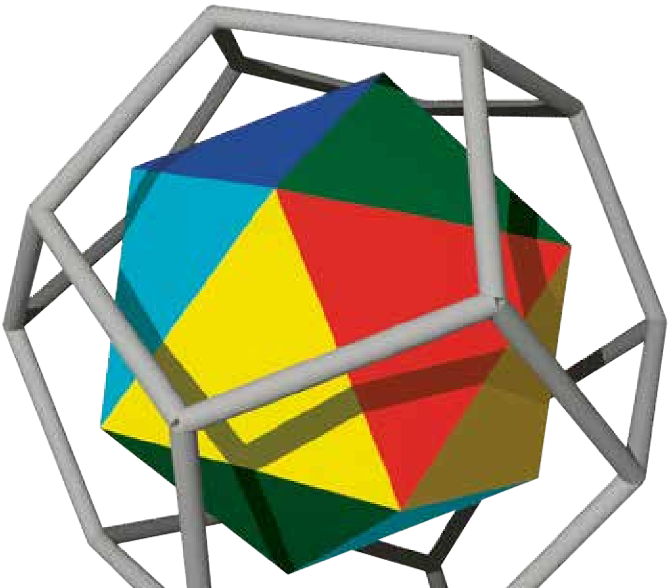
NÚMERO ESPECIAL

CUADERNOS
DE INVESTIGACIÓN Y FORMACIÓN
EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Evaluación y Pruebas Nacionales *para* un Currículo de Matemáticas que enfatiza capacidades superiores

SEGUNDA DÉCADA



Centro de
Investigación y Formación
en Educación Matemática
www.cifemat.org

AÑO 12, NÚMERO ESPECIAL, DICIEMBRE 2017

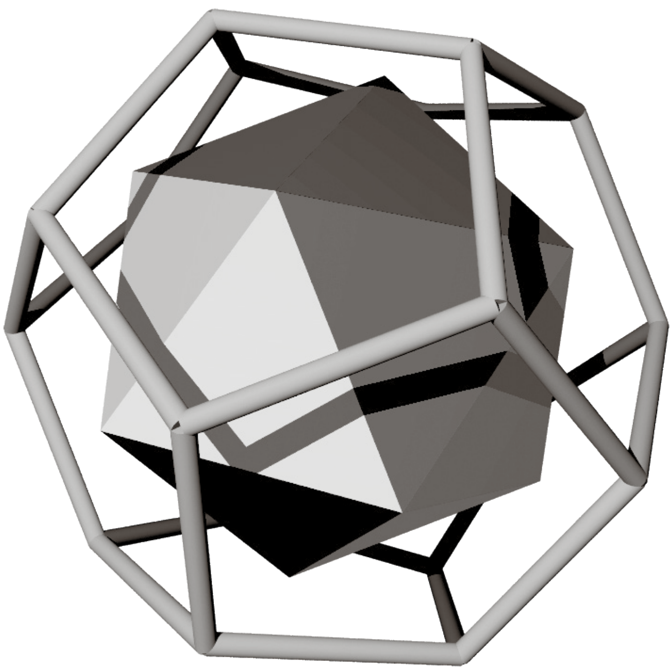
EVALUACIÓN Y PRUEBAS NACIONALES *PARA* UN CURRÍCULO DE MATEMÁTICAS QUE ENFATIZA CAPACIDADES SUPERIORES

NÚMERO ESPECIAL

CUADERNOS
DE INVESTIGACIÓN Y FORMACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Evaluación y Pruebas Nacionales *para* un Currículo de Matemáticas que enfatiza capacidades superiores

SEGUNDA DÉCADA



Centro de
Investigación y Formación
en Educación Matemática
www.cifemat.org

AÑO 12, NÚMERO ESPECIAL, DICIEMBRE 2017

Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática:

- es una publicación seriada que busca nutrir la comunidad de Educación Matemática con instrumentos teóricos que permitan potenciar los quehaceres dentro de esta*:*
- es una iniciativa del *Centro de Investigación y Formación en Educación Matemática* CIFEMAT (www.cifemat.org) que integra investigadores y proyectos asociados a universidades públicas y otras instituciones académicas de Costa Rica.
- es una publicación inscrita formalmente en el *Centro de Investigaciones Matemáticas y Metamatemáticas* (http://www.cimm.emate.ucr.ac.cr/inicio) y la Vicerrectoría de Investigación de la Universidad de Costa Rica y ha contado desde su creación con el respaldo permanente de esta institución.
- posee una doble presentación: impresa en papel y digital. El número de ejemplares que se imprimen en papel depende de cada número.

Cuadernos no es una publicación abierta, los artículos se escriben por invitación del Consejo Editorial o del Director, pero en ocasiones se aceptan algunos trabajos de investigadores o académicos externos al Centro, para lo cual se debe enviar una solicitud formal al Director de *Cuadernos*. Las reglas de publicación, en este último caso, se encuentran en la página web de Cuadernos.

Cada número de los *Cuadernos* se concentra en una temática específica, aunque incluye otros temas de interés. Posee una regularidad de al menos 1 número por año (en diciembre).

Las secciones de los *Cuadernos* son:

- Investigación y ensayos
- Experiencias
- Propuestas
- Tesis
- Software
- Reseñas
- Documentos

Publica trabajos inéditos en español, portugués y en inglés, así como artículos o documentos ya publicados que puedan ser de interés para la comunidad de Educación Matemática.

Cuadernos ha establecido una alianza estratégica con el *Comité Interamericano de Educación Matemática* CIAEM (www.ciaem-iacme.org, organismo regional oficial de la *International Commission on Mathematical Instruction* ICMI) y la *Red de Educación Matemática de América Central y El Caribe* (www.redumate.org).

Cuadernos posee un Consejo Asesor Internacional del más alto nivel en la comunidad internacional de Educación Matemática. También posee un Comité Editorial que se encarga de las tareas regulares de gestión, edición y publicación. Este último también tiene un carácter internacional.

El Director asume la conducción general permanente de *Cuadernos*, pero para cada número hay una Dirección Ejecutiva.

