Temas fértiles para la cultura matemática[1]

Carlos Sánchez Fernández
Facultad de Matemática y Computación, Universidad de La Habana
Cuba
csanchez@matcom.uh.cu

Resumen[2]

Cuándo nos enfrentamos a nuestro quehacer docente hay veces que nos preguntamos *¿Qué asuntos relacionados con el tema de la clase me pueden ayudar a formar una cultura matemática en mis alumnos? ¿Dónde puedo encontrarlos? ¿Cuál es la forma más seductora de presentarlos?* El objetivo de esta charla es compartir nuestras experiencias en la búsqueda de respuestas a estas inquietudes en las entrañas de la historia de la matemática. Después de una breve introducción donde compartimos nuestras ideas de carácter teórico, mostramos algunos temas históricos fértiles que han resultado eficaces para desarrollar una cultura matemática en estudiantes y profesores.

Palabras clave

Historia de la matemática, cultura matemática, formación integral, tríos pitagóricos, problemas isoperimétricos, continuo aritmético.

Abstract

When faced with our teaching tasks there are times when we ask ourselves: What aspects of the topic for the class can help me form a mathematical culture for my students? Where can I find them? What is the most seductive way to present them? The objective of this paper is to share some experiences in the search in the heart of the history of Mathematics for answers to these preoccupations. After a brief introduction where ideas of a theoretical nature will be shared, some fertile historical topics that have been effective in developing a mathematical culture for students and teachers will be shown.

Key words

History of Mathematics, mathematical culture, comprehensive preparation, Pythagorean triples, isoperimetric problems, arithmetic continuum.

---

[1] Este trabajo corresponde a una conferencia paralela dictada en la XIV CIAEM, celebrada en Tuxtla Gutiérrez, Chiapas, México el año 2015.

[2] El resumen y las palabras clave en inglés fueron agregados por los editores.

Recibido por los editores el 10 de noviembre de 2015 y aceptado el 15 de enero de 2016.

1. ¿Por qué y para qué desarrollar temas fértiles en la clase de matemática?

"La tarea fundamental y general de la comunidad matemática consiste en contribuir de modo efectivo al desarrollo integral de la cultura humana".

(De Guzmán, M., 1997)

Consideramos que una de las prioridades de la investigación en Educación Matemática tiene que ser la búsqueda de metodologías que motiven y orienten vocacionalmente a los jóvenes para su ingreso y permanencia en las carreras de matemática y de formación de docentes en enseñanza de la matemática. Estas carreras tienen dos repelentes muy fuertes y con arraigo en la cultura de nuestros países. En nuestra opinión, en el mundo actual donde predominan los valores de la oferta y la demanda, una de las menos solicitada es la profesión de maestro, porque es de las más sacrificadas y menos remuneradas. La carrera de matemática tiene más posibilidades en el mercado, pero de todas formas nuestra ciencia es una especie de tabú para la mayoría, novatos o veteranos, relegada sólo para "polillas", como se les llama en Cuba a las/los estudiantes "raritos" consagrados sólo al estudio y que no acostumbran salir de parranda a bailar salsa, ni tienen mucho éxito con el sexo opuesto.

La necesidad de cambiar estos estereotipos y lograr que las actividades docentes fueran más motivadoras, creativas y sirvieran de enganche para que jóvenes y no tan jóvenes sintieran el placer de "*pensar la matemática*", nos ha llevado a considerar la búsqueda de temas fértiles contextualizados con el recurso de la historia de la matemática. Nos interesa motivar la reflexión sobre la importancia de incluir en el discurso no sólo el contexto lógico de justificación del saber, sino sobre todo el contexto de origen y construcción de los diferentes conocimientos y métodos. En definitiva, el objetivo principal es compartir experiencias alcanzadas con el uso de la historia de la matemática en la búsqueda tanto de la contextualización del discurso oral, como también el discurso escrito de libros de texto y de libros de divulgación matemática.

Posiblemente el principal objetivo que la mayor parte de los profesores quisiéramos lograr con nuestras clases es desarrollar un alto nivel de razonamiento matemático. El proceso de razonar es tan complejo, que no se puede describir en pocas y precisas palabras. Por eso se han publicado tantos artículos y libros con diferentes enfoques y detalles -p. e., entre los libros más recientes recomendamos: Mason, J.; Burton, L.; Stacey, K. (2010) y Devlin, K. (2012)-. Apreciamos la importancia de tales textos escritos por científicos de la cognición y otros expertos, con el objetivo de dar a los maestros ideas de qué es "*pensar matemáticamente*" y cómo se puede desarrollar este proceso en los alumnos. También existe otra literatura sobre el "*enriquecimiento matemático*", particularmente un proyecto británico que comenzó alrededor de 1996 y su intención desde el inicio es ayudar a los jóvenes talentos que viven en comunidades que tienen un acceso muy limitado a la "buena" Matemática. El proyecto se ha revisado y perfeccionado varias veces. Recomendamos el sitio del proyecto www.nrich.math.org donde se pueden encontrar tareas y consejos para enriquecer la clase –p.e. los trabajos de Jennifer Piggott y de Steve Hewson– y por otra parte, pero muy cercana, está también la línea promovida por la NTSC de EEUU: *Concept-Rich Mathematics Instruction*. Una de las mejores ilustraciones de esta línea de acción está en el libro de Ben-Hur (2004).

