

# La resolución de Problemas Matemáticos y el uso coordinado de tecnologías digitales<sup>1</sup>

**Luz Manuel Santos Trigo**

Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN

México

msantos@cinvestav.mx

## Resumen<sup>2</sup>

El amplio desarrollo y disponibilidad de diversas tecnologías digitales plantean retos importantes a los sistemas de educación relacionados con los contenidos, estrategias y habilidades que los estudiantes deben aprender y sobre qué tipos de escenarios de enseñanza que se deben considerar en el aprendizaje. ¿Qué cambios en el currículum matemático se deben considerar cuando los estudiantes utilizan sistemáticamente diferentes tecnologías digitales? En la respuesta a esta pregunta se destaca la idea de problematizar los contenidos como un eje para organizar y estructurar el conocimiento y uso coordinado de tecnologías digitales en el aprendizaje de las matemáticas. Se argumenta la necesidad de que los estudiantes desarrollen una cultura digital donde se valore el trabajo en equipo y la práctica de una reflexión matemática continua que los oriente en el desarrollo de recursos y estrategias de resolución de problemas.

## Palabras clave

Resolución de problemas, tecnología digital, construcción de conocimiento matemático.

## Abstract

The extensive development and availability of various digital technologies pose important challenges to educational systems related to the contents, strategies and abilities that students should learn and to the types of teaching scenarios that should be considered to promote learning. What changes in the Mathematics curriculum should be contemplated when students use various digital technologies systematically? The answer to that question will emphasize the idea of problematizing the contents as a fundamental idea for organizing and structuring the knowledge and coordinated use of digital technologies in the learning of mathematics. It will be argued that it is necessary for students to develop a digital culture where teamwork, and the practice of continuous mathematical reflection that orients the development of resources and strategies for solving problems are valued.

## Key words

Problems solving, digital technologies, mathematical knowledge.

---

<sup>1</sup> Este trabajo corresponde a una conferencia paralela dictada en la XIV CIAEM, celebrada en Tuxtla Gutiérrez, Chiapas, México el año 2015.

<sup>2</sup> El resumen y las palabras clave en inglés fueron agregados por los editores.

Recibido por los editores el 10 de noviembre de 2015 y aceptado el 15 de enero de 2016.

*Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*. 2016. Año 11. Número 15. pp 333-346. Costa Rica

## 1. Introducción

El amplio desarrollo y disponibilidad de diversas tecnologías digitales plantean retos importantes a los sistemas de educación relacionados con los contenidos, estrategias y habilidades que los estudiantes deben aprender, y sobre qué tipos de escenarios de enseñanza se deben considerar en el aprendizaje. El uso de diversas tecnologías permea muchas de las actividades que los individuos realizan en su quehacer cotidiano. Los dispositivos móviles, como las tabletas o los teléfonos inteligentes son vehículos no sólo para comunicarse o interactuar, sino también para buscar información en línea, comprar algún producto o para realizar una consulta médica. ¿Cuáles son los retos importantes que las instituciones deben afrontar para promover el aprendizaje de los estudiantes, que considere los cambios culturales y sociales que se desarrollan en el contexto mundial? Hoy, el uso de un dispositivo móvil está abriendo oportunidades a particulares de obtener recursos, al ofrecer servicios como rentar una habitación en su casa o compartir un vehículo. ¿Cómo pueden los profesores y estudiantes utilizar este tipo de tecnologías en el aprendizaje y construcción de conocimientos?

Schmidt & Cohen (2013) describen las maneras en que las tecnologías incidirán en las actividades y tareas de los individuos en un futuro próximo. Afirman que una casa o apartamento será una orquesta con varios dispositivos digitales donde la persona que la habita será el conductor. Ya sea con gestos o con el habla directa, ese individuo dará las instrucciones para controlar la temperatura, la humedad, las luces o la música del ambiente. Tendrá un sistema central automatizado y programado, que enviará señales a los robots encargados de las tareas de limpieza y mantenimiento del lugar. Habrá un seguimiento de los productos que se almacenan en el refrigerador, y aparecerá un recordatorio indicando qué artículos de la despensa se deben comprar y los lugares para adquirirlos a mejor precio. Además, mostrará en un monitor visible en la sala o cocina las actividades que el sujeto tiene planeadas para el día o la semana. También, este mismo, por medio de una aplicación, tendrá información disponible sobre su presión sanguínea, lípidos, nivel de glucosa de manera inmediata y, en caso de sufrir un accidente, como el tropezarse con un objeto al ir a la cocina, puede recurrir inmediatamente a su teléfono y abrir la aplicación "diagnóstico", la cual, escanea el golpe y le indicará si existe fractura y qué hacer o a qué médico acudir en caso necesario. Al salir del apartamento, existirá un vehículo, sin conductor, que transportará al individuo a su trabajo, oficina o al lugar de la reunión que tenía programada para ese día. Este escenario resumido da cuenta del tipo de actividades que las tecnologías digitales podrán realizar y, como consecuencia, generarán una manera distinta de vivir e interactuar en la sociedad.

