¿Cómo dar sentido a las situaciones de enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas? Algunos aspectos de la competencia docente del profesor[1]

Salvador Llinares
Departamento de Innovación y Formación Didáctica, Universidad de Alicante
España
sllinares@ua.es

Resumen[2]

La idea de competencia docente del profesor puede ser entendida como el ser capaz de usar el conocimiento de manera pertinente en el desarrollo de las tareas profesionales vinculadas a la enseñanza de las matemáticas. Un aspecto de la competencia docente es "mirar de manera profesional" la enseñanza de las matemáticas. Mirar de manera profesional debe ser entendido como poder identificar lo que es relevante para el aprendizaje de las matemáticas de los estudiantes e interpretarlo para fundamentar la toma de decisiones de acción según los objetivos planteados. Se presentan características de dos situaciones en las que es posible identificar rasgos de esta competencia: reconocer la legitimidad de las respuestas de los alumnos a algunas tareas matemáticas cuando éstas no reflejan un procedimiento estándar, y reconocer la progresión en la comprensión de los estudiantes de alguna idea matemática.

Palabras clave

Mirar profesionalmente, aprendizaje del profesor, formación de profesores de matemáticas.

Abstract

Mathematics Teachers' teaching competence can be understood as being able to use knowledge to carry out the different tasks related to mathematics teaching. One aspect of the teaching competence is being able to notice the mathematics teaching in a professional way. Professional noticing should be understood as being able to identify the relevant aspects of students' mathematics learning and make sense it in order to provide teaching decisions related to the learning objectives. In this lecture, I will present characteristics of this competence from two contexts: recognizing the legitimacy of students' responses to some mathematical tasks when the responses do not reflect a standard procedure and, recognizing the progress in the student's understanding of specific mathematical topics.

Key words

Professional noticing, teacher's learning, mathematics teacher education.

---

[1] Este trabajo corresponde a una conferencia paralela dictada en la XIV CIAEM, celebrada en Tuxtla Gutiérrez, Chiapas, México el año 2015.

Recibido por los editores el 10 de noviembre de 2015 y aceptado el 15 de enero de 2016.

1. Introducción

La enseñanza de las matemáticas es considerada una tarea compleja que implica la toma de decisiones en la que intervienen diferentes conocimientos (Ball, Thames, & Phelps, 2008; Escudero, & Sánchez, 2007). Para poder tomar decisiones acertadas para la enseñanza el profesor necesita poseer un conocimiento y tener información adecuada sobre las situaciones en las que tiene que actuar (Fernández, Callejo, & Marques, 2014). Reconocer esta segunda característica pone de relieve la competencia que permite al profesor de matemáticas dotar de cierto sentido a lo que está sucediendo en su clase para tomar las decisiones adecuadas. La competencia docente del profesor de matemáticas que recibe el nombre de "mirar profesionalmente" la enseñanza se caracteriza por el hecho de que el profesor sea capaz de reconocer los hechos que pueden ser relevantes en el aula para explicar el aprendizaje de las matemáticas (Fernández, Llinares & Valls, 2013, 2012, 2011; Fortuny, & Rodríguez, 2012; Mason, 2002; Zapatera, & Callejo, 2013). Reconocer y dar sentido a los hechos que suceden en la clase de matemáticas desde la perspectiva de poder explicar e informar el aprendizaje de las matemáticas permite generar información contextual para apoyar las decisiones de acción que debe tomar el profesor con el objetivo de favorecer el aprendizaje de sus alumnos.

La competencia docente "mirar profesionalmente" las situaciones de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas entendida de esta manera se ha revelado una competencia compleja ya que exige movilizar diferentes dominios de conocimiento en situaciones en las que el profesor debe tomar decisiones, lo que a veces genera la necesidad de gestionar "dilemas de enseñanza" (Llinares, 2013; Sánchez-Matamoros, Fernández & Llinares, 2014). Desde la perspectiva de la idea del "conocimiento en uso" que permite al profesor generar información sobre las situaciones de enseñanza, podemos identificar diferentes contextos en los que es posible reconocer ámbitos en los que el profesor debe generar información para tomar decisiones. Algunos de estos ámbitos son reconocer la legitimidad de las respuestas de sus alumnos a algunas tareas matemáticas cuando los procedimientos usados no reflejan un procedimiento estándar, o cuando se tiene que reconocer la progresión en la comprensión de los estudiantes.