Nuestra intención en esta conferencia es mucho más modesta, aunque con intereses comunes con los proyectos mencionados arriba. La cuestión es que no soy experto en las Ciencias de la Cognición, soy simplemente un profesor de matemáticas que ha tenido la oportunidad y la voluntad de ocuparse en averiguar con tesón cómo cumplir mejor con su encargo social. Por tanto, nos ajustamos a compartir experiencias de la forma más agradable posible. Por supuesto, a nuestro enfoque le colocamos un título sugerente "Temas Fértiles para la Cultura Matemática", para que al menos atraiga a los curiosos. El apelativo puede parecer pretencioso, y lo es sin duda, pero nuestro objetivo es claro: usar la Historia de la Matemática para ayudar a que el discurso en las clases y textos sea más atractivo y eficaz y los chicos se entusiasmen por conocer mejor nuestra "*novela policiaca*" al derecho y no al revés, como señalaba el Maestro Miguel de Guzmán:

> … Se trata, en primer lugar, de ponernos en contacto con la realidad matematizable que ha dado lugar a los conceptos matemáticos que queremos explorar con nuestros alumnos, para lo cual deberíamos conocer a fondo el contexto histórico que enmarca estos conceptos adecuadamente. ¿Por qué razones la comunidad matemática se ocupó con ahínco en un cierto momento de este tema y lo hizo el verdadero centro de su exploración tal vez por un período de siglos? Es extraordinariamente útil tratar de mirar la situación con la que ellos se enfrentaron con la mirada perpleja con que la contemplaron inicialmente. La visión del tema que se nos brinda en muchos de nuestros libros de texto se parece en demasiadas ocasiones a una novela policíaca que aparece ya destripada desde el principio por haber comenzado contando el final. Contada de otra forma más razonable podría ser verdaderamente apasionante (de Guzmán, 2007)

No solo de Guzmán, sino muchos de los grandes maestros que en *Nuestra América* han sido, nos han enseñado que nuestras clases deberían desarrollar *cultura matemática,* que según alguien ha definido es lo que todavía recordamos cuando ya hemos olvidado todo lo que nos obligaron a aprender. En nuestra opinión, esta tarea es uno de los compromisos sociales más primorosos de la educación matemática. No educamos simplemente para hacer y aplicar matemática o para pasar con éxito las pruebas de ingreso a otros niveles de enseñanza o de la escala salarial –aunque por supuesto no oponemos resistencia a la superación personal. Esto no puede ser el fin de la educación, porque entonces inexcusablemente provocaría *el fin de la educación*. Además, junto con otras cualidades y competencias que se forman en los diferentes ciclos de enseñanza, aprender a pensar toda la matemática que aprendemos como un objeto cultural, constituye también un atajo expedito a la realización personal en los tortuosos caminos de la vida en este mundo estresante y egoísta.

En las últimas dos décadas se ha publicado bastante sobre la integración de la investigación histórica con la práctica educativa matemática, recomendemos, por ejemplo, el perspicaz artículo de Ruiz (1997), el estudio ICMI editado por Fauvel y Maanen (2000) y, algo más reciente, el artículo de Jankvist (2009). Nuestra propuesta, con cierta originalidad en la forma, en su esencia no es novedosa, representa un compendio de ideas que hemos ido puliendo y conformando en el marco de un proyecto que en Cuba coordinamos y que recientemente hemos vigorizado bajo el título de *Prácticas Matemáticas en la Edad Moderna y sus Aplicaciones a la Educación Matemática.* Algunas de nuestras ideas han sido presentadas en varios eventos científicos y publicaciones especializadas como, por ejemplo, Sánchez y Valdés (1997), Sánchez y Valdés (1999), Sánchez y Valdés (2010), Valdés y Sánchez (2011), Sánchez (2013a y 2013b). Por supuesto que este asunto no es tan simple como puede parecer y amerita una atención desde diferentes enfoques. De ahí nuestro interés explícito en compartir experiencias y las ilustramos con el análisis muy breve de varios temas fértiles de asuntos poco examinados en las clases tradicionales.

2. La médula de este trabajo: Temas Fértiles

> [...] incluso los hechos matemáticos sencillos, pueden aplicarse de forma hábil y con eficacia solo cuando se han asimilado de forma creativa, de modo que el estudiante los pueda ver como si él mismo pudiera llegar a ellos de forma independiente y para esto al maestro mucho puede ayudar el conocimiento de su historia (Kolmogórov, A. N. 1988)

En un atractivo libro traducido a varios idiomas el afamado matemático bourbakista Jean Dieudonné (1990; pp. 92–106) hace una distinción entre problemas intratables y problemas prolíferos atendiendo sobre todo al contexto de investigación. Nosotros consideramos que para *instilar* la cultura matemática en los estudiantes, se puede usar una diferenciación semejante entre *temas estériles y temas fértiles*. Consideramos fértiles aquellos temas que nos permiten desarrollar en el aula varios asuntos relacionados en cierta manera con el plan de clase y que han demostrado que tienen amplia aplicación en la práctica matemática o en el enriquecimiento de la cultura matemática. Por regla general aparecieron como problemas en una época remota y muchas veces durante el largo y torcido cauce de su historia han variado en forma y en enfoque metodológico para su tratamiento. En definitiva son temas que sabemos cómo comienzan, pero ni sospecha tenemos de cómo van a acabar y que llevan implícito el misterio y el suspenso tan encantadores para la juventud. En nuestra charla mostraremos muy brevemente tres de estos temas fértiles que consideramos seductores y que hemos desarrollado en diferentes escenarios con diversos grupos de estudiantes y docentes en formación, temas que han llegado a ser incentivo de reflexión aún en las condiciones actuales de la revolución informática y la proliferación de todo tipo de divertimento "anti-cultural" y "seudo-científico":

- *Tríos pitagóricos* – relacionados con la descomposición en sumas de cuadrados y con soluciones enteras de ecuaciones cuadráticas -y el gran teorema de Fermat.
- *Problemas isoperimétricos con polígonos* – que nos permite dinamizar la geometría e introducir el significativo tema de la optimización de magnitudes geométricas.
- *El continuo aritmético* – que además de incluir los útiles racionales abarca unos irracionales fantásticos como los números metálicos y los bastardos plásticos.