Así, se vislumbra una transformación en las formas de realizar tareas rutinarias y una necesidad por ajustar las estructuras de las instituciones encargadas de la formación académica y cultural. En términos generales, el uso sistemático y coordinado de diferentes tecnologías debe ayudar a los estudiantes a desarrollar formas de pensar que resultan importantes en la formulación de preguntas y la resolución de problemas. En este artículo se identifican algunos principios alrededor de una propuesta que oriente la construcción del conocimiento de los estudiantes a partir el uso coordinado de herramientas digitales. Se destacan las formas de pensar, los conocimientos y habilidades que los estudiantes deben desarrollar que les permita no sólo construir una

cultura amplia en disciplinas científicas; sino también identificar escenarios de aprendizaje donde la tecnología digital contribuya en la construcción de ese conocimiento. Así, la meta es que los estudiantes desarrollen competencias para resolver no sólo los problemas que se enfrenta en un ambiente escolar; sino aquellos que aparecen fuera de la escuela.

## 2. Cambios en la Educación Matemática

Una sociedad con cambios notables y con desarrollos tecnológicos disponibles demanda ajustes significativos en los sistemas de educación. Por ejemplo, algunas instituciones reconocidas en el ámbito internacional han puesto en línea algunos programas y cursos que antes se impartían de manera presencial. Además, un estudiante ahora consulta fuentes en línea en su quehacer cotidiano cuando quiere resolver un problema o comprender algún concepto. ¿Qué acciones se deben considerar en la reestructuración de un sistema educativo que incorpore de manera sistemática el empleo coordinado de tecnología digital en la formación del individuo? ¿Qué hacer para que los individuos participen en el diseño de tecnologías importantes para el desarrollo del conocimiento, producción de alimentos, o equipos médicos y medios de transporte o comodidades? ¿Qué tipo de educación debe recibir un niño o individuo para que al término de sus estudios participe en la generación de conocimiento y tecnologías y en la resolución de problemas? Siempre conlleva un riesgo plantear conjeturas sobre qué será vital en la sociedad y en el ámbito laboral dentro de 16 años cuando ese niño que inicia su educación elemental hoy obtenga el título de abogado o ingeniero, pero podemos preguntar: ¿Seguirán siendo trascendentales los contenidos que se estudian en matemáticas y ciencias o habrá una geometría distinta que incluya el estudio del movimiento de las figuras o un álgebra con poco énfasis en las operaciones o cálculos algebraicos? ¿Seguirá siendo cardinal que el niño en la primaria haga planas y planas para aprender a escribir o es mejor introducirlo en el uso de computadoras y tabletas que lo ayuden a desarrollar o presentar un argumento estructurado y comprender lo que lee? ¿Desaparecerá el modelo de enseñanza donde, en general, un profesor promueve actividades de aprendizaje en un ambiente controlado? ¿Debe considerarse ya aquellos escenarios de enseñanza donde los estudiantes puedan ellos mismos diseñar un menú de aprendizaje que incluya una interacción en línea con otros estudiantes y asesores? La discusión de estas preguntas implica analizar el tipo de conocimientos, habilidades y formas de pensar que la educación formal debe promover a través de las instituciones. Es decir, los sistemas de educación deben ser sensibles a los avances de la ciencia y la tecnología, en términos de ajustar constantemente los modelos de formación y promoción de la educación de los individuos. Los desarrollos tecnológicos demandan ajustes o cambios en los sistemas de educación acerca de los contenidos que los estudiantes deben aprender y sobre las formas de organizar y estructurar los ambientes de aprendizaje para que los estudiantes construyan esos conocimientos. Hoy en día es muy común leer que empresas internacionales en distintos ramos contratan a su personal a partir de interrogarlos sobre cómo formularían una pregunta relacionada con el área de la empresa y sobre las posibles formas de responderla. Es decir, les interesa conocer las formas de pensar que exhiban los individuos y las decisiones que tomen en los

procesos de representar y explorar diversos problemas. Resulta menos importante que los individuos muestren un dominio aislado de conocimientos disciplinares.

En esta perspectiva, los estudiantes en su formación académica deben construir y desarrollar conocimiento, estrategias y habilidades necesarias que les permitan participar en los procesos de formulación e identificación de problemas y en la búsqueda de diferentes maneras de resolverlos. En los procesos de resolución, el uso coordinado de diversas tecnologías digitales demanda que los estudiantes:

1. Busquen información relacionada con los temas de estudio en diferentes medios incluyendo libros digitales y sitios en línea. En esta búsqueda los estudiantes deben exhibir métodos y estrategias que les permitan sintetizar, analizar y contrastar los diferentes tipos de información;
2. Aprendan a trabajar en grupos o equipos que les permita escuchar otros puntos de vista, discutir y compartir ideas y soluciones;
3. Desarrollen constantemente nuevas herramientas que les permitan representar y explorar diversos problemas, incluyendo aquí las representaciones dinámicas;
4. Desarrollen y practiquen diferentes maneras de planificar, monitorear y evaluar los procesos de resolución de problemas;
5. Representen y discutan resultados intermedios y finales que puedan ser accesibles a colegas y público en general;
6. Generen resultados que sean compartidos y utilizados por una comunidad amplia;
7. Se involucren en actividades que fomenten la creatividad en la resolución de problemas. Un aspecto fundamental en el desarrollo de la ciencia es buscar diferentes maneras de resolver un problema. La creatividad se desarrolla a partir de analizar un problema desde caminos no convencionales y los estudiantes deben siempre buscar métodos originales o formas novedosas de abordarlo; y
8. Construyan y exhiban valores y principios éticos. El conocimiento disciplinar se desarrolla dentro de una comunidad donde sus integrantes constantemente dialogan, escuchan y manifiestan respeto por las contribuciones e ideas de los demás. Así, el respeto a las diferencias y el desarrollo de responsabilidades civiles deben ser parte de la formación de todos.

### 3. La resolución de problemas y al aprendizaje de las matemáticas

Aprender matemáticas requiere problematizar o cuestionar las tareas o situaciones, pensar distintas maneras de comprender o resolver un problema, utilizar diversas representaciones, encontrar el significado e interpretar la solución y comunicar los resultados (Santos-Trigo, 2014a). Implica que el estudiante desarrolle una disposición favorable hacia el estudio de la disciplina que le permita cuestionarse sobre las tareas propuestas, dar sentido a sus respuestas, explorar preguntas y desarrollar una comprensión matemática como parte de una comunidad de aprendizaje que valore y aprecie

el trabajo individual y de colaboración. Es decir, aprender matemáticas requiere crear la necesidad de reflexionar constantemente sobre el mismo proceso de construcción del conocimiento. Además, el proceso de resolver problemas o comprender un concepto matemático involucra ciclos iterativos de discusión y colaboración en los que los estudiantes deben tener la oportunidad de expresar, revisar, contrastar, interpretar y refinar sus ideas y métodos de solución.

En este período de análisis y reflexión acerca de los problemas que pueden guiar a los estudiantes en la construcción de un conocimiento profundo de las matemáticas, se plantea la necesidad e importancia de centrar la atención en el uso de problemas no rutinarios<sup>3</sup> para conseguir un aprendizaje robusto y más efectivo de los conocimientos matemáticos por parte de los estudiantes.

Selden, Selden y Mason (1994) señalan que un grupo de estudiantes universitarios, que habían cursado y aprobado un curso de Cálculo, mostraron serias dificultades al resolver problemas no rutinarios. Es decir, aun cuando los estudiantes habían estudiado recientemente los contenidos necesarios que les colocaban en disposición de resolver los problemas, la mayoría no identificó que los conceptos de Cálculo estudiados eran suficientes para responder las preguntas. Un ejemplo de esos problemas era el siguiente:

*¿Tiene  $x^{21} + x^{19} - x^{-1} + 2 = 0$  alguna raíz entre  $-1$  y  $0$ ? ¿Por qué?*

En este ejemplo, bastaba con analizar la monotonía de la gráfica de la función asociada al polinomio en el intervalo  $[-1, 0)$ . Al obtener la derivada de la función asociada, se observa que será mayor que cero en todo su dominio de existencia y en particular en el intervalo considerado, lo que indica que la función siempre es estrictamente creciente, de modo que al evaluarla en  $x = -1$ , el valor de la función en dicho punto será 1. Por lo tanto, no corta el eje  $OX$ . Para seguir todo este razonamiento, no es suficiente conocer o disponer de una serie de recursos matemáticos, sino que se debe saber cuándo y cómo utilizarlos. ¿Cuál es el papel de los ejercicios o problemas rutinarios en el desarrollo del conocimiento matemático de los estudiantes? Santos-Trigo & Camacho-Machín (2013) proponen un marco sobre cómo transformar un ejercicio o problema rutinario en un conjunto de actividades que demandan una reflexión matemática por parte de los estudiantes. En este marco se destacan fases importantes donde los estudiantes constantemente plantean preguntas relacionadas con la comprensión de los enunciados y conceptos, la búsqueda de información relacionada, el uso de tecnología digital, la búsqueda de diferentes métodos de solución y la comunicación de resultados. En particular, el uso coordinado de diversas tecnologías digitales ofrece a los estudiantes distintas oportunidades para representar y explorar conceptos e ideas matemáticas desde varios ángulos o perspectivas (Santos-Trigo & Reyes-Martínez, 2014).

I. Comprensión de un problema, concepto, definición o procedimiento matemático. ¿Qué objetos matemáticos están involucrados? ¿Cuáles son los conceptos o elementos claves? ¿Qué datos se proporcionan? ¿Cuál es la tarea que se pide? ¿Existe información suficiente o tiene sentido el enunciado?