510.1
C961c

Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática / Centro de Investigaciones Matemáticas y Metamatemáticas, Universidad de Costa Rica. - Año 12, Número especial (Diciembre 2017). San José, C.R.: Centro de Investigaciones Matemáticas y Metamatemáticas, Universidad de Costa Rica, 2017-xvi.

ISSN: 1659-2573

1. MATEMATICAS - PUBLICACIONES SERIADAS

2. MATEMATICAS - ENSEÑANZA - COSTA RICA

Contenido

Editorial 15

Prefacio 17

Evaluación y pruebas nacionales *para un* currículo de matemáticas que enfatiza capacidades superiores 27

Assessment and National Examinations *for* a Mathematics Curriculum that Emphasizes Higher-order Thinking 29

Introducción 31

1. Las capacidades en el currículo nacional 57

Competencia matemática y capacidades superiores 59

La competencia matemática como constructo 59

Integración de habilidades 61

El estilo de la lección 62

Resolución de problemas y selección-diseño de tareas 63

Procesos y niveles de complejidad 65

Estrategias de aula en función del currículo 65

Actitudes y creencias positivas 67

Los contextos en el currículo de Matemáticas 72

El papel de los contextos reales 72

Propuesta para identificar contextos 74

Ejemplos de contextos 76

Conocimientos y habilidades: enfoques del currículo 80

Números 81

Geometría 81

Medidas 82

Relaciones y álgebra ... 83
Estadística y probabilidad ... 85

Modelo para identificar habilidades y sus interacciones ... 86

La interacción de las áreas ... 86
La intervención combinada y sinérgica de habilidades ... 88
Relación entre habilidades generales y habilidades específicas ... 90
Participación de las habilidades generales en las tareas matemáticas ... 95

Modelos para valorar capacidades superiores y niveles de complejidad ... 100

El lugar de los procesos ... 100
Modelo completo para valorar grados de los procesos ... 103
Estructura de intervención de procesos usando el modelo completo ... 119
Algunas observaciones sobre grados de procesos ... 120
Cinco criterios para valorar niveles de complejidad en el modelo completo ... 123
Ejemplos teóricos de valoración de niveles de complejidad con el modelo completo ... 126
Modelo simplificado para valorar procesos y niveles de complejidad ... 128

La estrategia "4 + 6" para la valoración de tareas matemáticas ... 133

Propuesta de la estrategia ... 134
Ejemplo 1: Construir un punzón ... 139
Ejemplo 2: Una recta corta una circunferencia ... 142
Ejemplo 3: Examen de admisión a una universidad ... 145
Ejemplo 4: Lanzamiento de un dardo ... 151
Acción de aula ... 156

El currículo de Matemáticas y la política curricular en Costa Rica ... 165

Sobre la primera parte ... 179

2. La evaluación para el currículo costarricense de Matemáticas ... 181

La evaluación ... 182

Del conductismo al currículo ... 189

Currículos de Matemáticas en Costa Rica ... 197

Objetivos versus habilidades 200

La evaluación de capacidades superiores 211

Diseño de tareas matemáticas 213

El lugar del diseño de lecciones 214
Capacidades matemáticas y no matemáticas 217
Naturaleza distinta de tareas matemáticas 218
Conocimientos, habilidades, estrategias metodológicas para las tareas 219
La valoración de las capacidades superiores 219

Diseño de tareas en la Educación Matemática: perspectiva general 222

Una estrategia para el diseño de tareas matemáticas en Costa Rica congruente con el currículo 226

La documentación oficial sobre evaluación en Costa Rica 229

El Reglamento de Evaluación 229
Tabla de especificaciones para pruebas escritas 232
Otros tópicos particulares 236

La reforma de la evaluación con visión histórica 240

Perspectiva estratégica 240
Perspectiva inmediata 241

Sobre la segunda parte 245

3. Pruebas nacionales congruentes con el currículo 247

Las pruebas nacionales 248

El modelo de construcción de las pruebas nacionales 252

Modelo de elaboración de pruebas nacionales y tablas de especificaciones 252
¿Son los enfoques psicométricos convenientes? 258
Modelo de elaboración de pruebas nacionales 262
¿Hay alternativas a las tablas de especificaciones? 266

Pruebas nacionales con el nuevo currículo 270

Capacidades superiores y un paradigma distinto de pruebas nacionales 271

Perspectiva general para el diseño de las pruebas nacionales de Matemáticas 272

Siete elementos para diseñar las pruebas nacionales de Matemáticas 275

Pensar el futuro 281

Más allá de una prueba estandarizada 281

La introducción de TIC en las pruebas nacionales 282

A manera de conclusión 285

Reconocimientos y agradecimientos 293

Referencias bibliográficas 295

Siglas y acrónimos 309

Índice de tablas

Tabla 1. Seis escenarios de intervención de habilidades generales 95

Tabla 2. Indicadores de grados del proceso *Razonar y argumentar* 106

Tabla 3. Indicadores de grados del proceso *Plantear y resolver problemas* 108

Tabla 4. Indicadores de grados del proceso ***Conectar*** 110

Tabla 5. Indicadores de grados del proceso *Comunicar* 111

Tabla 6. Indicadores de grados del proceso *Representar* 113

Tabla 7. 61 Indicadores de los grados de procesos matemáticos 115

Tabla 8. Primera representación de la estructura de intervención de procesos en un problema 119

Tabla 9. Niveles de complejidad de un problema: indicadores en el currículo 123

Tabla 10. 30 indicadores de grados de procesos 128

Tabla 11. Distribución de la habilidad “resolución de problemas” en los ciclos educativos 167

Tabla 12. *Política curricular* (2016) y Programas de Matemáticas (2012) 174

Tabla 13. La tabla de la taxonomía de Bloom revisada 193

Tabla 14. La dimensión del proceso cognitivo 193

Tabla 15. Malla curricular de los Programas de Matemáticas 2005 200

Tabla 16. Malla curricular de los programas de Matemáticas 2012 204

Tabla 17. Componentes de evaluación sumativa en Costa Rica. Matemáticas. Porcentajes 231