3. Sobre los tríos pitagóricos

El "Teorema de Pitágoras" puede ser considerado el resultado matemático más popularmente conocido de la Historia de la Matemática. Aunque no es nada evidente, su formulación es muy simple y asimilable en cualquier cultura. Destaca una singular relación entre los catetos y la hipotenusa de todos los triángulos rectángulos, la llamada propiedad pitagórica. Pero lo más atractivo de la propiedad pitagórica, es que no solo es válida para todos los triángulos rectángulos, sino que los caracteriza completamente, es decir, cualquier triángulo que verifique la igualdad $c^2 = a^2 + b^2$ con la magnitud numérica de sus tres lados, tiene necesariamente un ángulo de 90 grados, localizado justo frente al lado mayor.

En todas las culturas antiguas, especialmente en la India, la China y en la Hélade del mediterráneo europeo-africano, el afán por halagar a los dioses a través de la construcción de altares y templos llevó a buscar la simetría de las formas y la precisión en las proporciones, para lo que se necesitaba claridad en la posición de los ejes perpendiculares. En muchos de los monumentos megalíticos: dólmenes, pirámides, murallas, etc., se puede observar un cierto dominio de las proporciones pitagóricas.

Podemos asegurar que en la propiedad que denominamos "Teorema de Pitágoras" se unen con suficiente profundidad ideas fundamentales que servirán de sustento a dos de las principales ramas del conocimiento: *la Geometría* -ciencia de las medidas, técnica de las observaciones precisas y arte de las formas abstractas- y *la Aritmética*- ciencia del número, técnica de contar y arte del cálculo. Así la construcción geométrica se enlaza a los cálculos aritméticos para dar respuesta a problemas urgentes de todas las culturas posteriores a la Revolución Agraria que ocurre cerca del s. XXV antes de nuestra era.

Ahora bien, y ahí está el detalle: la propiedad pitagórica de los triángulos rectángulos puede interpretarse como una respuesta al problema aritmético de la descomposición de un número cuadrado z^2 como suma de otros dos números cuadrados x^2+y^2. Diofanto de Alejandría en el siglo III d.C. se interesó por encontrar las soluciones racionales de la ecuación numérica $z^2 = x^2 + y^2$. Así en el segundo libro de la *Aritmética* introduce una fórmula generadora de pares de soluciones racionales:

$$x = z\frac{2k}{k^2+1}, \quad y = z\frac{k^2-1}{k^2+1},$$

donde k es un número entero.

Diofanto, al parecer, no le dio importancia a que su fórmula genera una cantidad indefinida de tríos pitagóricos, aunque más adelante, en el tercer libro, señala

> "*nosotros sabemos que un cuadrado lo podemos descomponer en dos cuadrados en una infinidad de formas diferentes*".

Expresado así es más fácil advertir la relación con el problema más general de representar un número entero cualquiera n como suma de cuadrados, también tratado en la *Aritmética*. Observemos que dado n, no siempre existe un par de enteros (x,y) solución de la ecuación $n = x^2 + y^2$. Por ejemplo, ni 3 ni 7 son representables en sumas de dos cuadrados, mientras que

$$5 = 2^2 + 1^2; \quad 17 = 4^2 + 1^2; \quad 85 = 2^2 + 9^2 = 6^2 + 7^2.$$

No es difícil darse cuenta que el cuadrado de todo entero es de la forma $4m$ ó $4m+1$, de ahí que la ecuación $x^2 + y^2 = 4k + 3$ no tiene solución para ningún k entero. Por eso ni 3, ni 7 y tampoco 43 ni 2015, se pueden descomponer como suma de dos cuadrados.

El poeta Gaspar Bachet de Meziriac que tradujo al latín en 1621 la *Aritmética* de Diofanto, entre sus jugosos comentarios dice que él ha verificado la hipótesis de que todo número $n \leq 325$ se puede escribir como suma de a lo más cuatro cuadrados de enteros, pero que no obstante sus esfuerzos no ha logrado demostrar que esto es posible para todo número n.

En una de sus numerosas notas marginales sobre la copia de la traducción de Diofanto realizada por Bachet de Meziriac, el prestigioso abogado francés Pierre de Fermat afirma que ha demostrado un teorema general que implica la veracidad de la conjetura de Bachet. Fermat promete publicar ulteriormente los detalles, pero no lo hace. Sin embargo, indica que para demostrar su teorema general es necesario probar que:

1. *Todo número primo de la forma $4n+1$ es la suma de dos cuadrados.*
2. *Todo número primo de la forma $3n+1$ tiene una representación del tipo x^2+3y^2.*
3. *Todo número primo de la forma $8n+1$ ó $8n+3$ se escribe como $x^2 + 2y^2$.*
4. *No existe triángulo rectángulo racional (con lados de longitud racional) cuya área sea un número cuadrado.*

Como se observa, Fermat reduce el problema de los cuatro cuadrados al análisis de varios tipos particulares de ecuaciones cuadráticas. Y nos da la oportunidad de jugar un poco en nuestra clase de aritmética, aunque no logremos ganancias inmediatas, ni demostremos ningún teorema.

Las tentativas para probar o refutar las conjeturas precedentes de Fermat, sirvieron para establecer una *teoría general de las formas cuadráticas*. Eludiendo cualquier tecnicismo, en la clase usamos una versión muy simplificada de la historia, en la que participan tres de los más célebres matemáticos de todos los tiempos: Euler, Lagrange y Gauss.

Con los trabajos de estos tres grandes la atención giró hacia el problema de la representación de un número entero n mediante *formas cuadráticas binarias*, es decir, en la forma

$$n = ax^2 + bxy + cy^2 \ (^*)$$

lo que en seguida se convirtió en una teoría general de formas cuadráticas, una rama importante del Álgebra con múltiples aplicaciones. No obstante, todavía en el 2015 es un enigma, si existe o no, una condición necesaria y suficiente para que dado un entero n la ecuación (*) posea una solución para valores enteros de x, y. Este problema llevó a otro muy emparentado ¿de cuántas formas se descompone un número en una forma cuadrática? Y aquí aparece otra historia ahora del siglo XIX y XX, con muchos misterios y héroes.

