

Lo ordinario y lo extraordinario en el aula de Matemáticas¹

José Luis Lupiáñez Gómez

Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada

España

lupi@ugr.es

Resumen²

Interpretar y resolver problemas, enfrentar demandas rutinarias y complejas, aplicar conocimientos a la práctica o desarrollar formas de comunicación y argumentación, forman parte de las prioridades habituales en la enseñanza de las matemáticas. Que chicos ordinarios realicen acciones extraordinarias, representa parte de las expectativas del profesor que persigue que los alumnos desarrollen sus competencias. Pero ocasionalmente surgen mentes extraordinarias que necesitan nuevos retos y estímulos y es responsabilidad del docente suministrar a unos y otros una educación matemática de calidad. En esta conferencia relacionaré lo ordinario con lo extraordinario en matemáticas en el contexto de las tareas matemáticas que pueden afrontar los escolares y las implicaciones de esa coexistencia para el profesorado.

Palabras clave

Competencia matemática, tareas, altas capacidades, talento matemático, enriquecimiento curricular.

Abstract

Interpreting and solving problems, confronting routine and complex demands, applying knowledge to practice, and developing forms of communication and argumentation are a part of the habitual priorities in the teaching of Mathematics. That ordinary children carry out extraordinary actions, represents part of the expectations of the teacher that seeks for students to develop competencies. But occasionally extraordinary minds emerge that need new challenges and stimuli, and it is the teacher's responsibility to provide all with a quality Mathematics Education. In this paper the ordinary will be related to the extraordinary in Mathematics in the context of the mathematical tasks that students can face and the implications of this coexistence for teachers.

Key words

Mathematical competence, tasks, high-level capacities, mathematical talent, curricular enrichment.

La tecnología permite que alguien ordinario realice cosas extraordinarias

Jim Kaput

¹ Este trabajo corresponde a una conferencia paralela dictada en la XIV CIAEM, celebrada en Tuxtla Gutiérrez, Chiapas, México el año 2015.

² El resumen y las palabras clave en inglés fueron agregados por los editores.

La introducción de la noción de competencia en las directrices curriculares de muchos países ha promovido un determinado enfoque del aprendizaje escolar. Este enfoque destaca que el aprendizaje se manifiesta mediante la acción, interpretando y resolviendo problemas y cuestiones, enfrentando demandas cognitivas de distinto nivel de complejidad y aplicando conocimientos a la práctica. También enfatiza que este aprendizaje fomenta el desarrollo personal y social del individuo para vivir y desenvolverse en la sociedad, para desarrollar capacidades y habilidades de manera autónoma, para tomar decisiones con criterio y, en síntesis, para mejorar su calidad de vida. Este enfoque expresa unos fines válidos para todos los escolares; la noción de competencia establece un nivel de expectativa que deben alcanzar toda la comunidad de alumnos con motivo de la educación obligatoria que cursan. En este caso estaré hablando de un aprendizaje ordinario, no como sinónimo de vulgar, sino de básico o estandarizado.

Pero la realidad del aula evidencia que es frecuente encontrar alumnos que requieren unas actuaciones específicas, bien porque manifiestan algún tipo de dificultad para seguir el ritmo de sus compañeros o bien porque destacan con claridad por encima de ellos. Y mientras son generalizadas y están notablemente desarrolladas medidas para atender la educación del primer grupo, aún hay muchas líneas abiertas en la caracterización de las actuaciones idóneas para los escolares del segundo grupo, especialmente en el área de matemáticas. Como señala Leikin (2008), existe una profunda brecha entre lo que se constata en la investigación en Educación Matemática y lo que se avanza en la investigación sobre educación de alumnos con altas capacidades.

En este caso de los escolares de altas capacidades, hablaré de un aprendizaje extraordinario. Estos términos, ordinario y extraordinario, no pretenden desarrollarse como un constructo teórico elaborado; su uso en el ámbito educativo lo escuché por primera vez en 1999 en una conferencia en México del tristemente desaparecido Jim Kaput (cita al inicio) en un contexto sobre el uso de tecnología en el aula. Mi interés aquí es emplearlos para relacionar dos realidades del aula de matemáticas con las que el profesorado puede encontrarse y para las que tiene que desarrollar estrategias docentes diferenciadas. Concretamente, centraré mi reflexión en la problemática del diseño de tareas matemáticas significativas en ambos casos.

1. Lo ordinario

En el enfoque funcional por competencias, el aprendizaje de las matemáticas se centra en la importancia del empleo y la puesta en práctica, de manera racional, reflexiva y coherente, del conocimiento matemático en una variedad de situaciones y contextos. La competencia matemática es parte constitutiva y organizativa del currículo de matemáticas y establece el aprendizaje de los escolares sobre esta materia a largo plazo. El conocimiento de la terminología propia de las matemáticas, con sus vocablos y expresiones más usuales, la definición de los conceptos básicos y el manejo de técnicas y algoritmos, constituye el conocimiento del contenido matemático. Aprender el contenido matemático es un aspecto importante del aprendizaje matemático escolar, pero no es el prioritario.