Tabla 18. Tabla de especificaciones para pruebas escritas 233

Índice de figuras

Ilustración1. El currículo costarricense de Matemáticas: portada de versión impresa ... 32, 45

Ilustración 2. App REduMate ... 33, 45

Ilustración 3. Una imagen de un artículo internacional que reseña uso de virtualidad en cursos de la Reforma Matemática en Costa Rica ... 34, 47

Ilustración 4. Yo me apunto ... 35, 48

Ilustración 5. Mini MOOC: una original modalidad de ofrecer cursos virtuales ... 36, 49

Ilustración 6. Dos etapas de la Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica: 2010-2015, 2016- ... 39, 52

Figura 1. La competencia matemática general como constructo curricular ... 66

Figura 2. Cinco actitudes positivas sobre Matemáticas en el currículo costarricense ... 70

Figura 3. Cinco contextos ... 76

Figura 4. Habilidad general como generalización de habilidades específicas ... 90

Figura 5. Habilidad específica como generalización de habilidades específicas ... 91

Figura 6. Habilidad general como composición de habilidades específicas ... 92

Figura 7. Habilidad general como composición de habilidades específicas y habilidades más simples ... 93

Figura 8. Habilidad general que generaliza otras habilidades generales ... 94

Figura 9. Seis escenarios de interacción de habilidades generales ... 96

Figura 10. Grados de procesos / capacidades superiores ... 104

Figura 11. Los procesos-capacidades determinan el nivel de complejidad ... 124

Figura 12. Secuencia para valorar grados de procesos y niveles de complejidad ... 125

Figura 13. Modelos completo y simplificado para valorar procesos y niveles de complejidad. ... 131

Figura 14. Agrupación de tareas matemáticas como problemas ... 134

Figura 15. Componentes para la valoración de tareas matemáticas 135

Figura 16. 4 + 6: Estrategia para la valoración de tareas matemáticas: cuatro pasos y seis elementos 136

Figura 17. Dimensiones y habilidades de la política curricular oficial de Costa Rica. 166

Figura 18. Dimensiones de la *Política curricular* y ejes disciplinares en Matemáticas 176

Figura 19. Selección-diseño-valoración de tareas matemáticas 214

Figura 20. Matriz de Planeamiento Didáctico del Ministerio de Educación Pública. 216

Figura 21. Perspectivas estratégicas e inmediatas para la evaluación en matemáticas 244

Figura 22. Primeras etapas en el modelo de elaboración de pruebas nacionales de bachillerato 254

Figura 23. Siete elementos para elaborar las pruebas nacionales de Matemáticas 280

Figura 24. Marco teórico para avanzar la implementación curricular 290

Editorial

Este número especial de *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática* contiene un estudio monográfico sobre la evaluación y las pruebas nacionales para un tipo de currículo de Matemáticas con una característica especial: enfatiza las capacidades cognitivas superiores y la competencia matemática.

Se trata de usna edición que busca ofrecer avances y precisiones sobre los elementos teóricos que se condensaron en los Programas de Estudio de Matemáticas aprobados en Costa Rica en el 2012. Introduce modelos para la identificación de habilidades dentro de escenarios distintos, para la valoración de capacidades superiores y niveles de complejidad que formulan esos programas, precisa los contextos de problemas, brinda estrategias para valorar tareas y problemas matemáticos, y describe propuestas para abordar la evaluación de aula y las pruebas nacionales en un crisol donde convergen todas las acciones educativas. Este trabajo contiene planteamientos críticos sobre varias dimensiones de los quehaceres en la evaluación educativa en busca de promover una sintonía mayor de los mismos con el currículo oficial. Posee en ese sentido una vocación que pretende apoyar la implementación de este currículo. Por eso, se introducen pasajes sobre algunos avatares de una reforma educativa que se vive con cierta intensidad en la realidad costarricense. Desde hace algunos años, esta reforma se encuentra en la mira de la comunidad educativa internacional como una experiencia que puede arrojar lecciones para desarrollar este tipo de procesos en países en desarrollo.

Para sostener sus propuestas el autor acude a la experiencia e investigación desarrolladas en la comunidad de Educación Matemática, incluye referencias muy recientes así como de hace algunas décadas, tanto de Costa Rica como del resto del mundo.

El Consejo Editorial de *Cuadernos* ha considerado que la publicación de este trabajo aporta recursos muy valiosos no solo para la reforma educativa costarricense sino, también, para las reflexiones que se realizan internacionalmente sobre el diseño de tareas matemáticas y las diversas facetas de la evaluación en esta disciplina.

La relevancia y actualidad de los temas tratados son recogidas por Diane Briars quien escribió un especial prefacio para esta obra. La Dra. Briars fue la presidenta del *National Council of Teachers of Mathematics* de los Estados Unidos en el periodo 2014-2016, una poderosa organización que ha sido una referencia fundamental para todo el mundo en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas. La trayectoria de la Dra. Briars incluye su participación en otras organizaciones de Estados Unidos, entre ellas el *College Board* de la *National Science Foundation* y acciones como asesora en diversos comités como la *National Commission on Mathematics and Science Teaching for the 21st Century*, encabezado por el senador John Glenn. En este periodo trabaja fundamentalmente como consultora para apoyar escuelas y distritos escolares en su interpretación e implementación de los *Common Core State Standards for Mathematics*. La Dra. Briars ha sido directora de desarrollo e investigadora asociada del *Intensified Algebra Project*, una iniciativa conjunta del *Learning Science Research Institute* de la University of Illinois en Chicago y el Dana Center de la University of Texas en Austin.

Cuadernos agradece a la Dra. Briars su generosa contribución.

En esta ocasión se incluye además una versión en inglés de la introducción del trabajo, que permitirá una proyección mayor de los asuntos que son tratados aquí. *Cuadernos* agradece al Dr. Patrick Scott, profesor emérito de la University of New México, vicepresidente del *Comité Interamericano de Educación Matemática* y expresidente de la *US National Commission on Mathematics Instruction* (Estados Unidos) por haber aportado esta traducción.

