Matemáticas modelo-teoréticas: un programa neo-estructuralista para las matemáticas, su historia, su epistemología y su didáctica en el siglo XXI[1]

Carlos Eduardo Vasco Uribe
Doctorado Interinstitucional en Educación DIE, Universidad Distrital, Bogotá
Colombia
carlosevasco@gmail.com

Resumen

Desde 1988, Balzer, Moulines y Sneed resaltaron la importancia de la distinción entre modelos y teorías para formular su versión mejorada del programa estructuralista para las ciencias naturales. Nos referiremos a él como "Programa Neo-estructuralista para las Ciencias Naturales y su Epistemología". Con esos aportes, desde la perspectiva de la Teoría General de Procesos TGP y la Teoría General de Sistemas TGS, con la utilización de una semiótica apropiada para las distintas representaciones e interpretaciones de los modelos y las teorías, se podría reformular el antiguo programa estructuralista del siglo XX como un nuevo Programa Neo-estructuralista para las Matemáticas y su Epistemología en el siglo XXI. Esta nueva síntesis modelo-teorética permite una reformulación sistémica coherente de todas las ramas de las matemáticas, su historia y su epistemología, y promete convertirse en una nueva fuente de propuestas pedagógicas y didácticas para la educación matemática.

Palabras clave

Filosofía de las matemáticas, epistemología, lógica, sistemas, estructuras, modelos, teorías, didáctica.

Abstract

Beginning in 1988, Balzer, Moulines and Sneed emphasized the importance of the distinction between models and theories and used it to formulate a more refined version of Structuralism for the Natural Sciences. We refer to it as the "Neo-Structuralist Program for the Natural Sciences and its Epistemology". With these contributions, from the perspective of General Process Theory (GPT) and General Systems Theory (GST), with the use of an appropriate semiotics for the distinct representations and interpretations of models and theories, it is possible to reformulate the old 20th Century Structuralist Program as a Neo-Structuralist Program for Mathematics and its Epistemology for the 21st Century. This new model-theoretical synthesis permits a systemic reformulation coherent with all branches of Mathematics, its history and epistemology, and promises to become a new source of teaching and learning initiatives for Mathematics Education.

[1] Este trabajo corresponde a una conferencia paralela dictada en la XIV CIAEM, celebrada en Tuxtla Gutiérrez, Chiapas, México el año 2015.

Recibido por los editores el 10 de noviembre de 2015 y aceptado el 15 de enero de 2016.
Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática. 2016. Año 11. Número 15. pp 189-203. Costa Rica

Key words

Philosophy of Mathematics, epistemology, logic, systems, structures, theories, teaching.

1. Introducción

La palabra “estructura” señala una categoría vaga, relacionada con la forma o la idea en Platón, en oposición a lo sensible; con la forma en Aristóteles, en oposición a la materia; con la esencia o “quidditas” en la Escolástica medieval, en oposición a "accidens" o lo accidental; con la oposición entre mecanismo y propósito, que se llamaron “estructura” y “función” en la biología de los siglos XVIII y XIX; con la Psicología de la Forma o de la *Gestalt* a finales del siglo XIX, y con los sistemas y las construcciones en la ingeniería civil del siglo XX.

En matemáticas se utiliza el vocablo “estructura” en forma ambigua como sinónimo de sistema, o como una forma abstracta que se impone a un conjunto para conformar un sistema, o como una forma de organización de un sistema ya dado. El campo semántico del discurso estructuralista en matemáticas incluye al menos los verbos *estructurar, organizar, sistematizar, configurar, conformar, componer*; los sustantivos *estructura, forma, sistema, organización, estructuración, sistematización, configuración, conformación, composición*, además de los adjetivos *estructurado, estructural, sistémico, sistemático, organizado, configurado, conformado y compuesto.* En cualquier discurso estructuralista del siglo XXI va a ser necesario emplear mucho tiempo y agudeza conceptual en aclarar este intrincado panorama verbal. Un programa estructuralista, en oposición a un programa empirista, declara que los fenómenos son apariencias y que el conocimiento progresa por captación, descubrimiento o invención de las estructuras subyacentes que son las que producen los fenómenos sensibles.

Pero el discurso estructuralista no se extendió a las matemáticas antes de haberse extendido por la lingüística, la antropología y la filosofía en la primera mitad del siglo XX. La expresión “el programa estructuralista” en las matemáticas del siglo XX suele identificarse con el programa de los *Elementos* de Bourbaki de 1935 a 1983, pero a veces se confunde con el programa de la categorización de las matemáticas a partir de Eilenberg, MacLane, Ehresmann y Lawvere en los años cincuenta y sesenta del siglo XX. Sin embargo, voy a tomar esta expresión en una forma más amplia, que incluya la epistemología y la psicología genéticas de Piaget, por supuesto a Bourbaki y la teoría de categorías, así como a la reformulación del programa estructuralista en las ciencias naturales de Balzer, Moulines y Sneed.

2. Primera parte

2.1. Antecedentes en la filosofía y las ciencias en el siglo XIX

En el siglo XIX puede decirse que las raíces del estructuralismo en filosofía vienen de la crítica de Hegel y después de Marx y Engels a las categorías escolásticas aristotélicotomistas de la materia y la forma, la esencia y la existencia, la sustancia y el accidente. Se reconceptualiza la forma, la esencia y la organización como la estructura de los sistemas ideales o materiales.

En las ciencias biológicas del siglo XIX se consideraba ya establecido que distintos órganos con estructuras diferentes podían cumplir la misma función, y que la misma estructura podía cumplir distintas funciones. La oposición estructura/función se extendió a otras ciencias nacientes. A finales del siglo XIX apareció en Alemania la psicología de la *Gestalt* con Koffka, Köhler, Wertheimer y otros. *Gestalt* es una palabra alemana que se podría traducir por "forma" o "estructura"; por eso se llamó también "la Psicología de la Forma".