Para ser matemáticamente competente hay que conocer, representar, comunicar, ejemplificar y usar los contenidos matemáticos; identificar y describir situaciones en que los conceptos y procedimientos implicados se pueden poner en juego considerando sus condicionantes; resolver problemas y cuestiones usando una variedad amplia de estrategias en diferentes contextos; y cultivar una actitud crítica y constructiva para validar y contrastar los razonamientos seguidos y las soluciones encontradas. (Lupiáñez y Rico, 2015)

Fomentar ese aprendizaje en el aula de matemáticas no es tarea sencilla. Las decisiones y las actuaciones que debe determinar el profesor son complejas y necesitan de una planificación muy detallada. Existen muchos acercamientos que sugieren decisiones metodológicas de los profesores para llevar a la práctica un currículo funcional y en ellos siempre destaca la importancia de la propuesta de tareas que éstos les pueden plantear a los escolares. Así, Watson y Sullivan (2008), destacan el papel de las tareas en el aprendizaje y su importancia en la enseñanza:

Las diferentes tareas escolares proporcionan diferentes tipos de actividad matemática y las experiencias de los estudiantes con estas diferentes actividades, indican distintos tipos de aprendizaje de las matemáticas. Cuando el profesor decide emplear unas tareas particulares, o una clase de tareas, están tomando decisiones acerca de actividad matemática, del aprendizaje que podría producirse y sobre las propias matemáticas. (p. 111)

Snow-Renner (2001) y Carrión (2007) consideran las tareas de aprendizaje para los escolares como una dimensión clave de las oportunidades de aprendizaje que los profesores pueden suministrarles. En esta misma línea, Lo y Wheatly (1994) sostienen que: "La selección de tareas es de especial importancia. (...) el profesor es capaz de planificar actividades que tengan el potencial de crear oportunidades de aprendizaje" (p. 148). Centrándose más en la actividad de planificación del profesor, Horoks y Robert (2007), sostienen que un análisis detallado de las tareas que los profesores plantearán a los escolares, es fundamental en el aprendizaje de éstos.

Las tareas constituyen el principal medio por el que un profesor puede perseguir en sus escolares el logro de los objetivos específicos de un tema de matemáticas. La función cognitiva de una tarea se centra en proporcionar un contexto en el cual proponer determinadas actuaciones a los escolares mediante el uso de una o varias herramientas matemáticas. Las tareas ejemplifican y, a la vez, muestran la diversidad de actividades que pueden considerarse en relación y bajo el enunciado de un determinado objetivo. Las tareas son demandas cognitivas que movilizan conocimientos para su empleo. Una tarea es un reto para el alumno, y sirve para mostrar su aprendizaje sobre un foco de contenido movilizando conceptos y procedimientos y, asimismo, un indicador para que el profesor valore el grado de logro del aprendizaje expresado mediante uno o varios objetivos. A su vez, una familia de tareas conexas también han de contribuir al desarrollo paulatino de las competencias matemáticas en los escolares y servir como instrumentos para valorar su grado de desarrollo (Lupiáñez, 2009).

Los criterios para el diseño de tareas pueden ser muy variados y no es objetivo de este trabajo describirlos todos. Pero encuentro importante ejemplificar algunos de ellos que son especialmente propicios para desarrollar la competencia matemática de los

escolares. Estos criterios tienen que ver con la actuación que promueve la tarea, con la situación en la que se enmarca y con la complejidad que tiene para el resolutor.

Actuación promovida

Es obvio que las tareas que el profesor planifique, como propuestas de acción, deben estar vinculadas al análisis y selección que hace el profesor sobre los conceptos y procedimientos que configuran el contenido matemático que está trabajando en el aula. Pero esas tareas también deben contribuir al logro de unas expectativas de aprendizaje. En algunos casos pueden perseguir la adquisición de alguna destreza, pero en otros, deben movilizar un conjunto de conocimientos y habilidades que promueven el desarrollo de la competencia matemática. Si tomamos como ejemplo el tema de la suma de los números naturales, es obvio que los escolares de educación primaria o básica deben usar diferentes algoritmos para sumar y pueden diseñarse muchas tareas para esa finalidad. Pero la suma posee un gran número de propiedades y relaciones que relegan los algoritmos a un segundo plano (Cañadas y Castro-Rodríguez, 2011). La siguiente tarea, extraída de Rico y Lupiáñez (2008, p. 315), profundiza en esta idea:

Cada una de las siguientes sumas $243+675 = 918$; $318+654 = 972$ y $154+782 = 936$ contienen todos los dígitos del 1 al 9. Descubre nuevas sumas con esta misma propiedad.

Esta tarea tiene que ver con que los escolares descubran relaciones entre números naturales y promueve el cálculo mental. El algoritmo se considera, pero no es un elemento clave. Por el contrario, favorece que los escolares desarrollen argumentos para mostrar y validar sus hallazgos, y todas estas actuaciones son descriptores básicos de la competencia matemática.

Situación

Las tareas escolares constituyen un medio clave que el profesor tiene a su disposición para incentivar en sus escolares el logro de los objetivos específicos de un tema de matemáticas, contribuyendo así al desarrollo de su competencia matemática. La función cognitiva de una tarea se centra en proporcionar un contexto en el cual proponer a los escolares determinadas actuaciones con sentido para ellos, mediante el ejercicio de una o varias habilidades matemáticas; una tarea constituye un reto para el escolar y sirve para motivar la comprensión de un contenido, movilizando conceptos y procedimientos y dotándoles de sentido. El desarrollo paulatino de la competencia matemática en los escolares se estimulará mediante familias de tareas conexas, que también servirán como instrumentos para valorar el grado de su logro y alcance.