Estamos seguros que la obra será de interés para muchos investigadores, docentes y estudiantes interesados no solo en la reforma de la Educación Matemática en Costa Rica sino, también, en varios elementos teóricos y propuestas intelectuales que se discuten muy recientemente en la comunidad internacional de esta disciplina y que son introducidos en esta publicación.

Hugo Barrantes

Director ejecutivo

Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática

habarran@gmail.com

Miramar, Puntarenas, Costa Rica

Diciembre de 2017

Prefacio

"Un excelente programa de Matemáticas asegura que la evaluación es una parte integral de la enseñanza, proporciona evidencia de competencia con contenido y prácticas de Matemáticas importantes, incluye una variedad de estrategias y fuentes de datos, e informa y realimenta a los estudiantes sobre las decisiones de instrucción y mejoramiento del programa".

NCTM, 2014, p. 89

La evaluación es un elemento esencial de cualquier programa de Matemáticas. Para que las evaluaciones respalden efectivamente el aprendizaje de los estudiantes, deben proporcionar información sobre todos los aspectos del conocimiento matemático, incluidos los procesos matemáticos, como la resolución de problemas, el razonamiento y la capacidad de construir y evaluar argumentos matemáticos, así como habilidades de procedimiento y comprensión conceptual. Además, las investigaciones indican que la evaluación de aula de gran calidad, incluida la evaluación formativa continua, tiene un fuerte efecto positivo en el aprendizaje de los estudiantes (Hattie et al, 2017). Por lo tanto, un sistema de evaluación efectivo incluye apoyo para evaluaciones de aula de gran calidad junto con evaluaciones sumativas de alta calidad.

En este libro, Angel Ruiz describe un sistema de evaluación de alta calidad para el currículo de Matemáticas de Costa Rica aprobado en 2012, y mucho más. Aunque el foco es la evaluación tanto de aula como en pruebas nacionales (aplicadas a poblaciones masivas) llevadas a cabo por Costa Rica, también describe principios generales aplicables a otros asuntos que forman parte de la discusión actual dentro de la comunidad internacional de Educación Matemática.

Ruiz aborda explícitamente cómo evaluar el pensamiento de orden superior además de los conceptos y procedimientos. Y, lo más importante, proporciona un modelo detallado para la selección-diseño-evaluación de tareas de alta calidad, junto con una estrategia para aplicarlo a las tareas. Este modelo y esta estrategia son herramientas invaluables para que los docentes mejoren la calidad de su enseñanza y la de sus evaluaciones en el aula[1].

[1] Este prefacio fue escrito originalmente en inglés; la traducción al español es responsabilidad de los editores.

El currículo costarricense de Matemáticas asume como su enfoque principal la “resolución de problemas con énfasis en contextos reales”, lo que se consigna de una manera muy precisa: desarrollo de la acción de aula mediante problemas con ciertas características. Se ofrece un modelo preciso que busca que los docentes usen una guía de cuatro pasos para materializar ese enfoque: (1) presentación del problema, (2) trabajo estudiantil independiente, (3) discusión interactiva y colaborativa, y (4) clausura o cierre. El modelo resume importantes hallazgos de investigación y experiencia internacional que incluyen resultados de la escuela francesa de Didáctica de las Matemáticas, ideas de la Educación Matemática Realista (Freudenthal), el marco teórico de las pruebas PISA de la OCDE (competencia, capacidades), del National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) de los Estados Unidos (*Principios y estándares para las Matemáticas escolares,* 2000), y muy especialmente de la lección japonesa (estrategia de aula).

Ahora bien, el objetivo del ese modelo pedagógico responde a un propósito general que se otorga a la preparación matemática escolar: el desarrollo de una competencia matemática general, la que se asume como la capacidad para comprender y usar conocimientos y competencias matemáticas en diversos contextos de la vida de las personas. Hay aquí una visión filosófica sobre la naturaleza de las Matemáticas y su enseñanza, formulada y desarrollada por Ruiz desde hace más de 20 años.

Esta competencia general condensa conocimientos y habilidades asociadas a estos, y especialmente capacidades cognitivas superiores transversales a todas las áreas en que se organiza el currículo: Números, Geometría, Medidas, Relaciones y Álgebra, Estadística y Probabilidad. El currículo busca el desarrollo de las capacidades superiores, en las cuales las acciones que las promueven se consignan como procesos: Razonar y argumentar, Plantear y resolver problemas, Conectar, Comunicar y Representar. Si bien existe una fuerte conexión con el sentido de las “áreas matemáticas” y los “procesos” planteados por el NCTM, hay diferencias, que el libro señala.

Una contribución clave de este libro es que ofrece un avance del modelo pedagógico que se estableció con el currículo de 2012, proporciona un lugar mucho más sólido para la fase inicial de «presentación del problema» sin disminuir la importancia de los otros tres pasos. El primer paso se considera crucial para la construcción del aprendizaje. Es por eso que se articula aquí como «selección-diseño-evaluación» de problemas o tareas matemáticas. Esta es una de las ideas principales del texto. Y aquí es precisamente donde Ruiz establece la conexión con la evaluación: tanto el desarrollo de la lección como la evaluación (de aula o aplicada a grandes poblaciones) encuentran una intersección vital en esa «selección-diseño-evaluación».

Cuando el propósito curricular es desarrollar capacidades superiores esa “selección-diseño-valoración” debe precisar con bastante cuidado la intervención de esas capacidades en una tarea matemática. El currículo costarricense incluye tres “niveles de complejidad” (“Reproducción”, “Conexión”, “Reflexión”) basados más o menos en el marco teórico de PISA. Ruiz ofrece dos modelos teóricos para valorar esos niveles con base en los cinco procesos (capacidades superiores). Un modelo completo con cinco criterios para realizar esa valoración utilizando 61 indicadores de cómo actúan los procesos (los cuales son agrupados en tres grados de acuerdo a su complejidad); otro modelo, una versión simplificada, lo hace mediante un criterio para los niveles de complejidad y 30 indicadores. Con base en esta valoración es posible aproximar el nivel de complejidad y la manera en que intervienen las capacidades superiores en un problema. Y esto es central para comenzar una lección o para realizar la evaluación. Hasta ahora no existía en la comunidad internacional de Educación Matemática un modelo tan detallado para realizar esa valoración.