2. Situación 1: Determinando la validez de la respuesta de los estudiantes

Existen situaciones durante la clase de matemáticas en las que los alumnos pueden generar respuestas a tareas desafiantes que no responden a procedimientos estandarizados. Estas respuestas son ventanas al razonamiento de los estudiantes y pueden proporcionar información relevante sobre la manera en la que los estudiantes están aprendiendo. Por tanto son ámbitos en los que es posible evidenciar la competencia docente del profesor y en particular a cómo da sentido a las situaciones de enseñanza-aprendizaje. Por ejemplo, en el contexto de aprender el significado del algoritmo de la multiplicación con números de dos dígitos, D. Francisco, un maestro en 4º curso pidió a sus alumnos que proporcionaran un problema que se pudiera resolver con la operación

27×14, y que luego lo resolvieran. El objetivo de D. Francisco era que sus alumnos pudieran empezar a generar historias que mantuvieran el significado del algoritmo de la multiplicación como un objetivo de aprendizaje[3].

Algunos de sus alumnos propusieron y discutieron la siguiente historia *"Tenemos 7 bolsas de 14 canicas y 2 cajas de 10 bolsas. ¿Cuántas canicas tenemos en total?"*, como una situación adecuada para la multiplicación propuesta. La solución de los alumnos de D. Francisco se apoyaba en la siguiente descomposición

$$27 \times 14 = (20 + 7) \times 14 = (2 \times 10) \times 14 + 7 \times 14$$

Esta expresión aritmética muestra el uso de la descomposición de los números (27 como $20 + 7$) y el uso de la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma $[a \times (b + c) = a \times b + a \times c]$. En esta situación, la legitimidad de la respuesta dada por estos alumnos de D. Francisco se apoya en la validez de las propiedades de las operaciones usadas. Después de la presentación de la situación, Ana, una de las alumnas de D. Francisco presentó la siguiente solución (Figura 1).

Yo pondría 3 cajas con 140 canicas cada una
Con 2 cajas tendría 280 canicas
Si pongo en la tercera caja 140, debería quitar 3 bolsas, porque en la historia no hay 30 bolsas, sino 27.Cada bolsa tiene 14 canicas, y si quitara 14 más 14 más 14, que son 42 canicas entonces la tercera caja tendría 140 menos 42, que son 98.
Yo añadiría esto a las canicas que tenía en las otras dos cajas, que tenían 280. Entonces 280 más 98, son 378 canicas

Figura 1: Solución de Ana al problema: *"Tenemos 7 bolsas de 14 canicas y 2 cajas de 10 bolsas. ¿Cuántas canicas tenemos en total?"*

La transcripción a expresiones aritméticas de la respuesta de Ana se indica en la Figura 2 siguiente. Para poder considerar la legitimidad de la respuesta de Ana, D. Francisco debe ser capaz de identificar lo que está diciendo Ana desde la perspectiva de las propiedades de las operaciones en la aritmética. En este caso mediante la posibilidad de "traducir" las palabras de Ana a expresiones aritméticas que permitan valorar su legitimidad y de esa manera poder decidir qué hacer a continuación. Una manifestación de la competencia docente sería el considerar relevante la respuesta de Ana para poder seguir indagando en los significados vinculados al algoritmo de la multiplicación de números naturales de dos dígitos.