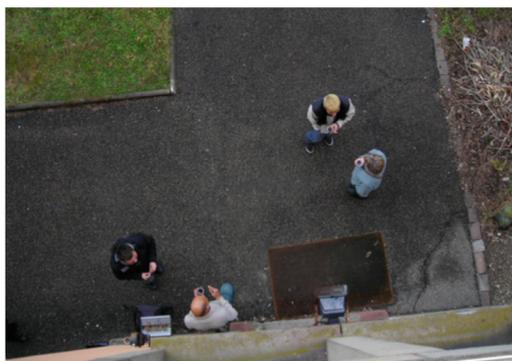
La secuencia de tareas que un profesor propone a sus alumnos, al vincularse a uno o varios objetivos específicos, pueden enmarcarse en una amplia variedad de contextos y situaciones. No es mi argumento el desprestigiar o desaconsejar el empleo de tareas técnicas, enmarcadas en un contexto exclusivamente matemático. Estas tareas contribuyen a que los estudiantes adquieran y consoliden determinadas destrezas, pero el

dotar a una tarea de carácter auténtico para el escolar, pasa por su contextualización en una situación en la que éste pueda identificar la necesidad de emplear matemáticas para dar respuesta a un requerimiento real. Bell, Burkhardt y Swan (1992) destacan varias condiciones que ha de satisfacer las tareas matemáticas, y entre ellas, destacan su relevancia práctica, en términos de que muy a menudo, se les plantean a los escolares tareas que presentan una situación de la vida real, pero plantean cuestiones que no tienen significado práctico.

Por ejemplo, si dentro de los objetivos de aprendizaje que hemos elaborado para el tema de fracciones, se incluye el uso de fracciones con el significado de operador, en el que el número racional representa una operación multiplicativa sobre una cantidad, es totalmente acertado si el profesor propone a sus escolares operaciones como las siguientes: $\frac{3}{5}$ de 15 o $\frac{4}{6}$ de 24. Pero el hecho de incluir un contexto real en un enunciado como el siguiente, no necesariamente le brinda un carácter auténtico o significativo, pues muestra una ficción que se aleja mucho de la realidad de cualquier ciudadano: *En una pastelería tienen 360 productos, si $\frac{3}{5}$ de ellos son pasteles, $\frac{4}{6}$ son tartas y el resto diferentes tipos de pan, ¿cuántas unidades hay de cada tipo de producto?*

En una secuencia de tareas, puede haber espacio para algunas de tipo algorítmico, más técnicas, pero también resulta clave introducir otras que movilicen varios conocimientos de los escolares para que los pongan a prueba en un reto. La siguiente tarea, obtenida del banco de problemas del Proyecto LEMA³, sí puede resultar auténtica para escolares. ¿Cuántos conocimientos activa? ¿Son conocimientos matemáticos? ¿Son únicamente de matemáticas?

La siguiente fotografía se tomó durante el descanso de una reunión de profesores. ¿Desde qué altura se tomó?



Complejidad

A veces las tareas resultan más sencillas a los escolares por estar enmarcadas en un contexto cercano a ellos porque los conceptos y procedimientos que la resuelven son simples, corresponden a significados o representaciones más sencillas o han sido suficientemente practicadas. En otros casos el simple enunciado de la tarea, su longitud o su vocabulario o la cantidad de información, también influye en su complejidad. Pero

³ <http://www.lemma-project.org>

una faceta clave son las demandas cognitivas que las tareas exigen a los escolares que las afrontan, pues no siempre esas demandas tienen el mismo grado de complejidad.

En el contexto del Proyecto PISA (OCDE, 2005, pp. 40-41) la complejidad de las tareas se organiza en tres conjuntos, en función de las demandas cognitivas que son necesarias para resolverlas. Resumo esos tres conjuntos en la Tabla 1.

Tabla 1
Indicadores para la complejidad de las tareas según demandas cognitivas

Reproducción	Conexión	Reflexión
Contextos escolares	Contextos familiares	Tareas que requieren comprensión y reflexión
Conocimientos ya practicados	Interpretar y explicar	Creatividad
Aplicación de algoritmos estándar	Manejar y relacionar diferentes sistemas de representación	Ejemplificar, usar y relacionar conceptos
Realización de operaciones sencillas	Seleccionar y usar estrategias de resolución de problemas	Relacionar conocimientos para resolver problemas complejos
Uso de fórmulas elementales		Generalizar y justificar resultados obtenidos

Si volvemos al tema de los números naturales, las siguientes tres tareas ejemplifican estos tres niveles de complejidad. La primera es un problema aditivo de dos etapas (combinación y cambio), que suelen tener una notable presencia en el aula y en los libros de texto. La segunda incorpora la invención y es necesario interpretar una suma en un contexto deportivo. Finalmente, la tercera se enmarca en el conjunto de reflexión porque no se explicita el modo de resolución, porque es necesaria la planificación de diferentes heurísticos y porque es necesaria la justificación de los hallazgos encontrados.

En mi hucha tengo 45€ y en mi cumpleaños me han regalado otros 50€. He decidido comprarme un juego que cuesta 35€, ¿cuánto dinero me queda ahorrado?