Estos modelos se complementan con una estrategia para realizar esa “selección-diseño-valoración” que se denomina “4 + 6”, que contiene 4 pasos y 6 elementos: (1) enunciar el problema, (2) resolver el problema, (3) identificar los conocimientos, habilidades y contextos presentes y (4) valorar los procesos y niveles de complejidad. La estrategia asume que las tareas matemáticas deben estar asociadas directamente a los elementos del currículo; es decir: estas tareas deben plasmar conocimientos y habilidades, y las capacidades superiores que se desea fortalecer. En ese sentido, un problema o colección de tareas puede servir muy poco o mucho a los fines curriculares específicos, es obligado hacer su estudio específico. En este libro, Ruiz promueve la idea de que la enseñanza y la evaluación de las Matemáticas son más efectivas cuando el uso o diseño de las tareas matemáticas están integralmente conectados a los objetivos de aprendizaje específicos establecidos en el currículo.

Al anticipar con mejor precisión el papel de las capacidades superiores en un problema, es entonces posible medir el desempeño que vayan a tener los estudiantes en relación con el mismo: *a priori* se sabrá qué habilidades y capacidades y en qué grado entran en juego.

Este libro también proporciona información valiosa sobre políticas educativas de Costa Rica que sostienen los esfuerzos de reforma curricular actuales. A diferencia de los Estados Unidos, Costa Rica tiene políticas y planes de estudios nacionales que deben implementarse en todo su sistema educativo. En este libro, Ruiz analiza las relaciones entre el currículo costarricense de Matemáticas y la política curricular nacional adoptada en 2016. Muestra que hay una congruencia completa y, más aun, que estos Programas de Matemáticas han allanado el camino para el establecimiento de currículos en otras materias que también ofrecen un énfasis en las habilidades del siglo XXI. Costa Rica es un ejemplo importante de cómo la coherencia y la complementariedad de todos los planes de estudios que tiene un país pueden apoyar el mejor desarrollo educativo.

Con el fin de apoyar sus propuestas, Ruiz incursiona en temas teóricos generales como el conductismo, los currículos lineales (Tyler et al.) y las taxonomías educativas (Bloom et al.). También analiza las ventajas y desventajas de los modelos psicométricos en la educación y, en particular, en las pruebas. La bibliografía consultada es muy amplia y reciente.

La parte final del libro se concentra en las pruebas nacionales utilizadas en Costa Rica para que los estudiantes completen la educación secundaria y también para poder acceder a la educación superior. En esencia, Ruiz cuestiona el modelo vigente para el diseño y desarrollo de estas pruebas que, afirma, corresponden más bien a los currículos previos diseñados «por contenidos" y sin énfasis en las capacidades superiores. Aunque el autor encuentra limitaciones en estos exámenes «centrados en contenidos», reconoce que en el escenario actual de Costa Rica no es posible eliminarlos. Ruiz propone una visión de largo plazo para complementar este tipo de pruebas nacionales con mejores instrumentos de diferente naturaleza (en particular cualitativos) que incluyan a las tecnologías de la información y la comunicación (TIC), pues en particular en relación con estas últimas se han dado importantes avances para utilizarlas en la evaluación de capacidades superiores. Sin embargo, afirma que, en el corto plazo, sobre todo, los exámenes deben mejorarse para que, en la medida de lo posible, coincidan con las características de este currículo de Matemáticas que enfatiza las capacidades superiores. Ruiz afirma además que esta demanda sobre la calidad y la pertinencia de los exámenes no debe concebirse solamente para las pruebas nacionales sino, también, para las evaluaciones en el aula; esto es absolutamente esencial si se quieren alcanzar los objetivos establecidos por el currículo del 2012. Aquí es donde se invoca el marco teórico que incluye un modelo para evaluar tareas matemáticas y la estrategia «4 + 6».

Las propuestas que Ruiz ofrece en este texto avanzan elementos para la discusión internacional sobre el diseño de tareas matemáticas y la evaluación. Aunque estos enfoques invitan a cambios en la política educativa y la documentación oficial en Costa Rica, una dimensión central de este esfuerzo sistémico de mejora es la preparación docente. No será posible que las metas ambiciosas de los Programas del 2012 lleguen efectivamente a las aulas si no se considera la preparación inicial que los docentes reciben en las universidades y si no se toma en cuenta el desarrollo profesional sistémico ampliado para los docentes actuales. Este texto también propone estrategias para ayudar a la comunidad costarricense de Educación Matemática a desarrollar todos los medios que demandan estos cambios en el currículo y la evaluación.

Si bien existen bastantes diferencias entre los escenarios educativos de Costa Rica y los Estados Unidos, existen convergencias importantes en los elementos esenciales de la enseñanza y evaluación de las Matemáticas que deben abordarse para mejorar la calidad de la enseñanza de estas y lograr el objetivo general de que cada estudiante entienda y pueda usar el conocimiento y las capacidades matemáticas en varios contextos de su vida. Por ejemplo, el modelo pedagógico costarricense y las prácticas eficaces de enseñanza de las Matemáticas del NCTM (NCTM, 2014) son muy similares. Entonces, tenemos una visión común para la enseñanza efectiva basada en la investigación. Aquí el problema que emerge es ¿cómo hacemos que esa instrucción sea sistémica, que se manifieste en cada aula, todos los días? ¿Cómo podemos desarrollar una preparación del docente y un desarrollo profesional que respalden este tipo de enseñanza? Y ¿cómo podemos diseñar e implementar un sistema de evaluación que incluya evaluaciones sumativas y de aula que reflejen las demandas cognitivas del siglo XXI?

En este libro, Ruiz ofrece análisis extremadamente valiosos sobre el currículo de Matemáticas, enseñanza y evaluaciones, así como recomendaciones y herramientas específicas para abordar asuntos de pedagogía y evaluación que preparan a los estudiantes para su futuro. Leerlo puede enriquecer el trabajo de investigadores, académicos, diseñadores de pruebas, administradores educativos y docentes comprometidos con un desarrollo de la Educación Matemática de la más alta calidad para todos y cada uno de los niños y jóvenes. Lo recomiendo altamente.