Además para poder determinar la validez o no de la respuesta de Ana y en qué medida vale la pena indagar sobre ella en una discusión en la clase entera con los demás alumnos, exige a D. Francisco tener que interpretar dicha resolución, y en particular la legitimidad de los pasos dados proporcionada por las propiedades de las operaciones aritméticas. La figura 3 siguiente muestra esta relación, a partir de la cual D. Francisco,

[3] Viñeta adaptada de Sowder et al., (1989): Aritmética como resolución de problemas. *Arithmetic Teacher,* March

el maestro de Ana, puede dotar de sentido la respuesta dada y estar en condiciones de tomar decisiones de manera informada sobre qué hacer a continuación en su lección.

(30) x 14 = (3x10) x 14 = 3 x (10x14) (2x10) x 14 = 280 27 x 14 = (30 -3) x 14 = 30x14 – 3 x 14 3 x14 = 42 140 - 42 = 98 27 x 14 = (30-3) x 14 = (20 + 7) x 14 = [(20 +(10-3)] x14 = 20 x 14 + (10x14 - 3x14) = 280 + (140 - 42) = = 280 + 98 = 378

Figura 2: Traducción a expresiones aritméticas de la solución propuesta por Ana.

La solución de ANA	**La transcripción de la respuesta de Ana a expresiones aritméticas**	**Las propiedades de las operaciones con los números naturales que legitiman la respuesta de ANA**
Yo pondría 3 cajas con 140 canicas cada una.	(30) x 14 = (3x10) x 14 = 3 x (10x14)	Asociativa de la multiplicación
Con 2 cajas tendría 280 canicas	(2x10) x 14 = 280	
Si pongo en la tercera caja 140, debería quitar 3 bolsas, porque en la historia no hay 30 bolsas, sino 27.	27 x 14 = (30 –3) x 14 = 30x14 – 3 x 14	Distributiva de la multiplicación respeto a la suma/resta
Y cada bolsa tiene 14 canicas, y si quitara 14 más 14 más 14, que son 42 canicas.	3 x14 = 42	
Entonces la tercera caja tendría 140 menos 42, que son 98.	140 - 42 = 98	Descomposición de los números naturales
Yo añadiría esto a las canicas que tenía en las otras dos cajas, que tenían 280. Entonces 280 más 98, son 378 canicas	27 x 14 = (30-3) x 14 = (20 + 7) x 14 = [(20 +(10-3)] x14 = 20 x 14 + (10x14 -3x14) = 280 + (140-42) = = 280 + 98 = 378	Distributiva de la multiplicación respeto de la suma/resta

Figura 3: Propiedades de las operaciones con los números naturales que legitiman la respuesta de Ana.

Ser capaz de generar información adecuada sobre las situaciones de enseñanza-aprendizaje como en el caso descrito exige ser capaz de reconocer en qué medida la resolución dada por Ana tiene la validez suficiente para decidir seguir indagando sobre ella con los demás alumnos desde el punto de vista del objetivo de aprendizaje pretendido: el significado del algoritmo de la multiplicación de números naturales de dos cifras. Algunas de las decisiones que debe tomar D. Francisco a continuación se vinculan a respuestas a preguntas como

- ¿en qué medida vale la pena indagar sobre lo que ha propuesto Ana con la clase entera?
- ¿de qué manera se puede relacionar lo realizado por Ana con la comprensión del algoritmo estándar de la multiplicación?, y
- ¿de qué manera se podía gestionar las situaciones siguientes en el aula?

En este tipo de contextos, el maestro debe ser capaz de reconocer lo que puede ser pertinente en relación al objetivo de aprendizaje pretendido, debe dotarle de sentido, y tomar decisiones de lo que hacer a continuación. Puede ser que en cada contexto la respuesta a estas cuestiones, y por tanto la posibilidad de dar una determinada respuesta a la situación planteada por la respuesta de Ana no sea unívoca. La manera en la que el maestro decida continuar la lección y usar o no la respuesta de Ana en alguna medida para perseguir el objetivo de aprendizaje pretendido puede estar mediado por las condiciones del contexto, pero también por las creencias/concepciones de D. Francisco sobre la enseñanza, sobre el aprendizaje y sobre su papel como maestro en las situaciones de enseñanza-aprendizaje. Sin embargo, este es el sentido dado a la competencia docente "mirar profesionalmente" la enseñanza de las matemáticas. Esta competencia permite estar en condiciones de gestionar las situaciones de enseñanza de manera adecuada para cada contexto como una evidencia de lo que debemos entender "conocimiento en uso" para identificar y reconocer lo que puede ser relevante, para interpretarlo y generar información sobre la situación que permita fundamentar la toma de decisiones.