<sup>3</sup> Problemas cognitivamente no triviales, es decir, problemas en los que el resolutor no conoce de antemano un método de solución (Selden, Selden y Mason, 1994, p. 19), -

¿Tiene sentido la pregunta o lo que se pide en el problema? ¿Las unidades que se utilizan en los datos son consistentes? ¿Se puede expresar el enunciado de otras maneras? ¿Cómo se plantea el enunciado de un problema?

- i) el papel del contexto: ¿Qué tipos de contextos? Matemático, realista, artificial
- ii) Formulación de problemas. Oportunidades para que los mismos estudiantes propongan problemas o preguntas.

**Uso de YouTube o alguna configuración dinámica**

Por ejemplo, en la figura 1 se puede explorar el comportamiento de la sucesión para distintos valores de <http://www.geogebra.org/student/m139246>.

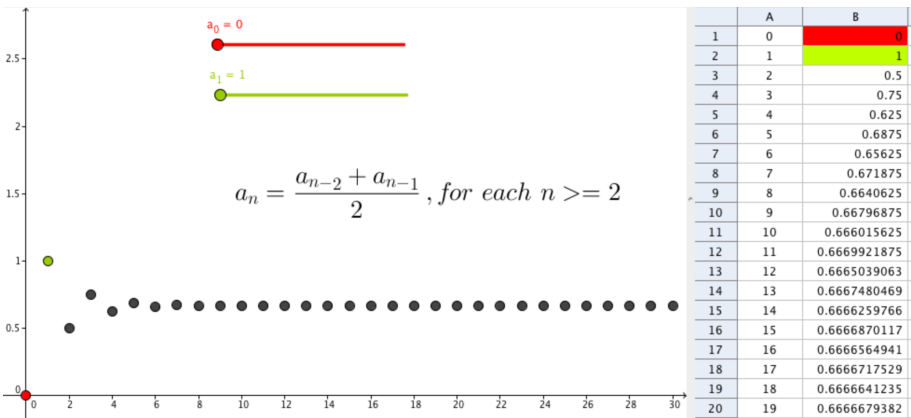


Figura 1: Modelo dinámico para explorar la sucesión.

**Acciones:** Leer el problema y discutir en pareja o grupos de tres el significado del enunciado. Utilizar alguna herramienta para hacer una representación geométrica del problema.

II. Ideas, conceptos, recursos asociados con el problema o tarea. ¿Qué información, teoremas, relaciones o resultados matemáticos se conocen sobre el tema?

¿Qué otros conceptos y relaciones se identifican cuando se construyen objetos auxiliares en la representación del problema?

¿Qué recursos en línea puedo consultar para buscar información sobre el tema o temas involucrados? ¿Existe algún video donde se expliquen los conceptos?

**Uso de enciclopedias en línea o sitios como KhanAcademy**

**Acciones:** Hacer una lista de los términos y conceptos que aparecen en el enunciado. Compararla con la lista de otros estudiantes y buscar información en línea o libros de texto que amplíe la lista inicial.

III. Un plan de solución y su implementación. ¿Cómo se puede utilizar o integrar la información y resultados relacionados con el problema en el diseño de un plan de solución? ¿Existen diferentes maneras de resolver el problema o explicar un concepto? ¿Se puede construir y explorar un acercamiento dinámico del problema?

¿Qué información se obtiene al relajar las condiciones del problema o considerar casos particulares?

¿Cómo se construye un modelo dinámico del problema? ¿Qué conjeturas se pueden visualizar?

¿Qué información o datos son importantes en la construcción de un modelo algebraico del problema?

¿Tiene sentido la solución que se obtiene del problema?

¿Cómo se fundamenta y comunica la solución del problema?

¿Todos los acercamientos sustentan la misma solución?

### Uso de GeoGebra, WolframAlpha

**Acciones:** Trabajo individual, en pareja o equipo en la implementación de distintas maneras de resolver el problema.

IV. Análisis y contrastación de los distintos caminos de resolver el problema. ¿Qué formas de razonamiento se involucraron? ¿Qué estrategias y recursos se utilizaron en cada uno de los acercamientos?

¿Qué conceptos se utilizaron en cada acercamiento o solución del problema?

¿Se utilizó toda la información dada al resolver el problema?

¿Cómo se sustentó la solución?

**Acciones:** Revisar y discutir en grupo las maneras de razonar que llevaron a la solución del problema. Identificar los conceptos y estrategias heurísticas importantes en el proceso de solución.

V. Extensión y formulación de nuevos problemas. ¿Se puede generalizar el problema? ¿Los métodos de solución se pueden aplicar a otras familias de problemas? ¿A partir de los conceptos involucrados, qué otros problemas se pueden formular?

a) Problemas que se resuelvan con el mismo método

b) Proporcionar información o datos y de ahí proponer un problema

**Acciones:** Discusión de la generalidad de los métodos de solución. Proponer una lista de nuevos problemas.

Las fases en la resolución de problemas involucran el uso coordinado de tecnología digital. Así, un aspecto esencial es el desarrollo de materiales que incorporen lectores de libros interactivos con audio, videos y animaciones útiles en la representación y exploración de los problemas. Roschelle et, al. (2013, p. 36) afirman que “la meta

en el diseño de los nuevos textos digitales debe ser guiar y promover una relación más activa entre el lector y el texto que le permita el desarrollo de habilidades y estrategias para engancharse productivamente en el estudio de ideas fundamentales de las matemáticas". De la misma manera, Camarena (2014) propone un modelo para el diseño de material interactivo que oriente a los estudiantes en la construcción de conocimiento matemático.