Diane J. Briars

Presidenta NCTM (2014-2016)

Referencias

Hattie, John, Douglas Fisher, Nancy Frey, Linda M. Gojak, Sara Delano Moore, and William Mellman. *Visible Learning for Mathematics, Grades K-12: What Works Best to Optimize Student Learning*. Thousand Oaks, CA: Corwin Press, 2017.

National Council of Teachers of Mathematics *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, Va.: NCTM, 2000.

National Council of Teachers of Mathematics. *Principles to Actions: Ensuring Mathematical Success for All*. Reston, VA: NCTM, 2014.

Preface

> *"An excellent mathematics program ensures that assessment is an integral part of instruction, provides evidence of proficiency with important mathematics content and practices, includes a variety of strategies and data sources, and informs feedback to students, instructional decisions, and program improvement."*
>
> *NCTM, 2014, p. 89*

Assessment is an essential element of any mathematics program. For assessments to effectively support students' learning, they must provide information about all aspects of mathematical knowledge, including mathematical processes, such as problem solving, reasoning, and the ability to construct and evaluate mathematical arguments, as well as procedural skills and conceptual understanding. Furthermore, research indicates that high quality classroom assessment, including ongoing formative assessment, has a strong positive effect on student learning (Hattie et al, 2017). Thus, an effective assessment system includes support for high quality classroom assessments along with high quality summative assessments.

In this book, Angel Ruiz describes such a high quality assessment system for the Costa Rican Mathematics curriculum approved in 2012—and much more. Although the focus is assessment in both classroom and national examinations (in massive populations) carried out by Costa Rica, it also describes general principles applicable to other subjects that are part of current discussion in the international community of Mathematics Education.

Ruiz explicitly addresses how to assess higher-order thinking in addition to concepts and procedures. And, most importantly, he provides a detailed model for selection-design-evaluation of high quality tasks, along with a strategy for applying it to tasks. The model and strategy are invaluable tools for teachers to improve the quality of their instruction and their classroom assessments.

The Costa Rican Mathematics curriculum assumes as its main focus “problem solving with emphasis in real contexts”, which is stated in a very precise way: development of classroom action through problems with certain characteristics. It offers a precise model that asks teachers to use a four-step guide to operationalize this approach: (1) presentation of the problem, (2) independent student work, (3) interactive and collaborative discussion, and (4) closure. The model summarizes important research findings and international experience including results from the French School of Didactics of Mathematics, ideas from Realistic Mathematical Education (Freudenthal), the theoretical framework of the OECD PISA tests (Competence, Capabilities), the National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) of the United States (Principles and Standards for School Mathematics, 2000), and especially the Japanese lesson study (classroom strategy).

The pedagogical model is designed to address the over-arching goal of school mathematics: the development of a general Mathematical Competence, which is assumed as the ability to understand and use mathematical knowledge and capabilities in various contexts in people’s lives. There is a philosophical view here about the nature of mathematics and its teaching, formulated and developed by Ruiz for more than 20 years.

This general competence encompasses all aspects of mathematical knowledge and capabilities, and highlights the importance of higher-order cognitive capabilities that cut across all domains of school mathematics: Numbers, Geometry, Measurement, Relationships and Algebra, Statistics and Probability. The 2012 curriculum seeks to develop higher-order capabilities, or “processes”: to Reason and Argue, to Pose and Solve Problems, to Connect, to Communicate and to Represent. While there is a strong connection of these processes to the “processes” described by the NCTM, there are differences, which the book elaborates.

A key contribution of this book is its advancement of the pedagogical model in the 2012 curriculum. It provides a much stronger place for the “presentation of the problem” without taking away the three other steps. The first step is regarded as crucial for the building of learning. That is why it is articulated here as “selection-design-evaluation” of mathematical problems or tasks. This is one of the main ideas of the text. And here is precisely where Ruiz establishes the connection to assessment: both lesson development and assessment (classroom or applied to large populations) find a vital intersection in that “selection-design-evaluation”.

When the curricular purpose is to develop higher-order capabilities, this “selection-design-evaluation” must specify with sufficient care how those capabilities are drawn upon in the mathematical task. The Costa Rican curriculum includes three “levels of complexity” (“Reproduction”, "Connection", "Reflection") based more or less on the theoretical framework of OECD's PISA. Ruiz offers two theoretical models to evaluate these levels based on the five processes (higher-order capabilities). A complete model offers five criteria for this evaluation using 61 indicators of how the processes work (which are grouped into three levels according to their complexity). Another model, a simplified version, does it by one criterion for levels of complexity and 30 indicators. Based on this evaluation it is possible to approximate the level of complexity and the way in which the higher-order capabilities intervene in a problem. And this is central to developing a lesson or conducting an assessment. Until now there was no such detailed model in the international community of Mathematics Education to make that evaluation.

These models are complemented by a strategy to perform this "selection-design-evaluation", which is called "4 + 6", that contains 4 steps and 6 elements: (1) State the problem, (2) Solve the problem, (3) Identify the knowledge, skills and contexts present and (4) Evaluate processes and levels of complexity. The strategy assumes that mathematical tasks must be directly associated with specific curriculum elements; that is: these tasks must elicit use of the specific knowledge, skills, and higher-order capabilities that are to be developed or strengthened. In this sense, a problem or collection of tasks may serve specific curricular goals very little or a great deal. In this book, Ruiz promotes the idea that mathematics instruction and assessment are most effective when the use or design of mathematical tasks is integrally connected to the specific learning goals in the curriculum.

Furthermore, accurately anticipating the role of higher-order capabilities in a problem makes it then possible to gauge the performance students likely will have in relation to it: *a priori,* it will be known what skills and capabilities the task involves, and to what degree they are likely come into play in solving the problem.