3. Situación 2: Reconociendo la progresión en la comprensión matemática de los estudiantes

Reconocer la construcción progresiva de los significados de los conceptos matemáticos es una característica de la competencia docente del profesor, y en particular de lo relativo a ser capaz de "mirar profesionalmente" el pensamiento matemático de los estudiantes. Por ejemplo, en el aprendizaje de las fracciones un maestro se puede encontrar con diferentes respuestas al mismo tipo de tareas que le permiten identificar características de cómo los estudiantes dotan de significado de manera paulatina los diferentes elementos que configuran los conceptos matemáticos. Por ejemplo, un contexto que permite dotar de significado a la idea de fracción es el de reparto equitativo. Sin embargo, las diferentes características que pueden reflejar las tareas propuestas en situaciones de repartos equitativos permiten mostrar rasgos que definen la progresión de la comprensión de la idea de fracción al evidenciar niveles cada vez más sofisticados de razonamiento.

Por ejemplo, en el proceso de construcción del significado de la fracción, algunos estudiantes inicialmente solo asocian las fracciones a representaciones familiares que son usadas por los maestros. Por ejemplo, ante la *TAREA 1: "Cuatro personas se quieren repartir equitativamente una pizza. Dibuja lo que le tocara a cada uno"*. Javier, uno de los estudiantes respondió que cada uno obtiene un trozo dibujando lo siguiente (Figura 4) . En esta respuesta puede que la respuesta "un trozo" no evidencie el significado de "un cuarto", como uno de las cuatro partes equivalentes generadas a partir del todo.

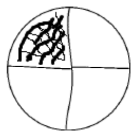

Figura 4: Respuesta de Javier a la Tarea 1: *"Cuatro personas se quieren repartir equitativamente una pizza. Dibuja lo que le tocara a cada uno"*

Sin embargo en un determinado nivel de desarrollo del significado de fracción, los estudiantes pueden no comprender los elementos matemáticos que definen la fracción en estas situaciones de repartos equitativos – por ejemplo, que todas las partes deben ser equivalentes en tamaño a partir del *reconocimiento de la unidad/el todo*, y que la fracción a/b, procede de iterar *a* veces la fracción unitaria *1/b*.

De esta manera, Javier el mismo estudiante que puede haber representado bien la fracción 1/4 en la tarea anterior, cuando se le pide *TAREA 2: Representar 5/4 de un rectángulo*, dibujó lo siguiente (Figura 5) (Llinares, 2002)

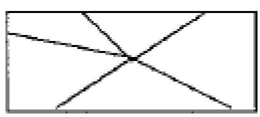

Figura 5: Respuesta de Javier a la Tarea 2: *Representar 5/4 de un rectángulo.*

En este caso el estudiante intenta recordar imágenes previas que usó para representar fracciones, más que pensar en el proceso de:

- reconocer la unidad/el todo (el rectángulo)
- identificar la fracción unitaria a partir de la división del todo en 4 partes congruentes (*1/4* del rectángulo)
- iterar *5 veces* la fracción unitaria *1/4* para representar la fracción *5/4.*

La respuesta de Javier indica que los procesos de dividir de manera congruente una unidad e iterar no forman parte del razonamiento vinculado a las fracciones. Mientras, la idea de todo está implícita en la Tarea 1 ya que el círculo se asume como unidad sin explicitarlo, en la Tarea 2 su respuesta permitía poner de manifiesto que el significado de unidad no formaba parte de su razonamiento con las fracciones. La respuesta a la Tarea 2 pone de manifiesto dos atributos de la idea de fracción que en estos momentos no forman parte del significado que Javier tiene de la idea de fracción. En este caso además, su respuesta pone de manifiesto su dificultad en concebir una representación de una fracción mayor que el todo (representación de una fracción impropia).