Inventa un problema que tenga que ver con algún deporte que conozcas y que se resuelva con la suma $75+37$.

Descubre qué números entre los 20 primeros no se pueden escribir mediante una suma de dos o tres números consecutivos. Indaga la razón y explícala.

Este papel relevante que tienen las tareas en el aprendizaje escolar, se relaciona con otras muchas consideraciones docentes que el profesor debe tomar en consideración. En un contexto de una enseñanza funcional, que promueva el desarrollo de la competencia matemática de los escolares, Onrubia, Rochera y Barberá (2001) destacan, las siguientes recomendaciones (p. 498):

- Contextualizar el aprendizaje de las matemáticas en tareas auténticas y significativas para los alumnos.
- Orientar el aprendizaje de los alumnos hacia la comprensión y la resolución de problemas.

- Vincular el lenguaje formal matemático con su significado referencial.
- Activar y emplear como punto de partida el conocimiento matemático previo, formal e informal, de los alumnos.
- Avanzar de manera progresiva hacia niveles cada vez más altos de abstracción y generalización.
- Enseñar explícitamente y de manera informada estrategias y habilidades matemáticas de alto nivel.
- Secuenciar adecuadamente los contenidos matemáticos, asegurando la interrelación entre las distintas capacidades implicadas en la adquisición del conocimiento matemático.
- Apoyar sistemáticamente la enseñanza en la interacción y la cooperación entre alumnos.
- Ofrecer a los alumnos oportunidades suficientes de “hablar matemáticas” en el aula.
- Atender los aspectos afectivos y motivacionales implicados en el aprendizaje y dominio de las matemáticas.

¿Son estas prácticas recurrentes en el aula de matemáticas? ¿Son accesibles? ¿Son todas aplicables en cualquier contexto educativo? Estas cuestiones y muchas otras que pueden plantearse, están enmarcadas en lo que he denominado aprendizaje ordinario, aquél que deben lograr todos los escolares. Pero como señalé al inicio, la diversidad que de manera natural surge en el aula de matemáticas, nos lleva a considerar la realidad de que hay escolares que tienen un potencial sobresaliente y que, muy habitualmente, deben desarrollar su formación escolar básica dentro de un grupo estandarizado de escolares. Aquí paso a reflexionar sobre lo extraordinario.

2. Lo extraordinario

Aunque como señalan Gutiérrez y Maz (2004), la diversidad en educación no sólo se manifiesta en el alumnado, sino también en el profesorado o los centros, mi interés aquí es reflexionar sobre la diversidad en el aula de matemáticas y, más concretamente, sobre aquella que se manifiesta en las habilidades y el rendimiento de determinados escolares. El usar el término extraordinario para referirme a los escolares con altas capacidades, pone el énfasis, precisamente, en el carácter que tienen las respuestas, los razonamientos y la actividad matemática de estos alumnos.

Castro (2008) identifica tres focos prioritarios para la investigación sobre los alumnos con altas capacidades en matemáticas (también denominados con talento matemático): la caracterización del talento matemático, los procesos para el establecimiento de mecanismos de identificación y el diseño, implementación y evaluación de propuestas de intervención educativa. Como señala Ramírez (2012), las características que definen a un alumno con talento matemático se han ido desarrollando desde los años ochenta del pasado siglo y una de las caracterizaciones que propone determina que un

alumno con talento matemático es aquel que pregunta espontáneamente cuestiones que van más allá de las tareas matemáticas que se le plantean, busca patrones y

relaciones, construye nexos, lazos y estructuras matemáticas, localiza la clave de los problemas, produce ideas originales, valiosas y extensas, mantiene bajo control los problemas y su resolución, presta atención a los detalles, desarrolla estrategias eficientes, cambia fácilmente de una estrategia a otra, de una estructura a otra, piensa de modo crítico y persiste en la consecución de los objetivos que se propone. (pp. 23-24)

Rodríguez (2004) señala que los programas de diagnóstico e identificación de alumnos con talento pretenden “determinar su capacidad y ritmo de aprendizaje como indicadores indispensables para poder ofrecer respuestas educativas que tengan en cuenta sus necesidades” (p. 39). Este autor sintetiza varios programas de identificación y evaluación.

Finalmente, en relación a los programas de tratamiento y formación, también existe una gran variedad de modelos. Como señala Castro (2004), por ejemplo, es posible establecer unas marcadas diferencias entre países iberoamericanos en el tratamiento educativo con alumnos de estas características. Los programas para alumnos con altas capacidades, como señalan Moon y Rosselli (2000), son experiencias educativas específicamente diseñadas e implementadas en un contexto determinado con el objetivo de promover y desarrollar a estos estudiantes. No se trata de elaborar programas paralelos, sino actuar para que cada alumno realice los aprendizajes con el ritmo y con el nivel adecuados a sus características.