#### 4. Competencia digital

Un tema insoslayable es que el estado o gobierno construya una infraestructura eficiente que permita a los individuos desarrollar una cultura digital amplia. Es decir, así como la alfabetización de todos los individuos se reconoce como una competencia que todos deben desarrollar porque les permite construir, ampliar y utilizar habilidades cognitivas, asociadas con la comprensión de lectura y aritmética básica, en la resolución de problemas; la *alfabetización* o cultura digital de todos los individuos resulta ahora necesaria no sólo en los procesos de identificar dilemas o problemas disciplinarios, sino también en la búsqueda de información, representación, exploración, solución de problemas, y comunicación de resultados.

La competencia digital se refiere a que los estudiantes desarrollen recursos y habilidades en el uso de tecnología digital en la resolución de problemas. El término tecnología digital comprende aquellas tecnologías con propósitos múltiples como pizarrones interactivos, Powerpoint, tecnologías para fines de comunicación (Skype, Facebook, etc.) o Internet; y también aquellas diseñadas para realizar tareas matemáticas como los sistemas de geometría dinámica (GeoGebra), WolframAlpha, o Sistemas de Álgebra Computacional. Ambos tipos de tecnologías pueden contribuir en la construcción del conocimiento de los estudiantes. Así, los profesores y estudiantes deben conocer el potencial de estas herramientas en los procesos de resolución de problemas. Mishra & Koehler (2006) afirman que los profesores de matemáticas deben analizar y discutir las transformaciones y cambios del contenido matemático que resultan cuando los estudiantes usan consistentemente tecnología digital en sus experiencias de aprendizaje. En este contexto, Santos-Trigo & Ortega-Moreno (2013) presentan un modelo dinámico de un problema clásico que aparece en los cursos de geometría analítica: *¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de un punto fijo y el eje Y?* El modelo ilustra la construcción de todas las cónicas a partir del movimiento de objetos dentro de la configuración dinámica. Su construcción involucra representar el punto fijo A y seleccionar un punto B sobre el eje Y desde el cual se traza la perpendicular al mismo eje. También se traza la recta AB. Las rectas AB y BE forman un ángulo DBC. Con la herramienta se rota la recta AB la medida del ángulo DBC alrededor del punto A. Esta recta interseca a la recta DB en E. Así el triángulo BEA es isósceles. El lugar geométrico del punto E cuando el punto B se mueve sobre el eje Y es una parábola (Figura 2).



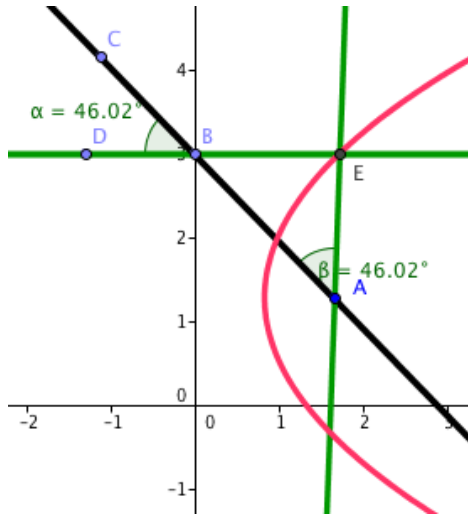


Figura 2: El lugar geométrico del punto E cuando el punto B se mueve sobre el eje Y es una parábola.

Otra manera de abordar este problema es trazando la mediatriz del segmento AB que interseca a la recta perpendicular al eje Y que pasa por B en el punto C. El lugar geométrico del punto C cuando el punto B se mueve sobre el eje Y es la parábola (Figura 3).

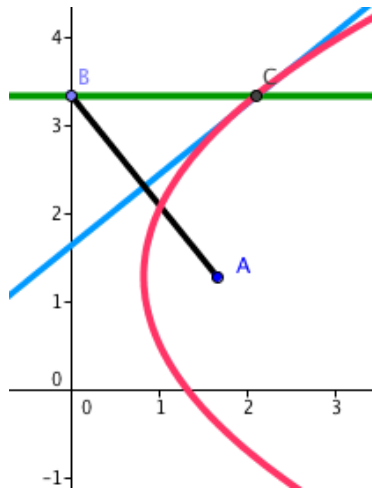


Figura 3: El lugar geométrico del punto C es un parábola.

Con la herramienta se puede construir un caso general donde se consideren la razón de la distancia de los puntos del lugar geométrico al punto fijo y a una recta cualquiera dada distinta de la unidad. La figuras 4 & 5 muestra la construcción dinámica donde para distintos valores de k.