Por si lo anterior no resultara suficiente como ilustración de la fertilidad del tema de los tríos pitagóricos en la evolución de la matemática y si el tirano tiempo nos lo permite, en la clase podemos presentar también un árbol frondoso cultivado en los predios de este tema y que es uno de los enigmas más populares de la Historia de la Matemática: "*El Gran Teorema de Fermat*" al que están ligadas innumerables conjeturas, algunas demostradas y otras aún abiertas (este y otras variantes de este tema fértil pueden encontrarse p. e. en nuestro libro Sánchez & Valdés [2010]).

4. Sobre los problemas isoperimétricos

Los problemas de optimización que plantean la búsqueda de la figura con mayor área dentro de una cierta familia de figuras con igual perímetro, son denominados *problemas isoperimétricos*. Por su evidente importancia económica y fácil formulación, pueden tener un origen anterior a la aparición de la cultura helénica. Pero, según relata el comentarista de Euclides, Proclo de Alejandría (s. V d. C.), todavía en la civilización helena la mayoría de los ciudadanos creía que a perímetros mayores corresponden áreas mayores. Por lo que parece, no todos los helenos eran muy duchos en este tipo de problemas y además fácilmente timados en la compra y venta de terrenos.

Una explicación plausible a las falsas creencias es que en el caso de los cuadrados y los círculos existe una relación directamente proporcional entre área y perímetro. Para los cuadrados $A = \frac{P^2}{16}$ y para los círculos $A = \frac{P^2}{4\pi}$, en ambos caso P denota el perímetro y A el área: igual perímetro implica igual área y viceversa. Pero con los rectángulos, p. e., es otra la situación:

Tabla 1
Datos de varios rectángulos de lados a y b con perímetro P y área A

	a	b	A	P
R_1	1	4	4	10
R_2	2	3	6	10
R_3	3	5	15	16
R_4	2	7	14	18

Observemos que los rectángulos R_1 y R_2 tienen el mismo perímetro y no obstante el área de R_1 es menor que la de R_2. Por otra parte, el rectángulo R_3 tiene mayor área que el R_4, a pesar de tener un perímetro menor. Es decir que con un mismo perímetro podemos encontrar figuras poligonales del mismo género y de áreas diferentes. Es pues natural considerar el problema siguiente:

Problema Isoperimétrico con Polígonos: Entre todos los polígonos de n lados y con el mismo perímetro, encontrar aquel que tiene un área mayor.

Existe una leyenda relatada por el poeta latino Virgilio en su famosa *Eneida* (s. I n.e.), que se suele considerar como fuente original del problema isoperimétrico más antiguo de la historia. La leyenda de la princesa Dido, que con una inteligencia fabulosa edificó la ciudad de Cartago, en la porción de terreno que pudo abarcar con una piel de toro cortada en tiras finísimas colocadas anudadas en una figura de semicircunferencia con un segmento de costa como diámetro.

La cuestión es ¿por qué Dido escogió un semicírculo y no otra figura geométrica, digamos un cuadrado o un pentágono? Se trata de dar respuesta a esta inquietud por pasos, como en una película de suspenso o "thriller" como suele decirse, a través de una reconstrucción racional de la historia de la matemática abarcada por el problema y su solución.

Según Mason, J.; Burton, L. y Stacey, K. (2010), en el pensar matemáticamente existen cuatro procesos fundamentales, considerados en dos pares dialécticos: especialización-generalización y conjeturar-convencer. Al menos en los casos *específicos* de los triángulos y los rectángulos, Euclides no consiguió dar el paso hacia la *generalización* y por eso no lo incluyó en los Elementos. Quizás *conjeturó* lo mismo que nosotros, que las figuras regulares son las óptimas, pero no consiguió argumentarlo de manera *convincente*.

Las primeras referencias al problema isoperimétrico más general que se han encontrado, se remontan a la obra del matemático heleno Zenodoro de Atenas (s. II a. C.), quien vivió unos 100 años después de Euclides y también después de Arquímedes. Zenodoro enunció y demostró varios resultados generales relacionados con el problema isoperimétrico con polígonos:

> *Entre todos los polígonos de n lados e igual perímetro el polígono regular es el que tiene un área mayor.*

Zenodoro *descompuso en partes* el estudio del problema, esto lo condujo a analizar separadamente el problema de la igualdad de los lados y el de la igualdad de los ángulos del polígono óptimo. Para resolver este problema Zenodoro primero *rebaja la dimensión del problema*, considerando los polígonos de menor número de lados, los triángulos –este proceso del pensar matemáticamente, es la *especialización*–y con esto se llega al resultado parcial:

> *Entre todos los triángulos con perímetro fijo, el equilátero es el que tiene área máxima.*

Después de haber comprobado el caso de los triángulos es natural realizar la pregunta más general ¿podremos *aplicar el lema o el método utilizado en su demostración* a un polígono de mayor número de lados?

Para los triángulos, la igualdad de los lados implica la de los ángulos, por lo que el problema isoperimétrico para los triángulos está completamente resuelto. Sin embargo, cuando se trata de polígonos con mayor número de lados sería necesario probar que

> *Entre todos los polígonos de n lados e igual perímetro, el que tiene todos los ángulos iguales posee un área mayor.*

La demostración que Zenodoro realiza de este resultado tiene algunas inexactitudes y es algo complicado, por lo que no se expone a este nivel. Sin embargo, podemos plantearlo como *conjetura* y buscar *convencimiento* a través de algún *caso específico*– precisamente, el otro par de procesos dialécticos en el pensar matemáticamente es *conjeturar-convencer*, según A. Mason, J.; Burton, L.; Stacey, K. (2010)-, p.e. el caso de los cuadriláteros puede demostrarse sin dificultad y, después de hacer aclaraciones según el grupo de estudiantes, puede hasta dejarse de ejercicio.