2.2. Antecedentes en las matemáticas del siglo XIX

Del álgebra de Vieta, Descartes y Euler al álgebra abstracta

En las matemáticas del siglo XIX, las raíces del estructuralismo en matemáticas pueden atribuirse al desarrollo de la teoría abstracta de los grupos, iniciada por Galois de 1828 a 1832 y por Camille Jordan en Francia de 1840 a 1870. Fue enriquecida en Inglaterra por Sylvester, Cayley y Hamilton de 1840 a 1860 con sus grupos de matrices. Se capta que grupos de transformaciones muy diferentes "tienen la misma estructura" y en Alemania se concreta esta visión estructuralista con el Programa de Erlangen de Félix Klein en 1872 y pronto se logra la formulación explícita de los axiomas de los grupos en 1882 por Walter van Dyck y Heinrich Weber.

En los años 30 del siglo XX, unos 50 años de investigaciones en lo que se llamaba informalmente "sistemas abstractos" o "estructuras abstractas" se condensaron en los dos volúmenes titulados *Álgebra Moderna* (*Moderne algebra* 1930–1931) de Bartel Leendert van der Waerden, obra que funda la nueva rama de las matemáticas que lleva ese nombre: álgebra moderna, álgebra abstracta o álgebra universal (ver también MacLane y Birkhoff, 1953).

De la geometría de Euclides a las geometrías proyectivas, afines y no euclidianas

Otro antecedente importante fue la invención de la geometría proyectiva por Desargues en el siglo XVII –quien tal vez solo fue comprendido por Pascal– y su desarrollo a fines del XVIII y durante el siglo XIX, especialmente en Francia, con Gergonne, Monge, Poncelet, Chasles, Brianchon y muchos más, y en Alemania con los sorprendentes hallazgos de Steiner, Möbius, Plücker y von Staudt.

La inexplicable fecundidad de la dualidad en geometría proyectiva se hizo evidente con los estudios sobre perspectividad de los triángulos y propiedades de los hexágonos, además de la potencia de la proyección estereográfica y la ubicuidad de la razón cruzada. La distinción entre el modelo mental y la teoría formal se hizo evidente, y así se preparó el ambiente intelectual para la invención de las geometrías no euclidianas por Lobatchevsky, Bolyai y Gauss hacia 1820. Pero por casi 40 años, esas nuevas geometrías parecían más bien curiosidades lógicas, hasta que hacia 1860 se inventaron los modelos de la cofia y de la trompeta o tractroide de Beltrami, los discos de Klein y de Poincaré y el modelo de la esfera de Riemann, y se pudo abrir un nuevo abanico de preguntas: ¿En qué sentido se puede hablar de un modelo inmerso en un espacio euclidiano pero que no cumple alguno de sus axiomas? ¿Qué depende del modelo mental y qué de las estipulaciones de la teoría? ¿Cuándo, cómo y por qué puede encontrarse por inspección en un modelo "la verdad de una fórmula" y cuándo, cómo y por qué una deducción formal parece terminar en una fórmula que contradice lo que parece obvio en el modelo? ¿Cuándo, cómo y por qué es posible decidir que una teoría es consistente sólo por tener un modelo?

De la lógica de Aristóteles a la de Boole y la expansión de la lógica formal

En 1847, George Boole intentó un primer *Análisis matemático de la lógica* y en 1854 trató de formular las leyes del pensamiento con expresiones algebraicas elementales y cumplir el sueño de Leibnitz de efectuar deducciones válidas por simples cálculos simbólicos. En pocos años, de Morgan, Jevons, Venn y Lewis Carroll en Inglaterra y, en Alemania, Frege y su "Begriffschrift" (1879) y las "Vorlesungen über die Algebra der Logik" de Ernst Schröder (1890-1895) prepararon todo el material para que Peano y Dedekind propusieran su teoría axiomática de los números naturales y Russell y Whitehead levantaran el monumento de los *Principia Mathematica* de 1910 a 1913. Estaban ya dadas las condiciones para que a comienzos del siglo XX los programas formalista, logicista e intuicionista pudieran aventurarse a reconstruir todas las matemáticas con la ayuda de este arsenal de herramientas simbólicas interpretadas según esas tres filosofías de las matemáticas que pretendían dejar atrás a Platón y a Kant.

Los sucesivos fracasos de estos programas durante la primera mitad del siglo XX llevarían al nuevo intento bourbakista de encontrar una formulación omnicomprensiva de todas las matemáticas existentes hasta entonces como una única Matemática en singular, unificada alrededor del estudio de las estructuras y las especies o tipos de estructura. Paradójicamente, fueron los sistemas "con máxima estructura": los grupos, y los sistemas "con mínima estructura": los conjuntos, colecciones o clases –que son en cierto sentido "sistemas sin estructura"– los que primero se precisaron formalmente. Unas pocas ideas de la teoría de conjuntos de Cantor como las desarrollaron Zermelo y Fraenkel en los años 20, y unas pocas ideas de la lógica como las desarrollaron Rusell y Whitehead en los años 1900-1913, bastaron a los Bourbaki para reformular todas las matemáticas con la idea de las estructuras madres (algebraicas, ordinales y topológicas) y las especies o tipos de estructura.

La publicación de los "Fascicules" con el seudónimo "N. Bourbaki" comenzó en 1939 en la editorial Dunod de Paris con el fascículo de resultados de la teoría de conjuntos. Ya aparecen en él las nociones de estructura, de especies o tipos de estructura y de isomorfismo, propuestas por Ehresmann en el Congreso del Escorial en 1936 (ver Corry, 1992).