Reyero y Tourón (2003) señalan dos tipos básicos de programas educativos para estos alumnos: los de enriquecimiento (estrategias que permiten ampliar las experiencias de aprendizaje de los alumnos y que generalmente tratan contenidos, materiales y técnicas que aparecen en el currículo pero con mayor profundidad) y los de aceleración (estrategias que permiten a los alumnos moverse por el currículo a mayor velocidad saltándose algún curso, cursarlo de manera comprimida, o bien adelantando el ingreso a determinados ciclos). Hoogeveen (2008) destaca que los programas de enriquecimiento ofrecen a los estudiantes experiencias educativas adicionales que están dirigidas a suministrarles más desafíos en un ambiente de aprendizaje más rico y que pueden tener una finalidad cognitiva, social o ambas. Esta investigadora distingue cinco tipos básicos de programas de enriquecimiento: *dentro del aula* (experiencias individuales o en pequeños grupos); *fuera del aula* (casi todo el tiempo en la escuela estándar pero con actividades extraescolares programadas fuera del aula); *grupos de altas capacidades* (estos estudiantes están en grupos específicos si bien comparten con el resto de compañeros materias generales como educación física o música); *escuelas de verano* (que suelen tener la doble finalidad cognitiva y social); y *escuelas de altas capacidades* (que son centro especialmente diseñados para formar a estos estudiantes a tiempo completo).

Si pensamos en el primer modelo, nos encontramos con la situación a la que me he referido al inicio de este trabajo: un profesor tiene un grupo de alumnos en el que es muy probable que uno o varios de ellos presente algún tipo de dificultad para seguir el ritmo de aprendizaje del resto y también es posible que uno o varios de ellos atesore un gran potencial, por ejemplo, para las matemáticas.

¿Qué puede hacer el profesor en este caso? ¿Pierden fuerza los argumentos esgrimidos en el caso ordinario? Ni mucho menos. En ocasiones las altas capacidades se focalizan en un ámbito de conocimiento específico y esos escolares deben formarse en todas las áreas. De hecho, en aquella disciplina en la que destacan, los criterios presentados antes para el diseño de tareas siguen teniendo presencia en el caso del enriquecimiento curricular. Pero la caracterización anterior del talento matemático abre muchas puertas en cada uno de ellos.

Actuación promovida

Las características cognitivas de los estudiantes con talento matemático, deben conducir el diseño de tareas de enriquecimiento curricular. En ocasiones, su potencial para la matemática es idóneo para llevar a la práctica actuaciones complejas derivadas de las actividades que se les propongan. Veamos un ejemplo centrado en invención de problemas que fue realizado por niños de 13 años diagnosticados con talento matemático (Espinoza, Lupiáñez y Segovia, 2013).

A los niños se les plantearon dos tareas sobre invención con consignas diferentes y tuvieron 20 minutos para inventarse dos enunciados. La consigna de uno de los problemas es la siguiente:

Con la siguiente información inventa un problema matemático que te parezca difícil de resolver y que en su resolución se utilice una o varias de las operaciones de suma, resta, multiplicación o división. Si lo consideras necesario, puedes agregar más datos o información:

Un tren con cuatro vagones para pasajeros sale de una estación a las 9:00 h con destino a Málaga. El tren tiene una capacidad máxima para 294 pasajeros.

A continuación aparecen dos respuestas que dieron dos de los escolares.

En este viaje el tren va lleno. En la primera parada se bajan 2 parejas, una con un hijo más que la otra, y suben un número de personas tal que quedan 290. En la segunda parada bajan 10 parejas y suben 15 personas y en la última, antes de llegar, bajan 3 personas y suben el triple de niños que tenían las dos primeras parejas juntas. ¿Cuántas personas subieron en la primera parada y cuántos niños tenía cada pareja de la 1ª parada?

El tren va a una velocidad de 384 km/h (constante) y entre su posición actual y Málaga hay 583,85 km. Cada vagón mide 5,9 m (locomotora incluida). El primer asiento de cada vagón está situado en el metro cero justo donde empieza el vagón y el último a 1 m del final de cada vagón. Si el tren no se parase en Málaga y siguiera, ¿cuál sería la diferencia de tiempo que tardaría en cruzar la frontera de Málaga desde el primer pasajero hasta el último, suponiendo que el tren va lleno?

Como puede comprobarse, la riqueza de los problemas manifiesta las características de los escolares. En los enunciados aparecen una gran cantidad de datos añadidos, se expresan muchas relaciones entre ellos y también se incluyen diferentes tipos de

hipótesis. En el segundo enunciado, además, destaca el gran número de magnitudes que espontáneamente surgieron: longitud, velocidad y tiempo.

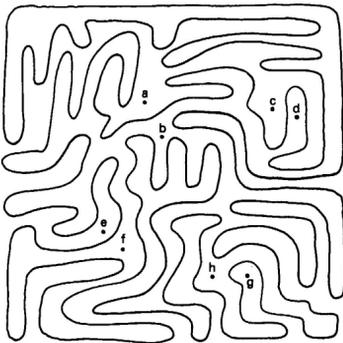
Estos resultados evidencian que las tareas de invención puede movilizar actuaciones muy ricas en los escolares con talento matemático: "existen algunas características del talento matemático que se asocian a los procesos de invención de problemas aritméticos." (p. 194)

Situación

La situación en la que se enmarcan las tareas no juega en este caso un papel tan primordial o básico como en el caso anterior, pues una de las motivaciones naturales de los estudiantes con talento matemático es asumir retos nuevos y en muchos casos el contexto puramente matemático les brinda desafíos muy atrayentes. La siguiente tarea, por ejemplo, se contextualiza en una noción matemática avanzada, como son el estudio de familias de curvas y se ha usado en un programa educativo del tipo fuera de clase para escolares de 14 años con talento matemático (extraída de cuestionarios de ESTALMAT⁴):