> *Prueba que entre todos los cuadriláteros con igual perímetro, el cuadrado tiene área máxima.*

El problema resuelto por Zenodoro es el problema isoperimétrico dentro de la clase de los polígonos con un número fijo n de lados. Pero, si *dejamos pensar* un poco a los alumnos, alguien nos puede preguntar:

> *Oiga profe, entre todos los polígonos regulares de perímetro fijo P ¿cuál es el que tiene mayor área?"*

Si conocemos la obra de Zenodoro, sabremos que demostró el resultado siguiente:

> *Entre los polígonos regulares de igual perímetro el que tiene mayor área es el de mayor cantidad de lados.*

Pero también sabremos que la demostración realizada por Zenodoro, con el empleo sólo de las herramientas de la geometría elemental, es sumamente ardua y por tanto no la podemos usar exactamente así. No obstante, podemos *convencer* al alumno de la veracidad de este resultado con el auxilio que nos brindan las herramientas computacionales.

Ante todo es preciso tener una relación entre el número de lados n, el área A_n del polígono regular de n lados y su perímetro P_n. Dejamos pensar después de plantear una interrogante:

> *¿Conocemos alguna fórmula que relacione área y perímetro de los polígonos regulares? Si no la conocemos ¿cómo podríamos encontrarla?*

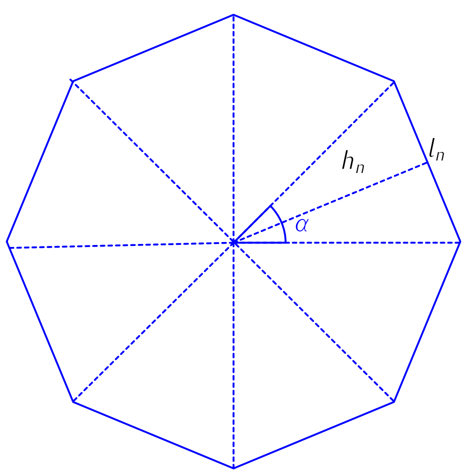

Figura 1: Triangulación de un polígono

Las indicaciones dependen del grupo de alumnos, pero no es difícil encontrar una relación adecuada entre el área y el perímetro de un polígono regular, basta con hacer una triangulación uniendo los vértices al centro del polígono (*Fig. 1*). Se formarán n triángulos isósceles iguales y con un vértice situado en el centro del polígono, cada triángulo tiene la misma altura h_n y la misma base l_n, uno de los n lados iguales del polígono (*Fig.1*). Por tanto, el área total viene dada por la fórmula:

$$A_n = \frac{h_n}{2} P_n,$$

Donde h_n es la *apotema* del polígono y P_n su perímetro. En el problema isoperimétrico $P_n = P$, es una cantidad constante que se supone conocida, así que solo es necesario encontrar una expresión adecuada para h_n. El valor común de los ángulos correspondientes a este vértice es $\alpha_n = 2\pi/n$. Si consideramos la función tangente, entonces se encuentra fácilmente que

$$h_n = \frac{l_n}{2\tan\frac{\pi}{n}} = \frac{P}{2n\tan\frac{\pi}{n}}.$$

Finalmente, para el área obtenemos la relación

$$A_n = \frac{P^2}{4n\tan\frac{\pi}{n}}.$$

Una forma de analizar la variación de A_n como función de n, es mediante la *experimentación* (en este momento debemos auxiliarnos de una calculadora electrónica). En la Tabla 2 hemos tomado $P = 2\pi$ –valor del perímetro de la circunferencia de radio unidad, y hemos calculado los valores de A_n, correspondientes a los valores de n que se indican.

Tabla 2
Valores del área A^n de los polígonos con perímetro fijo $P = \pi$ y n lados variables

n	A_n	n	A_n	n	A_n
3	1.899406252	50	3.137457394	1000	3.141582319
7	2.927777815	100	3.140559043	10000	3.141592550
10	3.037551898	500	3.141551311	100000	3.141592652

Estos resultados corroboran el resultado de Zenodoro al menos para los valores de n escogidos. Pero ¿no podríamos evidenciar más claramente el crecimiento de las áreas A_n cuando n crece? Por supuesto esto depende de la preparación previa de los alumnos que tenemos en el aula, hay muchos grupos que nos agradecen la demostración más detallada y rigurosa y otros son felices si dejamos las ideas vírgenes. Debemos ser cuidadosos, tanto con unos como con otros, para no perder su interés, ni aburrirlos.

Entonces, para concluir (siempre que el contexto del aula lo asimile) planteamos el problema concreto siguiente:

> *Probar que el círculo con perímetro P tiene mayor área que cualquier polígono con ese mismo perímetro.*

La resolución de este problema y otras curiosidades que surgen del tema de las figuras isoperimétricas se pueden encontrar, por ejemplo, en (Sánchez, 2013)

5. Sobre la riqueza del continuo aritmético

Hemos dejado para el final un tema que por su complejidad no podemos tratar en cualquier escenario, pero que por su importancia en las aplicaciones científico-técnicas tampoco podemos soslayar: la riqueza insospechada del continuo aritmético, con una variedad exquisita de tipos de números y con una arquitectura sacada de un texto fabuloso que es el libro de la Naturaleza. El paseo por este tema fértil será todavía más efímero y superficial, por la falta de espacio, según las reglamentaciones.