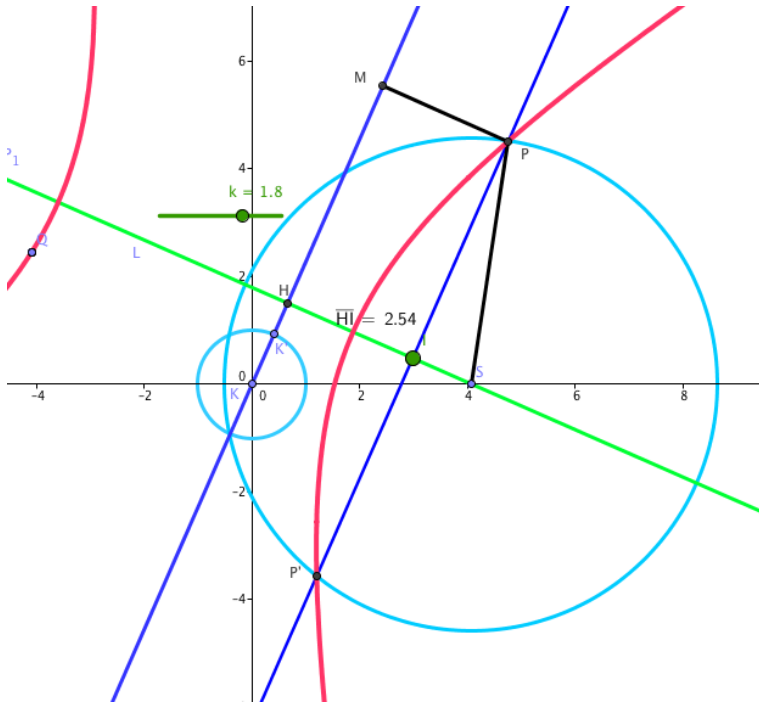


Figura 4: Modelo dinámico que generaliza la construcción de las secciones cónicas.

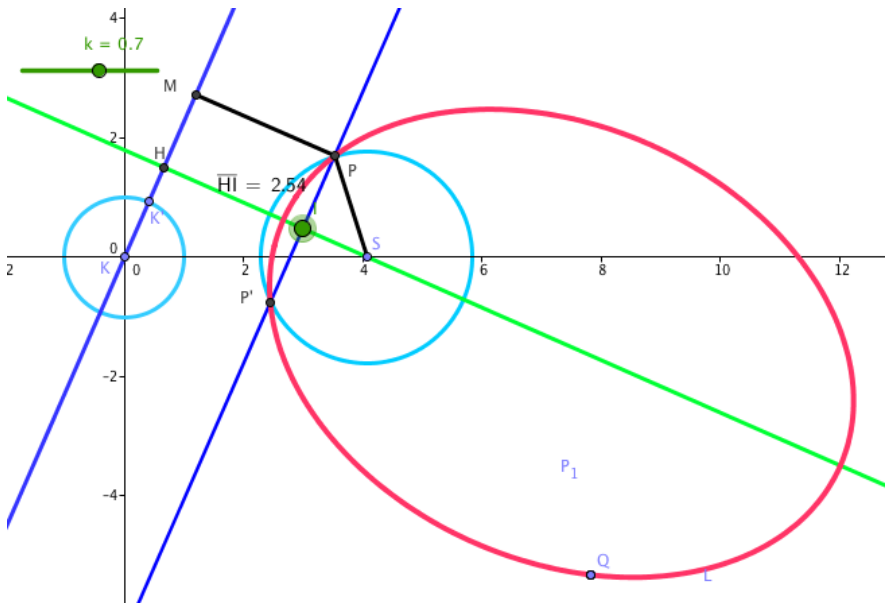


Figura 5: Para valores de  $k$  menores de 1 se obtienen elipses.

En la representación y exploración dinámica del problema se observa que la construcción del modelo se basa en interpretar geoméricamente el concepto de perpendicularidad y la razón constante que involucra las distancias entre un punto del lugar geométrico y el punto fijo y la que existe entre ese punto del lugar y una recta fija. El arrastre y movimiento controlado de objetos dentro del modelo son estrategias esenciales en la búsqueda y detección de invariantes o patrones o relaciones. Además, el movimiento controlado ofrece al estudiante la oportunidad de explorar en tiempo real el comportamiento de algunos parámetros en forma visual o cuantificando atributos como longitudes de segmentos, medidas de ángulos o representaciones gráficas. El acercamiento y solución a este problema proporcionan información importante sobre los contenidos y formas de estructurar rutas para promover el aprendizaje de la geometría analítica (Santos-Trigo & Camacho-Machín, 2009). En este contexto, la competencia digital involucra que el profesor o individuo se apropie de la herramienta en el sentido de desarrollar experiencias que le permitan comprender los cambios que resultan en los contenidos y las estrategias que debe desarrollar el estudiante en la resolución de problemas. Santos-Trigo, Suaste & Figuerola (2015) afirman que el proceso de diseño de un artefacto o tecnología digital no termina cuando el producto sale de la empresa o taller que lo produce, incluye la consideración del proceso de apropiación del individuo o usuario que al interactuar con el artefacto construye esquemas cognitivos que le permiten utilizarlo en la resolución de problemas.