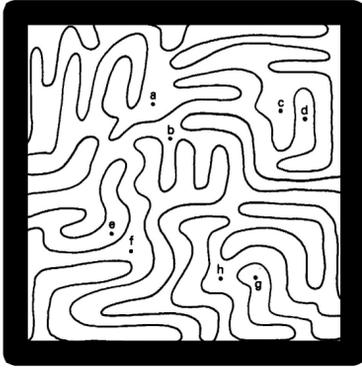
Una curva de Jordan es una curva cerrada y simple (sin autointersecciones) que divide al plano en dos zonas: una acotada (interior) y otra no acotada (exterior). Los puntos que se sitúan en esas zonas se denominan, respectivamente, puntos interiores y exteriores.

a) *¿Cuáles de los siguientes puntos son interiores y cuáles son exteriores?*

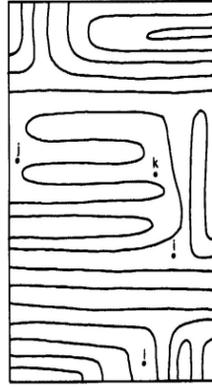
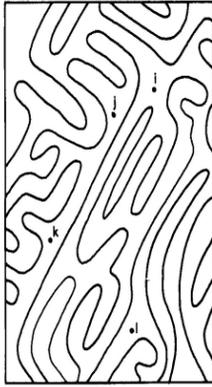
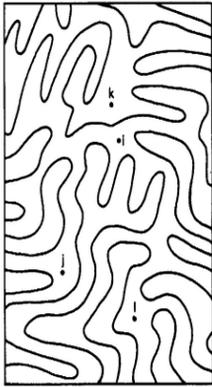


b) *Se puede saber si dos puntos están en la misma zona se ocultan los bordes de la curva?*

⁴<http://www.estalmat.org>



c) En cada uno de estos tres casos, si el punto *i* es interior, ¿cómo son los puntos *j*, *k* y *l*?



El contexto en esta tarea es totalmente abstracto, si bien se relaciona con un tipo de juego solitario habitual en revistas y pasatiempos. El núcleo de la tarea es el segundo apartado, en donde los escolares deben explorar relaciones para encontrar que dos puntos están en la misma zona si al trazar una línea que los una, ese segmento corta un número par de zonas.

Esta otra tarea, enmarcada en una situación propia de los medios de comunicación, puede favorecer la discusión y la toma de decisiones, pues el primer paso es delimitar con claridad que variables se van a considerar y su peso en la solución. Problemas de modelización abierta como ésta, se prestan también a que se presenten en el aula diferentes propuestas de resolución. En el caso de estudiantes con talento matemático, se puede usar con escolares con 8 años.

En 1993 las reservas mundiales de gas natural se estimaron en 141,8 billones de metros cúbicos. Desde entonces se han consumido anualmente 2,5 billones de metros cúbicos. La Comisión sobre el Desarrollo Sostenible de la ONU necesita hacer un estudio acerca de cuándo se acabarán las reservas de gas natural. Elabora un informe previo para la Comisión que les ayude a organizar el estudio.

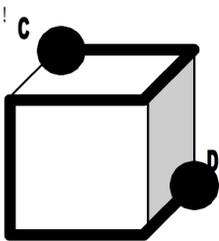
Como señala Ramírez (2012), las características propias de los estudiantes con talento matemático pueden manifestarse en los logros al llevar a cabo una actividad matemática, en donde pueden destacar la habilidad para localizar los datos clave de los problemas y desarrollar estrategias de resolución eficientes, habilidades ambas que resultan muy acertadas para esta segunda tarea.

Complejidad

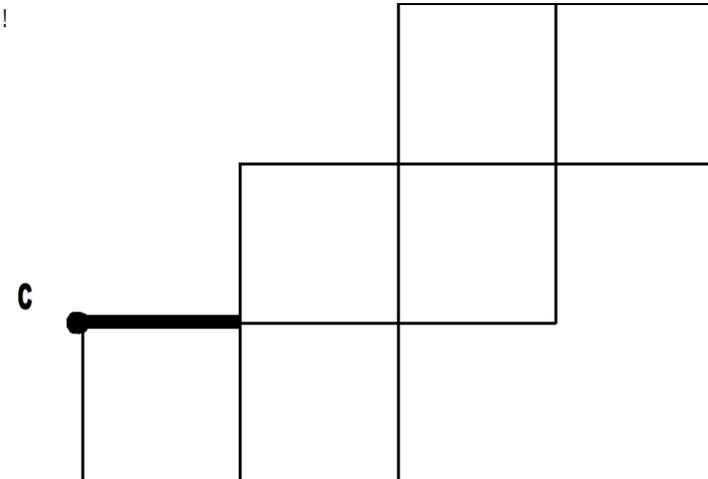
Partiendo de las habilidades de los estudiantes con talento matemático, es fácil pensar que la complejidad de las demandas cognitivas que las tareas pueden demandarles pueden llegar a ser muy alta. De hecho, puede ser frecuente que un escolar sea capaz de resolver un problema que para otros compañeros es totalmente inabordable y que incluso para los profesores puede resultar muy difícil. Boal y Expósito (2012) señalan que en ocasiones, el profesor puede sentirse incluso desbordado por las exigencias de estos alumnos.