Pasaron cientos de miles de años antes de que los seres humanos comprendieran que no todas las "*magnitudes razonables*" se podían medir de manera exacta con números racionales. Por supuesto que desde épocas remotas se sabía que algunas magnitudes geométricas asociadas a figuras simples como triángulos, rectángulos o círculos no se podían *medir fácilmente* a través de enteros y fracciones. Pero resolvían el problema práctico con una medida aproximada y se quedaban harto satisfechos. Es decir, que la consideración de números no racionales era innecesaria para las primeras civilizaciones que basaban la matemática en premisas empíricas, no especulativas. La necesidad de tomar en cuenta números que no son racionales, apareció junto con las civilizaciones cuya base económica les permitió el desarrollo de clases sociales con suficiente tiempo para especular sobre asuntos esotéricos como la existencia de números *no racionales.*

El tema de las irracionalidades aritméticas es tan fértil que no más hacemos referencia a este concepto aparecen multitud de interrogantes: ¿en qué problemas matemáticos concretos aparecieron las irracionalidades aritméticas? ¿Existen varios grados de irracionalidad aritmética? y ¿cuántos tipos de irracionalidades hay? ¿Son acaso mejores unos números irracionales que otros? ¿Cuáles son los números irracionales más famosos? ¿Son muchos más los números irracionales comparados con los racionales? ¿Existen números con naturaleza enigmática, que no sabemos todavía si son o no son irracionales? Para intentar responder a esas preguntas y otros cuestionamientos naturales que puedan aparecer en el estudio de las irracionalidades, lo mejor, en nuestra opinión, es hacer un paseo en el tiempo, con la guía de la Historia de la Matemática. Aquí solo vamos a poner unos indicadores para que los aguzados los sigan y encuentren lo que deseen encontrar y seguro también lo que no buscan.

Magnitudes inconmensurables y números inexpresables

No se sabe exactamente cuándo surgieron los números irracionales, pero su origen se achaca al supuesto descubrimiento de las magnitudes inconmensurables por los antiguos pitagóricos. Recordemos que ellos basaban su filosofía en la sentencia "*Todo es número*". Los pitagóricos estaban convencidos de que la razón entre las longitudes de dos segmentos cualesquiera es siempre un número racional, lo cual resumían con el planteamiento de que "*todos los segmentos son conmensurables*". Es decir, que se puede encontrar una unidad común a ambas longitudes, siendo éstas múltiplos de dicha unidad.

Irónicamente, se supone que son los propios pitagóricos -y al parecer un tal Hipaso de Metaponte-, que traicionando su propia filosofía, descubren los inconmensurables (entre 450 a.C. y 375 a.C.), y con ellos los números irracionales, que eran unos *números inexpresables* en el lenguaje de los números pitagóricos racionales. Cuenta la leyenda que Hipaso fue lanzado al mar por los disgustados pitagóricos, no sólo castigado por haber hecho público su descubrimiento, lo cual violaba las estrictas leyes de los pitagóricos, sino también por la forma en que lo descubrió a partir del pentagrama, que era uno de los símbolos sagrados de esa secta. (Fig.2).

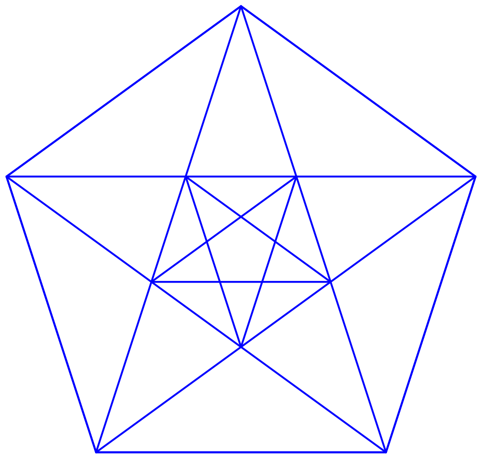

Figura 2: Pentagrama pitagórico.

En este caso la inconmensurabilidad está asociada al número inexpresable cuyo cuadrado es 5. Este número en notación actual es $\sqrt{5}$, no es representable como cociente de dos números enteros, aunque hoy usamos la aproximación racional que nos ofrece rápidamente cualquier calculadora electrónica en el sistema decimal hasta con 20 cifras exactas,

$$\sqrt{5} \approx 2,23606797749978969641.$$

Es decir, podemos confiar en este valor decimal en todos los problemas que no precisen de un error menor de $\frac{1}{10^{20}}$, pero si queremos deducir resultados exactos que dependen de su valor irracional, entonces usamos el símbolo $\sqrt{5}$ y en los cálculos aritméticos lo consideramos como un número tal que al elevarlo al cuadrado obtenemos el valor entero 5.

Teodoro de Cirene (siglo V a.n.e.), uno de los maestros de Platón, es de los primeros en plantear una teoría de números irracionales que será recogida en los Elementos de Euclides. En particular demostró que los lados de los cuadrados cuya área era un número primo era inconmensurable con el lado del cuadrado de área unidad. También fue el autor de la conocida espiral que representa longitudes irracionales $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, ..., $\sqrt{17}$, como hipotenusa de triángulos rectángulos de lados 1 y 1, 1 y $\sqrt{2}$; 1 y $\sqrt{3}$, 1 y $\sqrt{4} = 2$, y así hasta llegar a representar $\sqrt{17}$. (Fig. 3).