**Pensamiento o mente creativa.** Es común ahora que muchas de las tareas que demandan la aplicación de un conocimiento o procedimiento rutinario sean realizadas por una herramienta o aplicación digital. La Figura 6 muestra lo que la aplicación *Mathink* de una tableta genera al escribir a mano la integral involucrada.

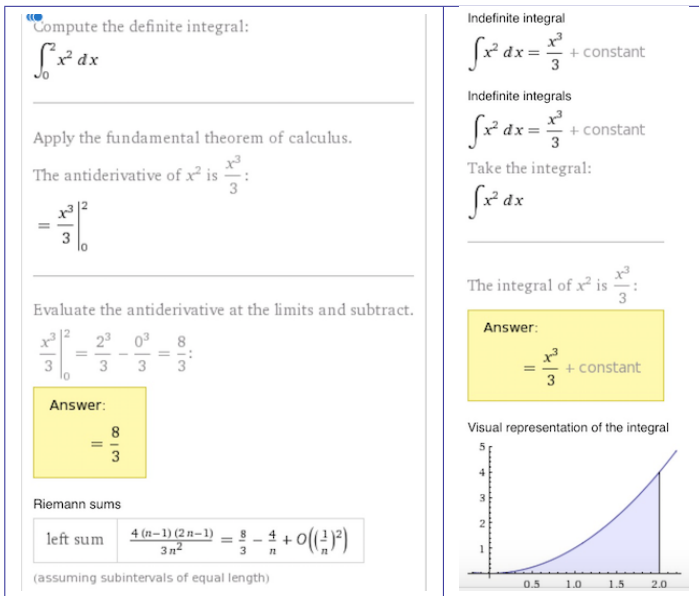


Figura 6: Uso de Mathink en tareas matemáticas.

La existencia de herramientas digitales que pueden realizar cálculos y procedimientos matemáticos plantea la discusión si los estudiantes deben seguir dedicándole tiempo y atención al dominio de esas tareas. Se sugiere que los estudiantes ahora pueden centrar la discusión en el significado de las ideas matemáticas involucrados en los procedimientos y resultados y también buscar formas creativas de resolver los problemas. Gardner (2006) relaciona la mente creativa con la capacidad del individuo de descubrir, formular o clarificar nuevos problemas, preguntas o fenómenos. Afirma que un pensamiento creativo ocurre cuando un individuo o grupo genera un resultado o producto que la comunidad reconoce como innovador. Una mente creativa exhibe representaciones múltiples de los problemas y desarrolla la tendencia de constantemente formular preguntas y respuestas nuevas. Santos-Trigo (2014b) reconoce la importancia de que los estudiantes siempre busquen distintas maneras de resolver un problema. Ilustra, por ejemplo, seis formas de resolver el problema “Pedro y María visitaron una granja el fin de semana donde se crían gallinas y cerdos. Pedro observó que en total había 19 cabezas, mientras que María dijo que había 60 patas. ¿Cuántas gallinas y cuántos cerdos había en la granja?”. Una solución creativa a este mismo problema involucra pensar que cada uno de los cerdos se sostenga con dos patas y las otras las mantenga al aire. Con esta condición, habrá 38 patas tocando el suelo ya que los cerdos al igual que las gallinas (19 en total) están sostenidos en dos patas. Esto significa que habrá 22 (60-38) patas en el aire y todas son de cerdos.

## 5. Comunicación y colaboración

La disponibilidad de diversas herramientas digitales resulta importante no sólo en la comunicación y discusión de resultados sino también en la promoción de tareas de colaboración. Así el estudiante puede expresarse en forma oral, escrita, en videoconferencias, o digital a través de los distintos medios de comunicación. Las redes sociales también pueden ser los medios para que los estudiantes compartan explicaciones de conceptos matemáticos o resuelvan problemas. Se pueden formar grupos con la intención de colaborar en la resolución de problemas. En este contexto, los participantes desarrollan habilidades para ser miembros activos, escuchar a otros, y reconocer las contribuciones de los demás.

## 6. Valores y principios éticos

El desarrollo notable de tecnologías digitales influye no sólo en las formas de producir y comunicar resultados o conocimiento disciplinar; sino también en el desenvolvimiento individual y colectivo de los individuos. Los valores éticos resultan fundamentales para comprender y normar el funcionamiento de una sociedad con intereses individuales y grupales diversos.