La siguiente tarea es un buen ejemplo de esta idea. La propuso Ramírez (2012) a un estudiante de 14 años diagnosticado con talento matemático y éste la resolvió mentalmente, sin usar prácticamente un lápiz, en sólo dos minutos.

En el siguiente cubo se ha trazado un camino entre C y D que sigue algunas aristas:



A continuación tienes un desarrollo plano de ese cubo y en él está marcada la ubicación del punto C y la primera sección del camino. ¿Puedes continuar el camino hasta D?



En su análisis, Ramírez (op. cit.), encontró que el escolar manifestó una correcta percepción de la posición en el espacio y de las relaciones espaciales (pp. 287-288), además de que fue capaz de argumentar la bondad de su razonamiento.

La complejidad de las demandas cognitivas a las que pueden responder estos escolares también se manifiesta en los contenidos matemáticos que se desarrollan en los programas que se diseñan e implementan que van dirigidos a ellos. Así, en algunos de estos programas para niños de 13 y 14 años se incluyen cursos de cálculo simbólico, invariantes, programación matemática, grafos, teoría de nudos o astronomía de posición, entre otros.

3. Lo ordinario y lo extraordinario coinciden en el aula de Matemáticas

Si en un aula hay uno o varios escolares con altas capacidades, es necesario y prioritario que se planifiquen cuidadosamente estrategias de intervención educativa que promuevan su desarrollo y que potencien sus habilidades:

Los ajustes que se realicen supondrán la ampliación y el enriquecimiento del currículo ordinario, dotándolo de una mayor amplitud en relación con ciertos contenidos específicos de área/materia, con alguna unidad didáctica que es tratada con mayor profundidad o profundizando en temas de su interés, lo que requiere de procesos cognitivos más complejos, sin adelantar contenidos correspondientes a cursos superiores. (Boal & Expósito, 2012, p. 58)

Estas autoras destacan además que esas estrategias no tienen por qué ser exclusivas de los estudiantes con altas capacidades, sino que también pueden participar en ellas aquellos alumnos que acaban sus tareas rápido, contribuyendo así a la socialización colectiva.

Los ajustes metodológicos son necesarios y algunos especialistas sugieren varias recomendaciones al respecto. Así, por ejemplo, Bueno (2012), propone un modelo de enseñanza diferenciada que favorece:

construir una base de conocimiento significativo y preciso, desarrollar las habilidades necesarias para llegar a ser competentes científica y tecnológicamente, y desarrollar actitudes que son valiosas para la sociedad. La diferenciación no es un conjunto de herramientas instructivas, sino una filosofía que un profesor y una comunidad de aprendizaje adoptan para satisfacer las necesidades de cada estudiante. Requiere la planificación cuidadosa de las lecciones para conseguir objetivos y metas importantes e incluye una variedad de métodos y estrategias para satisfacer las necesidades de los alumnos". (p. 95)

Esta autora centra su propuesta en diversas técnicas de aprendizaje cooperativo, en las que los escolares con altas capacidades se integran con sus compañeros y aportan su potencial al aprendizaje colectivo.

En el caso de las matemáticas, hay autores que ejemplifican propuestas metodológicas enriquecedoras para los escolares con talento matemático (Boal y Expósito, 2012; Johnson, 2000, citado por Ramírez, 2012). Entre ellas destacan con recurrencia elaboración

de problemas de ingenio que propondrán para que resuelvan sus compañeros, planteamiento de alternativas distintas para resolver problemas, usar juegos de lógica y estrategia, diseño y construcción de juegos de mesa a partir de principios matemáticos, invención y resolución de jeroglíficos y enigmas, explorar relaciones entre matemáticas y prensa o participar en competiciones matemáticas, entre otros.

Estas sugerencias y los ejemplos mostrados anteriormente evidencian que en matemáticas es posible identificar un gran número de tareas que promueven la puesta en juego de muchas habilidades de alto nivel y que constituyen auténticos retos o desafíos para los alumnos con altas capacidades. El reto natural para el profesor es secuenciar esas tareas en una planificación organizada e integrarla dentro de su actividad docente.

El compromiso de la comunidad educativa con la identificación, la promoción y el desarrollo de las habilidades de los alumnos de altas capacidades debe ser sólido y a largo plazo. La sociedad actual demanda individuos altamente cualificados: "Las habilidades de alto nivel son críticas para crear nuevos conocimientos y tecnologías y para estimular la innovación; son claves per se para el crecimiento económico y el desarrollo social" (OECD, 2013, p. 1). Pero también es fundamental que esos alumnos se desenvuelvan en todas las áreas curriculares, incluyendo aquellas en las que no destacan, y por esa razón la formación que reciban debe estar en consonancia con su potencial pero también con sus derechos como ciudadanos. Una visión real de la atención a la diversidad en el aula pasa porque reconozcamos esa compleja realidad del aula y que actuemos en consecuencia.

Agradecimientos

Este trabajo se llevó a cabo con el apoyo del Proyecto de Investigación "Procesos de Aprendizaje del Profesor de Matemáticas en Formación" (EDU2012-33030) del Plan Nacional de Investigación, Desarrollo e Innovación del Ministerio de Economía y Competitividad (España).