Después de un determinado tiempo, el maestro de Javier propone la siguiente *TAREA 3: Juan tiene que repartir equitativamente 3 pizzas entre 5 amigos. ¿Qué fracción de pizza le corresponde a cada amigo?* Javier dibuja las tres pizzas, y hace el siguiente dibujo (Figura 6) (Llinares, 2002).

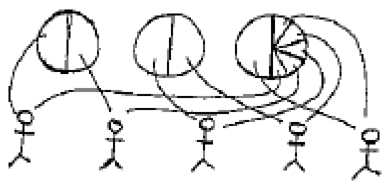

Figura 6: Respuesta de Javier a la Tarea 3: *Juan tiene que repartir equitativamente 3 pizzas entre 5 amigos. ¿Qué fracción de pizza le corresponde a cada amigo?*

Javier ha dibujado 3 círculos para representar las tres pizzas, ha dividido cada círculo por la mitad y ha dibujado una línea para vincular cada mitad a uno de los 5 amigos. Como le queda una mitad, la divide en 5 partes, y vincula cada una de estas partes a uno de los amigos mediante otra línea. Esta forma de proceder le permite contestar diciendo que *cada amigo ha recibido la mitad de una pizza más la quinta parte de una mitad* (la traducción aritmética de su respuesta seria, 1/2 + 1/5de 1/2). Sin embargo, Javier puede tener dificultades en comprender que lo obtenido es 3/5 de una pizza.

En estos momentos, Javier parece que comprende cómo usar la idea de división para crear fracciones unitarias (1/2), pero no tenemos evidencias de que pueda comprender la idea de fracciones no-unitarias (3/5) como una unidad contable que permita iterarla de la misma forma en la que parece que ha usado la fracción unitaria 1/2. Es decir, la posibilidad de iterar 5 veces 3/5 para obtener 3. Sabemos que usar las fracciones no-unitarias (como la fracción 3/5) como unidades iterativas para reconstruir otra fracción resulta difícil para algunos alumnos y marca un salto en la comprensión conceptual de la idea de fracción en situaciones de repartos equitativos.

Estos tres ejemplos pueden ser considerados evidencias de la progresión conceptual de la idea fracción que pone de manifiesto diferentes momentos por los que pasa Javier, y permiten considerar los significados que Javier debe ir construyendo para llegar a comprender la idea de fracción. Los diferentes niveles de sofisticación en el pensamiento de Javier en relación a la idea de fracción ante tareas de reparto equitativo usando como referente el modelo área se ponen de manifiesto a través de

- reconocer solo las partes de un todo ante figuras familiares
- reconocer que las partes deben ser congruentes en tamaño y no necesariamente en forma

- comprender la idea de fracción unitaria (1/a) como una unidad iterativa a partir de la cual representar fracciones propias ($f < 1$). Comprendiendo las fracciones como dividir un todo en partes iguales y seleccionar algunas partes.
- dotar de significado a la idea de unidad/el todo
- usar la idea de fracción unitaria para representar fracciones impropias ($f > 1$) mediante la iteración de la fracción unitaria
- comprender los símbolos usados para las fracciones procedente de acciones de iterar fracciones unitarias y juntar (es decir, ver después de un proceso de reparto que $1/2 + 1/5 de 1/2 = 6/10 = 3/5$).

El que un maestro llegue a ser consciente de las características de la progresión de la comprensión conceptual de las ideas matemáticas de sus alumnos, y que sea capaz de reconocer e identificar los elementos matemáticos que están implícitos en las respuestas de sus alumnos debe ser considerado una manifestación de su competencia docente, y en particular si consideramos la competencia docente "mirar profesionalmente" el pensamiento matemático de los estudiantes. Desde esta perspectiva, la competencia docente "mirar profesionalmente" implica ir más allá de reconocer si los estudiantes responden correctamente o no a las tareas propuestas. Implica identificar los elementos matemáticos que intervienen en las respuestas de los estudiantes y considerarlos integrantes de una trayectoria de aprendizaje del concepto matemático, y por tanto vistos desde la perspectiva del aprendizaje y no solo desde las matemáticas.