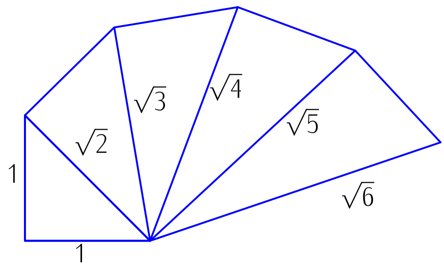

Figura 3: Espiral de Teodoro

> *Reflexiona: ¿Por qué Teodoro no continuó con la representación geométrica de* $\sqrt{18}$ y $\sqrt{19}$ *y otras raíces sucesivas?*

El alumno de Teodoro, Teeteto de Atenas (s. IV a.C.) clasificó las irracionalidades. No consideraba lo mismo $\sqrt{17}$, que $\sqrt{17}+\sqrt{13}$ o $\sqrt[3]{1+\sqrt{17}}$. Esto tiene fácil comprensión si lo llevamos al campo del álgebra de los polinomios: $\sqrt{17}$ es raíz de un polinomio de segundo grado, $\sqrt{17}+\sqrt{13}$ es raíz de uno de cuarto grado y no menos, $\sqrt[3]{1+\sqrt{17}}$ satisface un polinomio de sexto grado como mínimo. De tal forma hoy se clasifican las irracionalidades algebraicas (porque están asociadas a un polinomio de grado mínimo). Así $\sqrt{17}$ es algebraico de grado 2, $\sqrt{17}+\sqrt{13}$ es de grado 4 y $\sqrt[3]{1+\sqrt{17}}$ es un irracional algebraico de sexto grado.

En Occidente se consideró por mucho tiempo que Simón Stevin era el creador del método de representación decimal de los números fraccionarios hasta que en 1948 se hicieron públicas las obras de Al Kashi, un famoso astrónomo musulmán, que trabajó en Samarcanda bajo la protección del gran kan turco mongol Ulug Beg, también aficionado a las matemáticas y la astronomía. Al Kashi decide introducir las *fracciones decimales* sobre todo para realizar aproximaciones más precisas de magnitudes geométricas como la superficie y el volumen de la cúpula de diferentes mausoleos y mezquitas musulmanas.

Por supuesto que la obra de Simón Stevin fue definitiva para el establecimiento en Occidente de la representación decimal ya que durante mucho tiempo no se justipreció el magnífico legado de las culturas orientales en una época cuándo los occidentales no se preocuparon por ampliar el bagaje teórico del legado helénico. Y no fueron solo los musulmanes árabes los no europeos interesados en las irracionalidades aritméticas también en la India y en China, civilizaciones mucho más antiguas. De todo un poco se puede hablar con un discurso ameno, atractivo, culto y bien intencionado según sea el grupo de estudiantes.

Otro asunto que acostumbramos analizar con la participación de los estudiantes es el siguiente:

> *Problema: ¿Qué irracionalidades aritméticas son construibles geométricamente con regla y compás?*

No es difícil darse cuenta que solo con regla y compás podemos construir segmentos de longitudes irracionales cuadráticas como $\sqrt{2}$, $\sqrt{17}$, o también $\sqrt{1+\sqrt{17}}$ y $\sqrt[8]{5}$. Un poco más difícil es comprobar que las de un orden diferente a $m = 2^n$ no son construibles, por ejemplo, $\sqrt[3]{2}$ y $\sqrt[5]{3}$ no son construibles. Pero, aún más difícil resulta demostrar cuáles son las únicas irracionalidades construibles con regla y compás. Al parecer la primera "demostración" se debe al filósofo francés René Descartes a mediados del siglo XVII. No obstante no es hasta el siglo XIX que se logra encontrar una demostración aceptable por la comunidad matemática. Esta demostración se consiguió al traducir el problema al lenguaje del álgebra por un joven de solo 19 años que con razón se le llama el "príncipe de las matemáticas", Karl Gauss.

Si el grupo de estudiantes tiene menos madurez y queremos motivarlo a que se interese por aumentar su cultura matemática en este tema de la riqueza del continuo aritmético, un buen anzuelo es tratar los irracionales metálicos y el bastardo número plástico y en especial el número de oro, que aquí no vamos a incluir, pero invitamos al interesado que sobre estos números irracionales brillantes y otras curiosidades más "racionales" lean nuestro sencillo libro (Sánchez & Roldán, 2012) que es el producto de nuestras experiencias en un curso de la televisión educativa de Cuba sobre "*Números y Figuras en la Historia*" que impartimos en el curso 2009-2010.

Los números metálicos y el número plástico son ejemplos significativos de números irracionales algebraicos, es decir, son raíces de algún polinomio algebraico. El otro asunto que a veces logramos incluir en este tema, es un poco más complicado y requiere mayor madurez matemática del grupo de estudiantes:

> *Problema: ¿Existirán números irracionales que no son raíces de ningún polinomio con coeficientes enteros? ¿Por ejemplo, es π raíz de algún polinomio?*

Las investigaciones sobre números construibles aumentaron el interés por el estudio de los números irracionales algebraicos y también agudizaron la búsqueda de una demostración de que el número irracional π, asociado a la construcción de un cuadrado de área igual al área de un círculo de radio unidad, no es algebraico, es decir, no es raíz de *ningún polinomio* con coeficientes enteros. A los números irracionales que no son raíz de ningún polinomio se les llama *números trascendentes* y aunque π fue de los primeros en aparecer por las necesidades prácticas en la antigüedad prehelénica, no fue identificado con el sello de trascendencia hasta finales del siglo XIX. En general, encontrar números irracionales no algebraicos es sumamente difícil, se debe probar la *no existencia* de polinomios que se anulen en ese número. De todas formas, como cultura matemática es sumamente instructivo tratar de comprender la esencia no algebraica de números tan útiles como π o como e – base de los logaritmos neperianos o del intrigante número de Hilbert $2^{\sqrt{2}}$ que motivó mucha investigación en el siglo XX.

