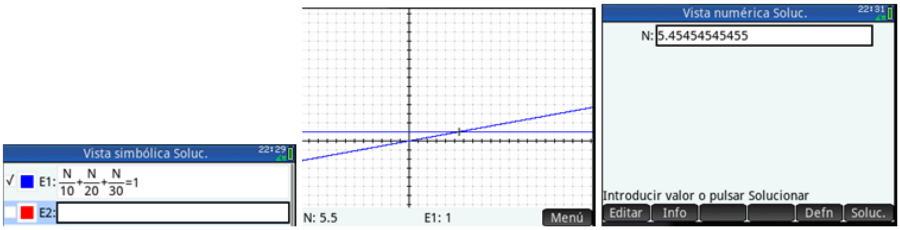


Figura 9: Interacciones de las representaciones Symb, Plot y Num de la HP Prime en la aplicación de ecuaciones.

O bien, ¿qué sucedería si no solo hubiera llaves que introducen líquido al tinaco y existieran también llaves que extrajeran liquido del tinaco a distintas velocidades?

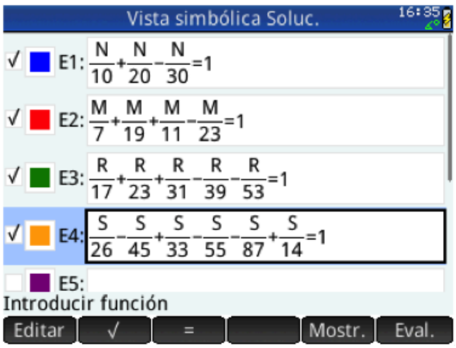


Figura 10: Exploración de varias posibilidades de llaves en la vista simbólica de ecuaciones.

En la situación 2, lo que es muy destacable es la interacción y distinción de las propiedades que pueden variar y las que no en la representación digamos ejecutable de la construcción gracias a sus prestaciones dinámicas.

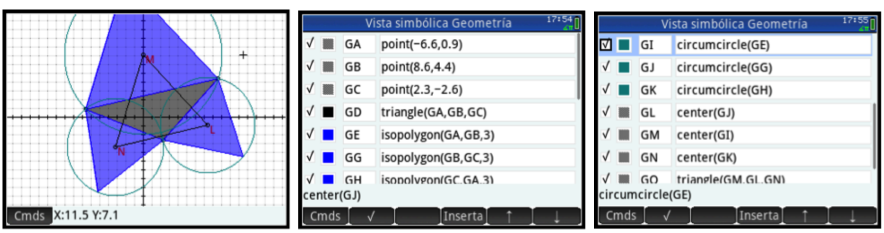


Figura 11: Interacciones de las representaciones Symb y Plot de la HP Prime en la aplicación de geometría.

La **cuarta parte** y cierre del taller pretende generar una discusión objetiva sobre las ventajas, desventajas, limitaciones, potencialidades y posibilidades de institucionalización de este tipo de tratamientos didácticos de los contenidos de la matemática escolar vía entornos digitales.

7. Conclusiones

Como todos sabemos ya son algunos años en que los sistemas educativos han intentado incorporar artefactos de tecnología digital que permitan mejorar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

No obstante como hemos visto, desde el punto de vista macro de la cobertura y permanencia en los grados escolares, así como en la llamada brecha digital; en educación el acceso es solo la primera parte, la segunda parte, en la que los equipamientos deben dar como fruto más y mejores aprendizajes, necesita la intervención de muchos aspectos entre los que destacan la capacitación de los docentes en servicio y en formación, así como implementar esquemas pedagógicos más efectivos y crear nuevos ambientes organizacionales en las aulas, para lo cual, entre muchas otras cosas; la creación de nuevas estructuras curriculares que den paso a estas innovaciones educativas, estructuras basadas en los resultados muchas investigaciones así como del análisis de experiencias de éxito.

Referencias y bibliografía

Artigue, M. (2002). Learning Mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning 7* (3), 245 – 274.

Arzarello, F. (2004). Mathematical landscapes and their inhabits: perceptions, languages, theories. *Plenary Lecture delivered at the ICME 10 Conference* . Copenhagen, Denmark. July 4-11.

Barbara B y Luque, J. (2014). *Great teachers: how to raise student learning in Latin America and the Caribbean.* World Bank Group.

Borba, M. y Villareal, M. (2006). *Humans – with – media and the reorganization of mathematical thinking* . New York: Springer.

CEPAL (Comisión Económica para América Latina y el Caribe) (2003) *Los caminos hacia una sociedad de la información en América Latina y el Caribe,* LC/G.2195/Rev. 1-P, Santiago de Chile

CEMABE. (2013) *Censo de escuelas, maestros y alumnos de educación básica y especial* . INEGI

D'Amore, B. (2001) Une contribution au débat sur les concepts et les objets mathématiques: la position «naïve» dans une théorie «réaliste» contre le modèle «anthropologique» dans une théorie «pragmatique». En A. Gagatsis (Ed), *Learning in Mathematics and Science and Educational Technology* (Vol. 1, pp. 131-162).

Duval, R. (1998). Signe et objet, I et II. *Annales de didactique et de sciences cognitives,* IREM de Strasburg, *6* , 139-196.

Godino, J. D; y Batanero, C. (1999). The meaning of mathematical objects as analysis units for didactic of mathematics. Paper presented at the *Proceedings of the First Conference of the European Society for Research Mathematics Education* .

Guin, D y Trouche, L. (1999). The complex process of converting tools into a mathematical instruments: The case of calculators. *International Journal of Computers for Mathematical Learning 3* (3),195 – 227.

Moreno, L. (2014). *¿Cómo impactan las tecnologías los currículos de la Educación Matemática?* Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática / Centro de Investigaciones Matemáticas y Metamatemáticas, Universidad de Costa Rica. - Año 8, No. 11 (Diciembre 2013). San José, C.R. : Centro de Investigaciones Matemáticas y Metamatemáticas, Universidad de Costa Rica, 2013- xi.

Rubin, A. (2000). *Technology meets math education: Envisioning a practical future forum on the future of technology in education.* En http://www.air-dc.org/forum/abRubin.htm

Santos, M. (2007). *Resolución de problemas matemáticos. Fundamentos cognitivos.* México: Trillas.

Vérillon, R. y Rabardel, G. (1995). Cognition and artifacts: A contribution to the study of thought in relation to instrumented activity. *European Journal of Psychology of Education 10* (1), 77 -101.