En los años 1928 a 1954, Ludwig von Bertalanffy desarrolló en Austria (Viena, 1928-38 y 1940-47), Estados Unidos (Chicago, 1938-39), Inglaterra (Londres, 1948) y Canadá (Montreal, 1949, y Ottawa, 1950-54) la Teoría General de Sistemas –TGS– desde la biología. Comenzó como un intento de desarrollar una biología teórica que explicara "la configuración de las formas" ("Formbildung") a partir de los sistemas organísmicos. Luego se extendió de 1945 a 1954 a otras disciplinas, como la física y la química, la psicología y el psicoanálisis, las ciencias sociales y las ingenierías.

La teoría de modelos de la escuela polaca también empieza a perfilarse antes de la Segunda Guerra Mundial. La refutación del programa formalista de Hilbert por el teorema de incompletitud de Gödel en 1931 dio el impulso necesario al estudio de la recursividad, la relación entre lógica y teoría de números, entre la sintaxis formal de la teoría y su semántica. La teoría de la verdad de Alfred Tarski va refinándose de 1933 a 1939, aunque sólo se conocerá ampliamente después de la Segunda Guerra Mundial, hasta que se concretó en la Teoría de Modelos.

En 1953, los Bourbaki retomaron la publicación de los fascículos con trabajos de topología, y continuaron en 1958 y 59 con el álgebra. En los años 60, los Bourbaki publicaron algunos fascículos sobre teoría de la integración, y en los años 70 se concretaron las publicaciones que faltaban sobre conjuntos, lógica y especies o tipos de estructura. El ultimo fascículo apareció en 1983.

En Ginebra y en París, Jean Piaget, desde las ideas de la biología, la psicología y la epistemología que venía trabajando de 1920 a 1940, distinguió estructura y función, génesis y desarrollo, etapas y transiciones y empezó a reinterpretarlas como cambios de estructura.

Después de la Segunda Guerra Mundial, Piaget se entusiasmó con las ideas bourbakistas. Estudió la lógica y los conjuntos con Evert Beth, y adoptó del grupo Bourbaki la idea de distinguir las estructuras de orden, las topológicas y las algebraicas u operatorias, entre las cuales privilegió la estructura de grupo. En el año 1950 publicó los tres tomos de *Introducción a la epistemología genética*, en donde se perfilaba ya su programa estructuralista de la epistemología y la psicología genéticas. En 1955 publicó *De la lógica del niño a la lógica del adolescente*, en la cual el subtítulo es programático: *Ensayo sobre la construcción de las estructuras operatorias formales*. En 1959 salió su libro *Génesis de las estructuras lógicas elementales.* Propuso la idea de estructura no solo desde las relaciones sino desde las operaciones activas, y sugirió relacionar las estructuras por medio de isomorfismos parciales. Se sentía muy orgulloso de su invento de los agrupamientos como estructuras intermedias entre las clases y los grupos, pero no superó la ambigüedad bourbakista entre sistemas y estructuras ni fue claro en la distinción entre operaciones y relaciones.

Las categorías

En forma paralela e independiente de los topólogos norteamericanos Eilenberg y MacLane, el francés Charles Ehresmann empezó a trabajar en espacios fibrados en topología en los años 1940 a 1945, y siguió su trabajo durante diez años hasta convertirse en el líder de la teoría de categorías en Francia de 1955 en adelante (ver Ehersmann, 1965). Pero no logró mucho éxito por fuera de su círculo de discípulos, debido a su lenguaje críptico y riguroso, llamado irónicamente "Ehresmanniano", y –fuera de algunas excepciones ya aceptadas por ellos antes de la guerra– no logró convencer al grupo Bourbaki para que aceptara su lenguaje en la reestructuración de las matemáticas que iniciaban en sus nuevos "Elementos".

William Lawvere defendió su tesis en 1963, y en 1964 publicó una propuesta de axiomas para refundar las matemáticas desde la teoría de categorías. Encontró inmediatamente graves dificultades entre los lógicos por las paradojas de los grandes cardinales que aparecen al tratar de definir la categoría de todas las categorías, así sean "pequeñas", o sea aquellas en que los conjuntos de morfismos entre dos objetos son conjuntos, no clases en el sentido de von Neumann, Bernays y Gödel.

En los años 60-70 se establece firmemente en Francia el Estructuralismo como filosofía transversal a todas las disciplinas, pero tuvo pocos seguidores. La principal crítica al estructuralismo es la rigidez y fixismo de las estructuras. La metáfora básica estaba tomada de la ingeniería: la de una estructura de acero para un edificio, que luego se llenaba con pisos, muros y acabados. La torre Eiffel, construida como majestuosa portada para la Exposición Universal de 1889 en el centenario de la Revolución Francesa, es el prototipo de una estructura metálica pura.

Los matemáticos mismos dieron poca importancia al programa estructuralista como arquitectura de las matemáticas. Buscaban nuevos resultados, nuevas demostraciones y nuevas herramientas, como los filtros, los fibrados y los haces, y empezaron a utilizar las palabra "estructura" en todas partes, pero sin precisarla. Tampoco le dieron mucha importancia a la teoría de categorías en los años sesenta y setenta. Adoptaron el lenguaje de morfismos y functores para facilitar las algebrización de la topología, pero les parecía que era sólo una manera de hablar abstracta y alambicada, con la cual se podían percibir algunas regularidades, pero no resolver ningún problema que no pudiera resolverse internamente con las herramientas propias de cada disciplina matemática.

Es verdad que en el programa estructuralista del grupo Bourbaki hay una ambigüedad recurrente: pareciera que para ellos "sistema" y "estructura" fuera lo mismo, y por ello más bien dirigen la atención a las especies o tipos de estructura. Pareciera que la estructura fuera dada por las relaciones, pero en los distintos fascículos de Bourbaki la relación puede ser al menos cuatro cosas diferentes: un predicado de dos puestos (o más), R; la proposición abierta o condición en dos variables yRx o $R(x, y)$; el conjunto de parejas (o n-plas ordenadas) que esa condición selecciona –el grafo de la relación, sea aislado R, o como parte de una tripla ordenada (A, B, R) con $R \subseteq$ AxB – o una proposición cerrada compuesta con cuantificadores, negaciones u otras conectivas en las que figure un predicado de dos (o más) puestos.