This book also provides valuable information about Costa Rican educational policies in support of the current reform efforts. Unlike the United States, Costa Rica has national policies and curricula that must be implemented throughout its education system. In this book, Ruiz analyzes the relationships between the Costa Rican mathematics curriculum and its national curriculum policy adopted in 2016. He shows that there is complete congruence, and moreover, that this Mathematics curriculum paved the way for curricula in other subjects that also offer an emphasis on abilities for the 21st century. Costa Rica is an important example of how the consistency and complementarity of all the curricula that a country have can support the best educational development.

In order to support his proposals, Ruiz makes incursions into general theoretical subjects including Behaviorism, linear curricula (Tyler et al.), and educational taxonomies (Bloom et al.). He also analyzes the advantages and disadvantages of psychometric models in education and in particular in tests. The bibliography consulted is very broad and recent.

The final part of the book concentrates on the national tests used in Costa Rica for students to complete secondary education and also to access higher education. In essence, Ruiz questions the current model for the design and development of these tests, which is claimed to correspond to previous curricula designed "by content", with no emphasis on higher-order capabilities. Although the author finds limitations in these "content-focused" examinations, he recognizes that in the current scenario of Costa Rica it is not possible to eliminate them. Ruiz proposes a long-term vision to complement the "content-focused" national tests with better instruments of a different nature (in particular qualitative) that even include information and communications technologies (ICTs) as important advances are made to use them to assess higher-order capabilities. Nevertheless, he affirms that in the short term, above all, the examinations must be improved so that to the extent possible they will coincide with the characteristics of this Mathematics curriculum that emphasizes higher-order capabilities. Ruiz further states that this demand on the quality and relevance of the examinations should not be conceived only for the national tests, but for classroom assessments as well—which is absolutely essential if the goals of the 2012 curriculum are to be realized. Here is where the theoretical framework that includes models to evaluate mathematical tasks and the "4 + 6" strategy is invoked.

The proposals that Ruiz offers in this text advance elements for the international discussion on the design of mathematical tasks and the assessment. Although these approaches invite changes in education policy and official documentation in Costa Rica, a central dimension of this systemic improvement effort is the preparation of teachers. It is not possible for the ambitious goals in the 2012 curriculum to reach the classroom effectively without considering the initial training that teachers receive in universities and extensive, systemic professional development for current teachers. The text also proposes strategies to help the Costa Rican Mathematics Education community develop all the supports that these changes in curriculum and assessment require.

While there are quite a few differences between the educational scenarios in Costa Rica and the United States, there are important convergences in the essential elements of mathematics teaching and assessment that must be addressed to improve the quality of mathematics instruction and achieve the overarching goal that every student understands and can use mathematical knowledge and capabilities in various contexts in their lives.

For example, the Costa Rican pedagogical model and NCTM's effective mathematics teaching practices (NCTM, 2014) are very similar. So we have a common research-informed vision of effective instruction. Now the issue becomes, how do we make such instruction systemic—what is enacted in every classroom, every day.How can we develop teacher preparation and professional development that supports this kind of instruction? And, how can we design and implement an assessment system that includes both summative and classroom assessments that reflect the cognitive demands of the 21st century?

In this book, Ruiz provides extremely valuable analyses of mathematics curriculum, teaching and assessments, as well as specific recommendations and tools to address issues of pedagogy and assessments that prepare students for their futures. Reading it can enrich the work of researchers, academics, test designers, educational administrators, and teachers committed to the development of the highest quality Mathematics Education for each and every child. I highly recommend it.

Diane J. Briars

NCTM Past President (2014-2016)

References

Hattie, John, Douglas Fisher, Nancy Frey, Linda M. Gojak, Sara Delano Moore, and William Mellman. *Visible Learning for Mathematics, Grades K-12: What Works Best to Optimize Student Learning*. Thousand Oaks, CA: Corwin Press, 2017.

National Council of Teachers of Mathematics *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, Va.: NCTM, 2000.

National Council of Teachers of Mathematics. *Principles to Actions: Ensuring Mathematical Success for All*. Reston, VA: NCTM, 2014.

Evaluación y pruebas nacionales *para* un currículo de matemáticas que enfatiza capacidades superiores

Ángel Ruiz

Resumen

Se proporciona en este trabajo un marco intelectual que precisa y avanza algunas dimensiones del currículo de Matemáticas de Costa Rica para la enseñanza primaria y secundaria, aprobado por las autoridades competentes en 2012. Y especialmente brinda nuevos elementos teóricos para la gestión y evaluación de aula y las pruebas nacionales (que se realizan en ese país como requisito para poder completar la preparación escolar y acceder a la educación universitaria). Los elementos aportados son:

- Una propuesta de cinco contextos distintos para dar mayor precisión al eje disciplinar del currículo costarricense que formula la necesidad de desarrollar una contextualización activa.
- Un modelo para identificar habilidades y sus interacciones que incluye seis escenarios de interacción de las habilidades generales del currículo en las diversas áreas (en particular se plantea la participación simultánea de habilidades de diversas áreas matemáticas).
- Dos modelos para valorar la participación de los procesos o capacidades superiores y los niveles de complejidad que señala el currículo (reproducción, conexión y reflexión). El primer modelo formula 61 indicadores colocados en tres “grados” y cinco criterios para que, a partir de los procesos, se identifiquen los tres niveles de complejidad. Se ofrece también un modelo simplificado compuesto por un subconjunto de indicadores y un criterio para valorar niveles de complejidad.
- Una estrategia compuesta por cuatro pasos y seis elementos (que se denomina “4 + 6”) para la valoración de tareas matemáticas.
- Una estrategia nacional que incluye tres fases para elaborar en el país de manera colectiva tareas matemáticas consistentes con el nuevo currículo.

El marco intelectual subraya que el nuevo currículo de este país enfatiza las capacidades superiores y que esto debe reflejarse en todas las acciones educativas. Para fundamentar las propuestas se retoman asuntos más generales como teorías de aprendizaje, modelos curriculares, papel de las TIC, y nuevas perspectivas internacionales en el diseño de tareas matemáticas y en la evaluación. En particular se analiza en Costa Rica: la relación entre el currículo de Matemáticas y la política curricular oficial aprobada en el 2016; de igual manera, se estudia la documentación oficial de evaluación de los aprendizajes y el modelo de elaboración de pruebas nacionales. El trabajo plantea reformas radicales para la evaluación y las pruebas nacionales con perspectiva estratégica de futuro aunque señala énfasis y prioridades para el corto plazo.