La importancia de que los maestros sean capaces de reconocer diferentes niveles de sofisticación en el desarrollo de la comprensión de los conceptos matemáticos en sus alumnos radica en que les permite situar las evidencias dadas por las respuestas de sus estudiantes en relación a trayectorias de aprendizaje sintetizadas desde las investigaciones sobre el aprendizaje de las matemáticas. Estas trayectorias de aprendizaje están definidas a partir de diferentes niveles de sofisticación por los que los estudiantes pasan al trasladarse desde sus ideas intuitivas a una comprensión más formal de las matemáticas, reconociendo los obstáculos que los estudiante deben superar y los procesos mentales que subyacen al desarrollo del concepto (Sarama, & Clements, 2009).

4. Algunas observaciones finales

Mirar de manera profesional la enseñanza de las matemáticas debe ser entendido como ser capaz de identificar lo que es relevante para el aprendizaje de las matemáticas de los estudiantes e interpretarlo para fundamentar la toma de decisiones de acción según los objetivos planteados (Sherin, Jacobs, & Philipp, 2010). En este trabajo hemos presentado algunas características de dos situaciones en las que es posible identificar rasgos de esta competencia: reconocer la legitimidad de las respuestas de los alumnos a algunas tareas matemáticas cuando los procedimientos de resolución no reflejan un procedimiento estándar, y reconocer la progresión en la comprensión de los estudiantes de alguna idea matemática.

La identificación de estas características subraya que la competencia docente "mirar profesionalmente" se apoya en la intersección de dos dominios de conocimiento. Por una parte, sobre el conocimiento de matemáticas que fundamenta las matemáticas escolares. En la primera situación descrita aquí este conocimiento se pone de manifiesto por conocer las propiedades de las operaciones aritméticas y ser usadas para dotar de sentido a la respuesta de su alumna. Por otra parte, sobre el conocimiento de diferentes niveles de sofisticación en el razonamiento de los estudiantes que definen trayectorias de aprendizaje en relación a un tópico particular, como se ha descrito con el significado de la idea de fracción vinculado a las situaciones de reparto equitativo.

Sin embargo, lo que articula estos dos dominios de conocimiento del profesor es la capacidad de identificar lo que puede ser considerado relevante en el aprendizaje de las matemáticas en los estudiantes e interpretarlo como una forma de generar información sobre la situación de enseñanza-aprendizaje en la que se encuentra y tomar decisiones de acción con fundamento (Penalva, Rey, & Llinares, 2013; Prieto, & Valls, 2010). De esta manera los mecanismos de identificar, e interpretar el aprendizaje de los estudiantes para tomar decisiones de acción que constituyen el andamiaje de la competencia docente mirar profesionalmente las situaciones de enseñanza-aprendizaje constituyen ámbitos de cómo el profesor usa e integra diferentes dominios de conocimiento como una característica de su competencia docente.

Estas características están generando reflexiones en el contexto de la formación de profesores en el sentido de articular medios para que pueda empezar a desarrollarse durante la formación inicial (Llinares, 2012-a, 2012-b). Como consecuencia, esta situación está planteando cuestiones relativas al aprendizaje del profesor y cómo es posible determinar características de la manera en la que los mecanismos de identificar, interpretar y tomar decisiones de acción movilizan y relacionan diferentes dominios de conocimiento. En la medida en la que las investigaciones sobre el aprendizaje del profesor proporcionen nuevo conocimiento sobre estos procesos estaremos mejor capacitados para tomar decisiones como formadores de profesores (Llinares, & Valls, 2010).