En todo el siglo XX no se logra un acuerdo entre los matemáticos sobre las definiciones de sistema y de estructura ni sobre las semejanzas y diferencias entre ambos conceptos. En los escritos matemáticos de lógica, conjuntos, teoría de modelos, categorías, etc., parece usarse "sistema" y "estructura" en forma intercambiable.

En Alemania, Inglaterra y Estados Unidos no tuvo mucho éxito el programa filosófico estructuralista y su desaparición parecía inminente, cuando inesperadamente, un alemán, un venezolano y un norteamericano, Thomas Balzer, Carlos Ulises Moulines y Joseph Sneed, revivieron el programa estructuralista en la epistemología en 1988. Este programa estructuralista para las ciencias naturales y su epistemología, que sería mejor llamar "neo-estructuralista" o "modelo-teorético", es la base de la propuesta del presente trabajo, en el que pretendo extender dicho programa de las ciencias naturales a las matemáticas.

3. Segunda parte

3.1. Una propuesta de programa neo-estructuralista para las matemáticas del siglo XXI: La TGP y la TGS

En los años 70 y 80 desarrollé una versión "corregida y aumentada" de la Teoría General de Sistemas TGS al estilo de Ludwig von Bertalanffy para mis cursos de epistemología y metodología de investigación a partir de ideas de algunos seminarios de teoría de modelos y de lógica temporal con Xavier Caicedo. La primera publicación formal fue Vasco (1980).

Allí distinguí en una primera aproximación los tres aspectos que pueden distinguirse en todo sistema, utilizando parejas de vocablos del lenguaje natural: el *sustrato* como conjunto o colección de componentes o elementos, objetos o individuos; la *dinámica* como conjunto o colección de operaciones o transformaciones, operadores o transformadores, y la *estructura* como conjunto o colección de relaciones o lazos, nexos o conexiones. Se puede así presentar un sistema $\sum$ como una tripla ordenada de aspectos:

$$\sum = (Sustrato, Dinámica, Estructura) = (S, D, E).$$

Para los casos en los que parecía necesario distinguir varios tipos o "universos" de componentes o elementos, como en la teoría de grafos (nodos y arcos), o en la geometría del espacio (puntos, rectas y planos), precisé el primer aspecto, el *sustrato* –que Federici llamaba "soporte"– como la colección de universos del sistema, y precisé que "universo" es una colección de componentes; la *dinámica* es una colección de operaciones del sistema, y la *estructura* una colección de relaciones del sistema.

Así pude precisar mucho más lo que no habían logrado comunicar claramente los estructuralistas: qué es la estructura. La descripción más sobria de "la estructura" es pues "la colección de relaciones de un sistema", o en una elaboración de la anterior que utilizo con frecuencia: "la estructura es la red de relaciones de un sistema". Es otra manera de decir "el sistema de relaciones de un sistema". Así expreso mis reservas sobre la teoría de conjuntos al subrayar que esa red de relaciones no es solo un agregado arbitrario, sino, a su vez, un nuevo sistema de orden superior con esas relaciones del sistema inicial como componentes. Si es sistema, también tiene una dinámica de orden superior compuesta al menos por la operación binaria de composición parcial de relaciones, y otras unarias como la inversión. También puede considerarse que la estructura del sistema inicial tiene a su vez una estructura de orden superior compuesta por relaciones entre relaciones, llamadas a veces "relaciones de segundo orden".

Estas ideas sobre la Teoría General de Sistemas TGS (publicadas por primera vez en Vasco, 1991) retoman el programa estructuralista para los aspectos relacionales de los sistemas, pero lo extienden a una consideración de los aspectos operacionales como diferentes de los relacionales. Se distingue pues la estructura de un sistema de su dinámica, y se le da prioridad a la dinámica. Esa prioridad la considero como uno de los aportes más valiosos de Piaget, quien atribuyó la estructura a las operaciones y privilegió siempre los aspectos operatorios en sus análisis en biología, psicología y epistemología.

Quienes prefieran enfatizar la dinámica, pueden presentar el sistema como lo hice arriba, y así reinterpretar las relaciones como ciertos tipos de operaciones; les bastará pues con presentar el sistema $\sum$ como un sistema dinámico o puramente operacional, $\sum = (S, D)$. Quienes prefieren enfatizar la estructura pueden reinterpretar las operaciones como ciertos tipos de relaciones, y les bastará presentar el sistema $\sum$ como un sistema estático o puramente estructural, $\sum = (S, E)$. La Teoría de Modelos permite mostrar la equivalencia de ambas presentaciones del mismo sistema $\sum$. Esto permite precisar lo que se entiende por "sistema dinámico" y por "sistema estático", y con un juego de cambio de ariedades no es difícil hacer las transiciones de uno a otro.

Esta manera de comprender los vocablos *sistema*, *sustrato*, *dinámica* y *estructura* y la dualidad entre sistemas dinámicos y sistemas estáticos me llevó a estudiar más a fondo el problema de la representación de las operaciones n-arias como relaciones, que resolví con el juego de cambiar el orden usual de lectura de las parejas ordenadas del grafo de las operaciones n-arias, y enunciar que el resultado r estaba relacionado con los n argumentos de la operación precisamente por serlo, y así se eleva la ariedad n de la operación a la ariedad n+1 de la relación respectiva, pero conservando todas las propiedades de la operación como propiedades de esa nueva relación.