## 7. Conclusiones

En la presentación de las ideas de este documento se destaca que los desarrollos y la disponibilidad de diversas tecnologías digitales no sólo están permeando las maneras de interactuar de los individuos, sino también las formas de desarrollar, conocer y comprender conocimiento disciplinario. En este contexto, surge la tarea de incorporar el uso de la tecnología en las propuestas del currículo y en los escenarios de aprendizaje. Una idea o principio fundamental es que los estudiantes conceptualicen su aprendizaje en términos de dilemas y preguntas que ellos mismos formulan, exploran y responden vía el empleo sistemático de varias herramientas digitales. Así, el uso de varias herramientas digitales no sólo extiende los razonamientos que aparecen con el uso de lápiz y papel, sino también ofrece a los estudiantes diversas oportunidades para visualizar nuevas relaciones y plantear argumentos para sustentarlas. El alfabetismo o cultura digital resulta una de las competencias esenciales que los individuos deben adquirir y que los profesores y estudiantes deben mostrar en sus experiencias de aprendizaje. La apropiación de esta cultura digital involucra que el profesor y los estudiantes conozcan los cambios que produce el empleo de las herramientas en los contenidos matemáticos y en la resolución de problemas. Por ejemplo, en el estudio de las secciones cónicas, los modelos dinámicos muestran nuevas rutas para explorar sus propiedades y relaciones que extienden los razonamientos algebraicos. Algunos objetos o entidades matemáticos como la mediatriz y la excentricidad resultan cruciales en la construcción de los modelos dinámicos. En la misma dirección, la búsqueda en líneas de información relacionada con los temas en estudio demanda que los estudiantes desarrollen habilidades para seleccionar, discriminar, sintetizar e incorporarla en sus experiencias de aprendizaje. En este mismo sentido, los estudiantes pueden usar videos en líneas que contrasten o extiendan las explicaciones de conceptos el profesor presenta en las clases. En esta dirección, se manifiesta la importancia de que los estudiantes trabajen en equipo y constantemente intercambien ideas y participen como parte de una comunidad que valora la resolución de problemas. Finalmente, la comunicación y participación de los estudiantes se debe enmarcar en el respeto a los demás y en la práctica de principios éticos que les permita reconocer y valorar tanto las contribuciones individuales como grupales.

**Agradecimientos:** Este artículo corresponde a las actividades que se desarrollan en el proyecto “*Fundamentos Teóricos en el Desarrollo y Re-Construcción del Conocimiento Matemático en Ambientes que Promueven el Empleo de Varias Herramientas Digitales*” financiado por el Conacyt-168543.

## Referencias bibliográficas

- Camarena, P. (2014). Un modelo para el diseño de material computacional interactivo. *Revista Iberoamericana de Informática Educativa*, 69,3-16.
- Gardner H. (2006). *Five minds for the future*. Boston MA: Harvard Business School Press.
- Mishra, P. and Koehler, M.J. (2006). Technological pedagogical content knowledge: a framework for teacher knowledge. *Teachers College Record*, 108(6), 1017-1054.

- Roschelle, J., Courey, S., Patton, C., & Murray, E. (2013). Dynabooks: Supporting teachers to engage all learners in key literacies. In C. Mouza and N. Lavigne (eds.), *Emerging Technologies for the Classroom, Explorations in the Learning Sciences, Instructional Systems and Performance Technologies* (pp. 31-46). New York: Springer Science+Business Media.
- Santos-Trigo, M., Suaste, E. & Figuerola, P. (2015). Technology and tools appropriation in medical practices. M. Khosrow-Pour (Ed.), *Encyclopedia of Information Science and Technology*, Third Edition (pp. 5633-5640). Hershey PA: IGI Global. DOI: 10.4018/978-1-4666-5888-2, ISBN13: 9781466658882, ISBN10: 1466658886, EISBN13: 9781466658899.
- Santos-Trigo, M. (2014a). Problem solving in mathematics education. En S. Lerman (ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 496-501). NY: Springer.
- Santos Trigo, M. (2014b). *Resolución de problemas matemáticos: Fundamentos cognitivos*. México DF: Trillas.
- Santos-Trigo, M y Camacho-Machín, M. (2013). Framing the use of technology in problem solving approaches. *The Mathematics Enthusiast*, 10(1-2), 279-302
- Santos-Trigo, M. & Reyes-Martínez, I. (2014). The coordinated use of digital technology in learning environments. In L. Uden et al. (Eds.), *Learning Technology for Education in Cloud* (pp. 61-71). Communication in Computer and Information Science, 446. NY: Springer.
- Santos-Trigo, M. & Ortega-Moreno, F. (2013). Digit technology, dynamic representations, and mathematical reasoning: extending problem solving frameworks. *Int. J. Learning Technology*, 8(2), 186-200.
- Santos-Trigo, M. y Camacho-Machín M. (2009). Towards the construction of a framework to deal with routine problems to foster mathematical inquiry. *PRIMUS*, 19(3), 260-279.
- Schmidt, E. & Cohen, J. (2013) (eBook version). *The new digital area. Reshaping the future of people, nations and business*. NY: Random House and Google inc.
- Selden, J., Selden, A. y Mason, A. (1994). Even good calculus students can't solve non-routine problems. En J. Kaput y E. Dubinsky (Eds.), *Research issues in undergraduate mathematics learning: Preliminary analyses and results* (pp. 19-26). Washington, DC: The Mathematical Association of America.