Reconocimientos

Esta investigación ha recibido el apoyo de los Proyectos I+D+i, EDU2011-27288 y EDU2014-54526-R del Ministerio de Ciencia e Innovación, España.

Referencias

Ball, D.L., Thames, M.H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*, 389-407.

Escudero, I. & Sánchez, V. (2007). How do domains of knowledge integrate into mathematics teachers' practice? *Journal of Mathematical Behavior, 26*(4), 312-327.

Fernández, C., Callejo, M.L., & Marques, M. (2014). Conocimiento de los estudiantes para maestro cuando interpretan respuestas de estudiantes de primaria a problemas de división-medida. *Enseñanza de las Ciencias, 32*(3), 407-424.

Fernández, C., Llinares, S. & Valls, J. (2013). Primary Teacher's Professional Noticing of Students' Mathematical Thinking. *The Mathematics Enthusiast. Special Issue: International Perspectives on Problem Solving Research in Mathematics Education, 10*(1& 2), 441-468.

Fernández, C., Llinares, S. & Valls, J. (2012). Learning to notice students' mathematical thinking through online discussions. *ZDM. Mathematics Education, 44*, 747-759.

Fernández, C., Llinares, S. & Valls, J. (2011) "Mirando con sentido" el pensamiento Matemático de los estudiantes sobre la razón y proporción. *Acta Scientiae, 13*(1), 9-30.

Fortuny, J.M., & Rodríguez, R. (2012). Aprender a mirar con sentido: facilitar la interpretación de las interacciones en el aula. *AIEM. Avances de Investigación en Educación Matemática, 1*, 23-37.

Llinares, S. (2002). Fracciones, decimales y razón. Desde la relación parte-todo al razonamiento proporcional. En M.C. Chamorro (coord.), *Didáctica de las matemática en Primaria* (pp. 187-228). Pearson-Prentice Hall: Madrid.

Llinares, S. (2012-a). Construcción de conocimiento y desarrollo de una mirada profesional para la práctica de enseñanza matemática en entornos en línea. *AIEM. Avances de Investigación en Educación Matemática, 2*, 53-70.

Llinares, S. (2012-b). Formación de profesores de matemáticas. Caracterización y desarrollo de competencias docentes. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 7*(10), 53-62. Costa Rica.

Llinares, S. (2013). Professional Noticing: a component of the Mathematics teachers' professional practice. *SISYPHUS. Journal of Education, 1*(3), 76-93.

Llinares, S., & Valls, J. (2010).Prospective primary mathematics teachers' learning from on-line discussions in a virtual video-based environment. *Journal of Mathematics Teacher Education, 13*(2), 177-196.

Mason, J. (2002). *Researching your own practice. The discipline of noticing*. Routledge Falmer: Londres.

Penalva, M.C., Rey, C. & Llinares, S. (2013). Aprendiendo a interpretar el aprendizaje de las matemáticas en educación primaria. Características en un contexto b-learning. *Educación Matemática, 25*(1), 7- 34.

Prieto, J.L., & Valls, J. (2010). Aprendizaje de las características de los problemas aritméticos elementales de estructura aditiva en estudiantes para maestro. *Educación Matemática, 22*(1), 57-85.

Sánchez-Matamoros, G.; Fernandez, C. & Llinares, S. (2014). Developing pre-service teachers' noticing of students' understanding of the derivative concept. *International Journal of Science and Mathematics Education*, DOI: 10.1007/s10763-014-9544-y.

Sarama, J. & Clements, D. (2009). *Early childhood Mathematics Education research. learning trajectories for young children*. Routledge-Taylor & Francis: New York

Sherin, M. G., Jacobs, V. R., & Philipp, R. A. (Eds) (2010). *Mathematics teacher noticing: Seeing through teachers' eyes*. New York: Routledge.

Zapatera, A. & Callejo, M. L. (2013). Cómo interpretan los estudiantes para maestro el pensamiento matemático de los alumnos sobre el proceso de generalización. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp.535-544). Bilbao: SEIEM.