Estudié también el problema converso de la representación de las relaciones n-arias como operaciones, que parecía fácil para las relaciones funcionales o unívocas, pero no para las multívocas. Logré resolverlo con el artificio utilizado en los lenguajes de computación, que consiste en transformar una relación n-aria –funcional o no– en una operación n-aria externa con resultados en un conjunto booleano, como $2 = \{0, 1\} = \{F, V\}$, o, en general, en un clasificador Ω que contenga el 2, de tal manera que el resultado de la operación sea uno (o V) cuando la relación se cumpla. Así se recupera la teoría algebraica de las valoraciones (o valuaciones) en escalas ordinales. Con este artificio el lector o lectora puede fácilmente mostrar que todo sistema puramente estructural o estático $\sum = (S, E)$ puede transformarse en uno puramente operacional o dinámico con solo agregar al sustrato S un nuevo universo, el clasificador Ω, y así poder transformar cada relación n-aria R de la estructura E en la operación n-aria que produzca el resultado V cuando la relación R se cumpla entre los n argumentos respectivos.

Desde mi versión de la TGS, con las conversiones apropiadas, cada categoría y cada alegoría puede representarse como un sistema cuyo universo es la clase de objetos, que a su vez son sistemas que tienen internamente "la misma estructura" en cuanto a ciertos homomorfismos ("up to homomorphism") que pueden transportar la estructura de un objeto a otro o "barajar" el sustrato del mismo. Su estructura (su red de relaciones binarias) es la clase de flechas o morfismos correspondientes a las parejas ordenadas de objetos, y su dinámica tiene una sola operación binaria de composición de flechas o morfismos, con dos proyecciones unarias "externas" llamadas "fuente" y "meta", que van de las flechas a los objetos, y una operación ceroaria interna en *Hom*(A, A), en donde esta selecciona la única flecha idéntica de A, $id_{\mathbf{A}}$, que puede también considerarse como una operación unaria externa en *Ob* hacia *Fl*, que va de A hacia *Hom*(A, A).

Una categoría o alegoría también puede presentarse como un sistema cuyo sustrato tiene dos universos, *Ob* y *Fl*, y una operación binaria sobre parejas de $Ob : Hom(\_, \_)$, que produce un subsistema con un sustrato de flechas que tienen la misma fuente y la misma meta; con una dinámica que tiene al menos una operación binaria, la composición, y otras operaciones unarias externas sobre las flechas, como fuente y meta, además de la operación id que selecciona la flecha idéntica de cada objeto fuente o meta.

También puede presentarse una categoría o una alegoría como un sistema con la estructura de grafo dirigido o digrafo, con los objetos como nodos o vértices, las flechas como los caminos orientados entre dos de ellos y la composición como la concatenación parcial de caminos, incluyendo un camino cerrado o lazo que entra y sale del mismo nodo, que corresponde a la flecha idéntica. En la misma forma, cada sistema relacional puramente estructural o estático puede representarse como una alegoría en la que los objetos son los componentes del sustrato del sistema con sus productos cartesianos; las flechas o morfismos son las relaciones, y las composiciones parciales conforman la dinámica. Ya vimos que la restricción a los sistemas estáticos es solo aparente, pues ya sabemos hacer las conversiones respectivas, y que, por lo tanto, todo sistema puede presentarse como alegoría y toda alegoría como grafo dirigido. Esta reducción apunta a que un programa neo-estructuralista modelo-teorético puede ofrecer un punto de partida sistémico para todas las ramas de las matemáticas por flechas y cadenas de flechas, en lugar de la fundamentación cantoriana por elementos y conjuntos de elementos.

Primero los procesos

Hacia 1993 empecé a recoger una serie de críticas a la versión de la Teoría General de Sistemas TGS que había utilizado para el programa curricular de matemáticas de la educación básica. Con la reflexión sobre esas críticas, empecé a cambiar la prioridad de la categoría filosófica *sistema* por la de la categoría filosófica *proceso*. No podía definir la categoría nombrada como "proceso" precisamente por ser la más básica. Si se pudiera formular una definición al estilo clásico de "proceso" como "definiendum", las categorías que aparecieran en el "definiens" serían más básicas todavía. Solo podrían señalarse los dos aspectos básicos de todo proceso: la complejidad y la dinamicidad. Tratar de pensar ante todo en los procesos es una manera refinada de volver al río de Heráclito: “panta rei”.

Los agentes –actores, actuantes o actantes– somos apenas ciertos subprocesos que nadamos en el río de Heráclito; después de unos cuantos años de inmersión, empezamos a recortar subprocesos para modelarlos mentalmente como sistemas, con una finalidad de supervivencia: para no ahogarnos demasiado pronto en ese río. El razonamiento darwiniano parece fluir por todas partes al intentar formular cualquier narrativa sobre los procesos que experimentamos.

Un agente es pues un tipo de subproceso que es activo no solo neuro-muscularmente, sino también pensante, consciente, capaz de volverse sujeto (o mejor, capaz de iniciar y avanzar en procesos de subjetivación siempre inacabados) y de volver objetos a otros subprocesos de los que se distancia y en los que se enfoca (o mejor, de iniciar y avanzar en procesos de objetivación siempre inacabados).

Con Raymond Duval, llamo al agente pensante “agente noético-semiótico”. Lo llamo “agente”, o “actor” (sin connotaciones de teatro), "actuante" o “actante”, porque está actuando, obrando, haciendo algo, al menos patalear para no ahogarse en el río de Heráclito. Al agente lo llamo “noético”, porque le atribuyo una actividad mental, la “noe-sis” (de “nous”, “la mente”), lo que remite al pensamiento. Lo llamo “semiótico”, porque percibo que gesticula, emite sonidos y expresiones faciales y parece esperar otras de nosotros, actividad que llamamos “semiosis” (de “semeion”, el signo, la señal, el símbolo), lo que remite a la representación y la expresión, a la escucha y la interpretación.

El producto de la actividad sensorio-motriz, cognitivo-afectiva, socio-histórico-cultural o noético-semiótica del agente –o como quiera llamarse, pues es todo eso y probablemente más– es un sistema mental que –con las teorías que eventualmente lo acompañen y limiten– intenta modelar el subproceso recortado de lo real por ese agente, seleccionado por su atención y valorado como atractivo o repulsivo, amistoso o amenazante, placentero o doloroso. En la ontología de esta especie de metafísica minimal no habría pues sino procesos, algunos de los cuales seríamos agentes noético-semióticos; otros serían objetos de la atención de algunos de los agentes, y otros serían modelos mentales de esos procesos tomados como objeto, acompañados o no de expresiones en lenguajes preverbales o en lenguajes articulados (teorías).