Sin mucha dificultad después de "chapotear" un poco en el universo trascendente, surge una nueva inquietud:

> *¿Qué tipo de número aparece más en el continuo aritmético, el racional o el irracional, el algebraico o el trascendente?*

El principal problema para tratar este asunto es que el grupo de estudiantes a que va dirigido debe tener una idea más o menos clara de conjunto infinito, concepto muy peliagudo si no se comprende bien. Por ejemplo, no es intuitivo imaginar que existen muchos más números irracionales que racionales, sobre todo porque ambos conjuntos son evidentemente infinitos. Menos intuitivo es que los números irracionales algebraicos son muchísimo menos que los irracionales trascendentes, porque los algebraicos son tantos como polinomios existen y los números trascendentes no se introducen en la enseñanza media y quizás se conoce algo de π sin mucha fanfarria. Aquí puede haber varias opciones o lo explicamos bien o lo dejamos para un momento posterior de la enseñanza o se lo contamos solo a los más aventajados o que hayan mostrado interés. Creo que es un problema de madurez matemática, que en cierta forma está emparentada con la cultura matemática adquirida. Los grandes matemáticos de los siglos XVII y XVIII intuían la existencia de muchas irracionalidades no algebraicas, pero aún a principios del siglo XIX no existían demostraciones claras y rigurosas de la existencia de irracionalidades no algebraicas. La historia nos alerta y señala que el tema es espinoso. Por eso el maestro debe decidir según el nivel de preparación de su grupo, sean estudiantes de nivel secundario o superior o docentes en busca de mejor formación posgraduada, con qué delicadeza convencer de la existencia de muchos números irracionales trascendentes.

Podemos ultimar este breve paseo atravesando rápidamente por la constelación de las irracionalidades trascendentes y analizando relaciones entre ellos. Si podemos entrar en el mundo de los imaginarios, la famosa identidad de Euler, considerada *"la más bella fórmula matemática"* puede ayudar para cerrar con broche de oro:

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

6. A manera de conclusiones: Fértil en estructura flexible

La estructura de las clases y el discurso debe ser flexible. Según el contexto de alumnos, sus competencias e intereses culturales organizamos la clase. Se puede plantear la solución de una parte de los problemas y comentar los otros, utilizando la experimentación gráfica o computacional con el fin de abrir el apetito para temas más avanzados de geometría o trigonometría o incluso de cálculo. En el caso muy especial de alumnos de talento y con afición expresa por la matemática, entonces seguro desearán conocer la demostración de cada asunto y ¿por qué no mostrarles un esquema de la misma para convencerlos? Si estamos trabajando con alumnos universitarios, que han pasado cursos de Cálculo Avanzado, resulta muy edificante enseñarles la solución de algunos problemas simples usando matemática superior, pero todavía más edificante es resolver problemas difíciles con métodos elementales.

Queremos dejar "pensar la matemática", que nuestros alumnos no "desconecten la atención" y que se apasionen por buscar la riqueza del conocimiento y la disfruten felizmente.

Para terminar nuestro relato demos a conocer lo que uno de los más completos matemáticos educadores del siglo XX, el ruso Andrei Nikoláyevich Kolmogórov dijera en su última entrevista y está recogido en una recopilación publicada en Rusia después de su desaparición física:

> [...] A los profesores de matemática tanto en la escuela media como en la superior, se les debe exigir no sólo un conocimiento profundo de su ciencia. Enseñar bien las matemáticas puede sólo aquel que la ame con pasión, la comprenda como una ciencia viva y conozca el contexto histórico que originó sus conceptos (Kolmogórov, 1998)

Referencias

Ben-Hur, M. (2004). *Concept-Rich Mathematics Instruction. Building a Strong Foundation for Reasoning and Problem Solving.* Association for Supervision and Curriculum Development. Alexandria, Virginia. USA.

Devlin, K. (2012). *Introduction to Mathematical Thinking*. MAA. Washington DC.

Dieudonné, J. (1990). *A Formação da Matemática Contemporânea*. Publicações Don Quixote. Lisboa.

Fauvel, J.; Maanen, J. (Eds.) (2000). *History in Mathematics Education. The ICMI Study*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Guzmán, M. de (2007). Enseñanza de las Ciencias y la Matemática. *Revista Iberoamericana de Educación, 43,* 19-58.

Jankvist, U. T. (2009). A categorization of the "whys" and "hows" of using history in mathematics education. *Educational Studies in Math*.

Kolmogórov, A. N.(1988). *La Matemática-Ciencia y Profesión*. Biblioteca Kvant Nº 64. Nauka, Moscú (en ruso).

Mason, J.; Burton, L. & Stacey, K. (2010). *Thinking Mathematically*. 2nd. ed. Prentice Hall (La 1ª ed. apareció en 1982 y fue traducida al español).

Ruiz, A. (1997). Las posibilidades de la historia en la educación matemática. Una visión filosófica. *Boletín Informativo CIAEM. Año 5, nº 2*

Sánchez Fernández, C. (2013a). ¿Cómo contextualizar y dejar pensar la matemática? *1er. Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe.* Santo Domingo. República Dominicana.

Sánchez Fernández, C. (2013b). ¿Cómo hacer apetitoso el discurso matemático? Experiencias con sabor cubano. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática 8*(11), 225-236.

Sánchez Fernández, C.; Roldán Inguanzo, R. (2012). *Paseo por el universo de los números*. Editorial Academia. La Habana.

Sánchez Fernández, C.; Valdés Castro, C. (2010).*El entrañable encanto de las matemáticas.* Editorial Félix Varela. La Habana.

Sánchez Fernández, C.; Valdés Castro, C. (2000). Proposiciones para un estudio dinámico de la medida. En Fossa, J. (ed.) *Facetas do diamante. Ensaios sobre Educação Matemática e História da Matemática* (pp. 31-58). Editora da SBHMat. Rio Claro.

Sánchez Fernández, C.; Valdés Castro, C. (1999). Por un enfoque histórico-problémico en la educación matemática. *Revista Ciencias Matemática 17*(2), 137-148

Sánchez Fernández, C.; Valdés Castro, C. (1997). Ilustración del uso de la historia de la matemática en una enseñanza centrada en problemas. *Educación Matemática 9*(3), 86-96

Valdés Castro, C.; Sánchez Fernández, C. (2011). Historia y rigor en una iniciación al cálculo: una experiencia cubana. *Educação Matemática e Pesquisa. Sao Paulo, 13*(3), 581-596