Referencias

- Bell, A., Burkhardt, H. & Swan, M. (1992). Assessment of extended tasks. En R. Lesh & S. Lamon (Eds.), *Assessment of authentic performance in school mathematics* (pp. 145-176). Washington: American Association for the Advancement of Science.
- Boal, M. T., & Expósito, M. A. (2012). Medidas de intervención específicas para alumnos con altas capacidades en la Comunidad de Madrid: respuestas educativas y programa de enriquecimiento. En J. C. Torrenco (Coord.), *Alumnos con altas capacidades y aprendizaje cooperativo* (pp. 53-87). Madrid: Fundación SM.
- Bueno, A. (2012). La diferenciación curricular desde una perspectiva de inclusión. Conceptos y principios metodológicos generales. En J. C. Torrenco (Coord.), *Alumnos con altas capacidades y aprendizaje cooperativo* (pp. 89-124). Madrid: Fundación SM.

- Cañadas, M. C. & Castro-Rodríguez, E. (2011). Aritmética de los números naturales. Estructura aditiva. En I. Segovia & L. Rico (Coords.), *Matemáticas para maestros de Educación Primaria*. Madrid: Ediciones Pirámide.
- Carrión, V. (2007). Análisis de errores de estudiantes y profesores en expresiones combinadas con números naturales. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 11, 19-57.
- Castro, E. (2004). Perspectivas futuras de la educación de niños con talento. En M. Benavides, A. Maz, E. Castro & R. Blanco (Eds.), *La educación de niños con talento en Iberoamérica* (pp. 171-185). Santiago de Chile: UNESCO.
- Castro, E. (2008). *Resolución de problemas: ideas, tendencias e influencias en España*. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho & B. Lorenzo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XII* (pp 113-140). Badajoz: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.
- Espinoza, J., Lupiáñez J. L. & Segovia, I. (2013). Características del talento matemático asociadas a la invención de problemas. *Revista Científica*, número especial octubre 2013, 190-195.
- Gutiérrez, M. P. & Maz, A. (2004). Educación y diversidad. En M. Benavides, A. Maz, E. Castro & R. Blanco (Eds.), *La educación de niños con talento en Iberoamérica* (pp. 15-24). Santiago de Chile: UNESCO.
- Hoogeveen, L. (2008). *Social emotional consequences of accelerating gifted students*. Tesis doctoral. Universidad de Radboud.
- Horoks, J. & Robert, A. (2007). Tasks Designed to Highlight Task-Activity Relationships. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 10(4-6), 279-287.
- Johnson, D. T. (2000). *Teaching mathematics to gifted students in a mixed-ability classroom*. Reston, VA: Council for Exceptional Children.
- Leikin, R. (2008). Creativity in mathematics and the education of gifted students: research agenda and the complexity of the field. Trabajo presentado en el 11th *International Conference of Mathematics Education*, ICME-11, TG6: Activities and programs for gifted students. Monterey, México.
- Lo, J., & Wheatley, G. H. (1994). Learning opportunities and negotiating social norms in mathematics class discussion. *Educational Studies in Mathematics*, 27(2), 145-164.
- Lupiáñez, J. L. & Rico, L. (2015). Aprender las matemáticas escolares. En P. Flores & L. Rico (Coords.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria* (pp. 41-60). Madrid: Ediciones Pirámide.
- Moon, S. M., & Rosseli, H. C. (2000). Developing gifted programs. In K.A. Heller, F.J. Mönks, R.J. Sternberg, & R.F. Subotnik (Eds.), *International Handbook of Giftedness and Talent* (pp. 499-521). Amsterdam: Elsevier.
- OCDE (2005). *Informe PISA 2003. Aprender para el mundo del mañana*. Madrid: Editorial Santillana.
- OECD (2013). ¿Quiénes son los académicos talentosos? *PISA in Focus*, 31. Disponible en <http://www.oecd.org/pisa/pisaproducts/pisainfocus/PISA-in-focus-n31-esp.pdf>.
- Onrubia, J., Rochera, M. J. & Barberá, E. (2001). La enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas: una perspectiva psicológica. En C. Coll, J. Palacios & A. Marchesi (Comp), *Desarrollo psicológico y educación. Volumen 2: Psicología de la educación escolar*. (pp. 487-508). Madrid: Editorial Alianza.

- Ramírez, R. (2012). *Habilidades de visualización de los alumnos con talento matemático*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.
- Reyero, M. & Tourón, J. (2003). *El desarrollo del talento. La aceleración como estrategia educativa*. A Coruña: Netbiblio.
- Rodríguez, L. (2004). Identificación y evaluación de niños con talento. En M. Benavides, A. Maz, E. Castro & R. Blanco (Eds.), *La educación de niños con talento en Iberoamérica* (pp. 37-47). Santiago de Chile: UNESCO.
- Snow-Renner, R. (2001). What is the promise of large-scale classroom practice measures for informing us about equity student opportunities-to-learn? An example using the Colorado TIMSS. Trabajo presentado en *Annual Meeting of the American Educational Research Association, Seattle*.
- Watson, A. & Sullivan, P. (2008). Teachers learning about tasks and lessons. En D. Tirosh & T. Wood (Eds.), *Tools and processes in mathematics teacher education* (pp. 109-134). Rotterdam: Sense Publishers.