De los años 1993 a 1995 preparé una versión refinada de la Teoría General de Procesos y Sistemas TGPS, que publiqué en 1995 con la colaboración de Hernán Escobedo, Teresa León y Juan Carlos Negret en el segundo volumen de la colección de documentos de la Misión de Ciencia, Educación y Desarrollo (Vasco, 1995).

En la TGPS, los sistemas no están "allá afuera", sino "aquí dentro" de mi caja craneana, como productos de mi actividad noético-semiótica. Esos sistemas sirven de modelos de los subprocesos, y por lo tanto los modelos también son artefactos mentales para tratar de comprender los procesos e intervenir en ellos, aunque también pueden materializarse o plasmarse en artefactos públicamente accesibles, también llamados "modelos".

Así, todo modelo es un sistema elaborado como representación reconstructiva de un subproceso, y toda teoría es un sistema de enunciados elaborado en lenguaje articulado como restricción y precisión de uno o más modelos. En esta concepción, la teoría, aunque formulada en un registro semiótico lingüístico articulado o “digitalizado”, no es una mera expresión del modelo, sino una serie de estipulaciones que configuran, precisan, limitan y aun transforman los modelos analógicos iniciales en modelos que puedan "echarse a andar" según instrucciones y estipulaciones de dicha teoría.

En los modelos se comprende talvez mucho mejor mi distinción tripartita entre los tres aspectos de los sistemas: el sustrato como recorte analítico de los universos y sus elementos semiestables; la dinámica como intento de modelar la dinamicidad de los procesos con un repertorio de operaciones o transformaciones activas que intentan reparar la congelación sincrónica del sustrato para recuperar la diacronía, y la estructura como tejido o red de relaciones que intentan reparar esos recortes.

Modelos y teorías

Como ya lo señalamos de paso, la distinción entre modelos y teorías en matemáticas proviene inicialmente de la teoría de modelos en lógica matemática, que podríamos iniciar con el programa formalista de la metamatemática de Hilbert y su refutación por Kurt Gödel, seguida de los estudios de la escuela polaca sobre las relaciones entre conjuntos, lenguajes e interpretaciones, que llevaron a la teoría de la verdad de Alfred Tarski y a la teoría explícita de modelos de los años 40-60, condensada en libro ya clásico de Chang y Keisler de 1973, con muchas ediciones y reformulaciones.

Pero esta distinción en la lógica formal se quedó en el círculo de los lógicos y no trascendió ni a los matemáticos, ni a los científicos naturales o sociales, ni a los epistemólogos y filósofos, sino por un camino muy largo e imprevisto: la controversia de Thomas Kuhn contra Karl Popper en la epistemología de las ciencias naturales. Popper había formulado desde los años 30 una caracterización del quehacer científico que parecía satisfactoria: el falsacionismo. Desde la historia y la sociología de la ciencia, Kuhn atacó esa solución en 1962 en su libro *La estructura de las revoluciones científicas*. Es notable la aparición de la palabra "estructura" en el libro más crítico sobre la epistemología popperiana.

Los más brillantes discípulos de Popper, Paul Feyerabend e Imre Lakatos, asumieron posiciones divergentes ante las críticas de Kuhn. Feyerabend aceptó que la crítica de Kuhn a Popper era demoledora, y que el falsacionismo era insostenible; adoptó el anarquismo metodológico en su libro *Contra el método* (1975) y se adelantó a los posmodernos al negar la primacía del conocimiento científico sobre los demás tipos de conocimiento y proclamar que en metodología "Todo vale". En cambio, Lakatos aceptó sólo que la crítica de Kuhn invalidaba una interpretación ingenua del falsacionismo, pero dejaba abierta una salida hacia una epistemología del futuro, en la que no se consideraría ya cada teoría como objeto de estudio, sino lo que el mismo Lakatos llamó "un programa de investigación" como una sucesión de teorías. Lakatos murió en 1974, antes de publicar sus escritos sobre el tema, y sus discípulos y amigos publicaron los borradores de su teoría en dos tomos en 1978: *La metodología de los programas de investigación científica* y *Matemáticas, ciencia y epistemología*.

No fue fácil precisar y operacionalizar las ideas de programa de investigación, sucesión de teorías y progresividad o regresividad de los programas, hasta que diez años más tarde se logró un refinamiento de las ideas de Lakatos por Balzer, Moulines y Sneed con la ayuda de la distinción entre modelos y teorías tomada de la teoría de modelos en lógica. Ellos mismos se refirieron a su nueva propuesta como "programa estructuralista" y "teoría estructuralista", y el título de su primer libro parece hacer alusión a la arquitectura de la matemática bourbakista (Balzer, Moulines y Sneed, 1988).

Este programa permaneció muy poco conocido durante unos diez años, y parecía haberse quedado por fuera de la discusión epistemológica, en donde se extendían más bien los acercamientos sociológicos, antropológicos y lingüísticos posmodernos que creían haber dejado atrás las preguntas epistemológicas de la modernidad y empezaron a considerarse "postepistemológicos". Pero Balzer, Moulines y Sneed continuaron su trabajo y presentaron resultados y ejemplos impactantes de la potencia del programa estructuralista en dos nuevos libros: Balzer y Moulines (1996) y Sneed, Moulines y Balzer (2000). La exposición más clara en español es la que se encuentra en el libro de Díez y Moulines (2003). Para no confundir esta versión del programa estructuralista con las versiones anteriores, nos referiremos a él como "Programa Neo-Estructuralista –PNE– para las Ciencias Naturales y su Epistemología", expresión que abreviaremos "PNE(CN+E)".

3.2. El programa neo-estructuralista para las matemáticas modelo-teoréticas

Con los aportes de Balzer, Moulines y Sneed, desde la perspectiva de la Teoría General de Procesos TGP que subsume la Teoría General de Sistemas TGS en una Teoría

General de Procesos y Sistemas TGPS, y con una semiótica apropiada que llamo Teoría General de Representaciones e Interpretaciones TGRI, se podría formular una nueva propuesta de un programa neo-estructuralista para las matemáticas PNE(M), que supere el programa estructuralista del siglo XX, PE(M). Para distinguir esta manera de hacer matemáticas a partir de la distinción entre modelos y teorías y sus juegos de morfismos de representación e interpretación, nos referiremos a ellas como "matemáticas modelo-teoréticas –MMT".

Pretendemos que –además de dar razón de todas las matemáticas anteriores, en plural y sin exclusiones– el nuevo programa neo-estructuralista de las matemáticas puede dar razón de su filosofía, su epistemología, su historia y su didáctica (FEHD) en el siglo XXI. A pesar de lo larga de las últimas siglas, podemos plantear la ecuación:

$$PE(M) + TGPS + TGRI + PNE(CN + E) = PNE(MMT + FEHD).$$

Desde esta propuesta neo-estructuralista para las matemáticas modelo-teoréticas se pueden redefinir las matemáticas como el estudio de todos los modelos y sus teorías "en abstracto", o sea independientemente de su origen, sin necesidad de atender a la naturaleza de los componentes del sustrato ni de preocuparse de sus aplicaciones pasadas, presentes o futuras, o de su correspondencia o no con la evolución futura de los subprocesos reales. Ese estudio de todos los sistemas, tanto los que sirven como modelos como los que sirven como teorías, se focaliza en la dinámica y en la estructura de esos modelos y sus teorías, independientemente de la "naturaleza" de los objetos, elementos, componentes, individuos, puntos o partículas del sustrato de dichos sistemas. En ese nuevo sentido, el programa neo-estructuralista en matemáticas pretende ser universal, irreversible y omnicomprensivo.

Como todo modelo puede presentarse como sistema con un sustrato de objetos o elementos y toda teoría como un sistema con un sustrato de enunciados o proposiciones, cada uno con su respectiva dinámica (sistema de operaciones) y estructura (sistema de relaciones), este programa neo-estructuralista en matemáticas apunta al estudio de la estructura de todos los sistemas, incluidos los modelos y las teorías. Pero como toda estructura también es presentable como dinámica, el mismo programa neo-estructuralista es a su vez un programa neo-dinamicista que apunta al estudio de la dinámica de todos los sistemas. Esto elimina de un tajo las objeciones post-estructuralistas a la rigidez de las estructuras.

Con la Teoría General de Procesos y Sistemas, a partir de los recortes de los subprocesos y de la construcción de los respectivos modelos mentales, se llega directamente a los modelos como sistemas con sus tres aspectos: el sustrato, la dinámica y la estructura. Los conjuntos se presentan apenas como los sistemas con el mínimo posible de dinámica y de estructura, modelables por supuesto, de distintas maneras, y siempre bajo la sospecha de que la simplificación cantoriana con la simplificación a los conjuntos arrasó con todas las estructuras y dinámicas de los sistemas, reduciéndolos solo a su sustrato. Más que un paraíso, parecería que después de Cantor solo quedó un desierto. Esta poda radical de la teoría de conjuntos por los functores de olvido queda debiendo una investigación modelo-teorética sobre los remanentes de estructura en esas raíces sin ramas y sin hojas, y sobre la reconstrucción de los cultivos, los jardines y las junglas por los adjuntos a izquierda.

Más aún, parecería que el programa neo-estructuralista de las matemáticas requeriría una fundamentación en sistemas minimales que tuvieran al menos dos componentes con al menos un vínculo relacional estático que pudiera luego dinamizarse. Este requisito parece apuntar a la teoría de grafos, cuyos nodos tendrían que resultar equivalentes a la teoría de conjuntos, pero la distinción de nodos y arcos no sería suficiente para rescatar la distinción entre puntos fuente y puntos meta, ni la distinción entre arcos orientados de su fuente a su meta y las co-flechas respectivas. Una fundamentación minimal exigiría pues una teoría de flechas y cadenas, y no una teoría de puntos y conjuntos. Esa teoría de flechas y cadenas se identificaría con la teoría de grafos dirigidos o digrafos, y las categorías serían solo un subtipo de ellos, lo que a su vez exigiría el paso de las categorías a las alegorías. Mi convicción es que lo poco que he desarrollado el programa neo-estructuralista para las matemáticas como actividad creativa, me permite también dar razón de su filosofía, su epistemología, su historia y su didáctica (FEHD).

3.3. Un balance personal del programa neo-estructuralista

En particular, este acercamiento modelo-teorético me ha permitido trabajar intensivamente –y, así lo espero, coherentemente– en la filosofía, la epistemología y la historia de las matemáticas, en las matemáticas mismas y en las metodologías de investigación en matemáticas, y sobre todo en la didáctica de las matemáticas, “educación matemática” o “matemática educativa”.

Por ejemplo, me permitió estudiar las diferencias y las razones desde Euclides hasta nuestros días para ofrecer maneras alternas de presentar los enteros, los racionales y los reales. Me permitió distinguir los modelos usuales de la recta numérica de los de la semirrecta numérica, distinguir en ellos dos muy distintos, el de los segmentos y el de los cortes, ambos muy útiles para los números de medir y la modelación de los procesos físicos, y proponer otro modelo que llamo “de la semifila numérica” para los números de ordinales antiguos (primero, segundo, ...) y los números de contar, que son anteriores a los ordinales finitos cantorianos y a los cardinales de los conjuntos finitos o números naturales cantorianos.

En geometría, el análisis modelo-teorético y las síntesis que posibilita me permitieron distinguir la cronografía y la cronología, y pasar a la cronometría y a la crononomía en cuanto a representaciones mentales y materiales externas del espacio-tiempo o cronotopo, y distinguir la topografía y la topología, y pasar a la topometría y a la toponomía. Así, puede reconstruir un "Quadrivium" de la cronotopía y situarla antes y después de la geometría (Vasco, 2011; 2013). Me permitió analizar el trabajo de síntesis que elaboró Euclides sobre los axiomas y el que realizó sobre las definiciones, y explicar en qué sentido la geometría euclidiana es estática y en qué sentido no lo es.

Este tipo de análisis-síntesis modelo-teorético me permitió seguir el camino de Hilbert en su reconstrucción de los axiomas de la geometría plana y del espacio euclidiano, y captar la manera cómo seleccionó los axiomas de dimensionalidad, “mirando de reojo” al modelo elemental euclidiano, y cómo falló al tratar de formular una teoría que refinara la noción de ángulo. Perdió el ángulo como inclinación y la región angular, y se quedó sólo con el ángulo como bilátero compuesto por dos semirrectas, figura lineal que define al menos dos ángulos menores que cuatro rectos, cada uno con dos orientaciones posibles.

Me permitió estudiar los modelos y las teorías de las geometrías no euclidianas y mostrar en contra de todos los geómetras que conozco que la geometría riemanniana de la esfera sí es euclidiana en cuanto al quinto axioma si este se toma como lo enunció Euclides, pero no si se toma el enunciado del quinto postulado en la forma que se atribuye a John Playfair (1795), con lo cual se muestra que las dos formas no son equivalentes.

Me permitió reconstruir el estatus del álgebra de secundaria y percibir la diferencia en el tratamiento algebraico de los ejercicios de aritmética generalizada, de la geometría analítica y de las funciones en los últimos grados escolares y los primeros años de universidad como tres registros semióticos diferentes para tres sistemas conceptuales diferentes.

Así, con las reinterpretaciones modelo-teoréticas, la filosofía intuicionista resulta la mejor para tratar los modelos, la formalista para tratar las teorías, y la logicista para estudiar las interpretaciones de las teorías en los modelos mentales. No quedan pues superadas en el sentido de de quedar sepultadas en el baúl de los recuerdos, sino en el sentido hegeliano de la "Aufhebung", la superación hacia arriba y hacia adelante que conserva lo mejor de la tesis y de la antítesis.

Pero como también toda relación de la estructura puede presentarse como operación de la dinámica, se reivindica la idea de Piaget de que la estructura se define también por el juego de operaciones del sistema. Con esa visión, los sistemas dinámicos se revelan también como presentables estáticamente con una estructura relacional derivada de sus operaciones, y los sistemas relacionales estáticos se revelan también como dinámicos con una dinámica derivada de sus relaciones. Se despeja así la crítica a la estaticidad de las estructuras y se aprecia que un posible programa dinamicista rival del estructuralista sería sólo otra presentación equivalente del programa neo-estructuralista. Por lo tanto, hasta este momento, el que he llamado "programa neo-estructuralista modelo-teorético" se ha mostrado, a pesar de los incipientes desarrollos, un programa potente y fecundo para estudiar la filosofía, la epistemología y la historia de las matemáticas, y promete convertirse en una nueva fuente de propuestas pedagógicas y didácticas para la educación matemática.

Nota: La primera parte de esta conferencia fue presentada en la ENHEM 3, Cali, 28 de octubre de 2010. La segunda parte fue presentada en la ENHEM 4, Cali, 10 de octubre de 2013.

Referencias

Balzer, W., Moulines, C. U., y Sneed, J. D. (1988). *An architectonic for science: The Structuralist Program* (Synthese Library, 186). Dordrecht: Kluwer.

Balzer, W., y Moulines, C. U. (1996). *Structuralist theory of science: Focal issues, new results* (Perspectives in Analytical Philosophy, Bd. 6). New York/Berlin: De Gruyter.

Chang, C. C., y Keisler, H. J. (1973). *Model theory*. Amsterdam: North-Holland.

Corry, L. (1992). Nicolas Bourbaki and the Concept of Mathematical Structure. *Synthèse, 92*(3), 315-348. Disponible en el URL: http://www.jstor.org/stable/20117057

Díez, J. A. y Moulines, C. U. (2003). *Fundamentos de filosofía de las ciencias*. Barcelona: Ariel. MacLane, S., y Birkhoff, G. (1953). *A survey of Modern Algebra*, New York: Macmillan.

Sneed, J. D., Moulines, C. U., and Balzer, W. (2000). *Structuralist knowledge representation. Paradigmatic examples*. (Poznán Studies in the Philosophy of the Sciences and the Humanities 75). Poznan: Rodopi.

Vasco, C. E. (1980). Teoría de sistemas y metodologías científicas. *Ciencia, Tecnología y Desarrollo, 4*(4), 463-482.

Vasco, C. E. (1991). Conjuntos, estructuras y sistemas. *Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, 18*(69), 211-223.

Vasco, C. E. (1995). La teoría general de procesos y sistemas. En: Misión Ciencia, Educación y Desarrollo, *Educación para el desarrollo* (Informes de Comisionados I. Colección Documentos de la Misión, Tomo 2, pp. 377-652). Santafé de Bogotá: Presidencia de la República–Consejería Presidencial para el Desarrollo Institucional–Colciencias. (Con la colaboración de Hernán Escobedo, Teresa León y Juan Carlos Negret).

Vasco, C.E. (2011). La cronotopía, antes y después de la geometría. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática* (Costa Rica), *6*(9), 77-91. Disponible en el URL: http://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/6961

Vasco, C. E. (2013). La interacción entre modelos y teorías en la enseñanza de la cronotopía. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática* (Costa Rica), *8*(11), 133-148. Disponible en el URL: http://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/ article/view/14721