Palabras clave

Currículo, Evaluación, Matemáticas, Enseñanza de las Matemáticas, Educación Matemática, Pruebas nacionales, Bachillerato, Innovación educativa, Diseño de tareas, TIC, Costa Rica.

A. Ruiz

Director *Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica*
Presidente *Comité Interamericano de Educación Matemática*
Director general *Red de Educación Matemática de América Central y El Caribe*
ruizz.angel@gmail.com / www.angelruizz.com / www.facebook.com/ruizz.angel

Recibido por los editores el 15 de marzo 2017 y aceptado el 15 de julio 2017.

Assessment and National Examinations *for* a Mathematics Curriculum that Emphasizes Higher-order Thinking

Ángel Ruiz

Summary

This work provides an intellectual framework that specifies and moves forward some dimensions of the Mathematics curriculum for Primary and Secondary Schools approved by the authorities of Costa Rica in 2012. And especially provides new theoretical elements for the classroom action and assessment, and for the national high-stakes examinations (the latter are carried out in this country as a requirement to complete High School and to access university education). These elements include:

- A proposal with five different contexts to give greater precision to the disciplinary axis of the Costa Rican curriculum that formulates the need to develop an "active contextualization".

- A model for identifying abilities and their interactions that includes six scenarios of interaction of general curriculum abilities in the various areas (in particular, the simultaneous participation of abilities from different areas in mathematical tasks).

- Two models to evaluate the participation of the higher-order processes or capabilities and the levels of complexity that the curriculum points out (reproduction, connection and reflection). The first model formulates 61 indicators placed in three "degrees" and five criteria so that the three levels of complexity established by the curriculum are identified. There is also a simplified model composed of a subset of indicators and a criterion for assessing levels of complexity.

- A strategy composed of four steps and six elements (called "4 + 6") for the appraisement of mathematical tasks once designed.

- A national strategy that includes three phases for collectively developing mathematical tasks in the country consistent with the new curriculum.

This intellectual framework underlines that the new curriculum of this country emphasizes higher-order capabilities and that this must be reflected in all the educative actions. In order to support the proposals, more general issues such as learning theories, curricular models, the role of ICT, and new international perspectives in the design of mathematical tasks and in assessment are considered. In particular, the relationship between the Mathematics curriculum and the official curricular policy of that country approved in 2016 is analyzed; in the same way, the official documentation for classroom assessment and the current model for the elaboration of national examinations are studied. The work proposes radical reforms for the large-scale national examinations and classroom assessment as well, although endowed with a strategic perspective seeking the future: it emphasizes short-term focus and priorities.

Keywords

Curriculum, Assessment, Mathematics, Mathematics Teaching, Mathematics Education, National Examinations, High School, Educational Innovations, Task Design, ICT, Costa Rica.

Introducción

En un texto del 2000 nos preguntábamos si en Costa Rica sería ¿posible empujar las Matemáticas y su enseñanza-aprendizaje con una estrategia política y social positiva? (Ruiz, 2000, p. 21). Una docena de años después, el 21 de mayo del 2012, el Consejo Superior de Educación de Costa Rica aprobó un nuevo currículo de Matemáticas para la enseñanza primaria y secundaria de este país. En tan solo cinco años se inició y avanzó una de las "revoluciones" más significativas de la educación costarricense. Los nuevos programas fueron diseñados a la vez con estándares de la mejor calidad internacional y con un fuerte sentido de pertinencia nacional, tratando de recuperar décadas de atraso curricular en esta asignatura. Tanto por su enfoque central de construcción de lecciones como por la imbricación original de sus componentes (competencia matemática general, procesos, niveles de complejidad, ejes disciplinares, contextualización, …) y sus enfoques específicos en cada área matemática, se ofreció un currículo que respondía, en particular, a las habilidades del siglo XXI declaradas por la UNESCO. Esta decisión abrió una nueva etapa histórica en las Matemáticas de ese país.

Este acto, sin embargo, se inscribía en una visión reformadora más amplia: no se trataba de hacer un currículo *in vitro* para luego ver cómo implementarlo en la realidad educativa del país; detrás había lo que se ha conceptualizado como una "perspectiva de la praxis" (Ruiz, 2013). Por eso se elaboraron recursos para los docentes dentro del mismo: desde un comienzo, cada "pedazo" curricular fue tamizado para intentar apoyar su implementación; se incluyeron más de 1600 "indicaciones puntuales" de apoyo a los docentes. Además, un proceso de capacitación docente se realizó en el 2011 antes de que los programas fueran aprobados. Con esa perspectiva se integró una batería de múltiples acciones muy innovadoras: gradualidad con programas transitorios (lo que nunca había sucedido), documentación de apoyo, planes piloto diagnósticos, cursos presenciales, bimodales y totalmente virtuales (Ruiz, 2013, 2015).

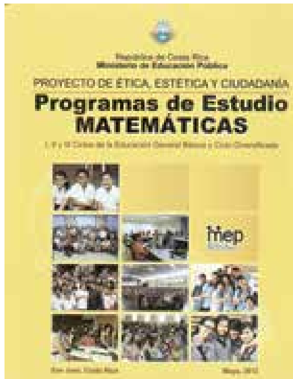


Ilustración1. El currículo costarricense de Matemáticas: portada de versión impresa

Los modelos nacionales de capacitación docente en Matemáticas que se ofrecían en ese país fueron trastocados drásticamente con una visión que hizo de las tecnologías de la comunicación un aliado poderoso. En Costa Rica, en 2011-2013 y 2015, se ofrecieron cursos bimodales en parte presenciales y en parte virtuales usando la plataforma Moodle (también se desarrollarán entre 2017 y 2019). Esto ya era novedoso en la capacitación ofrecida por el Ministerio de Educación Pública, donde no existía una tradición, continuidad ni plan comprehensivo de acciones de preparación docente, ni siquiera de tipo presencial (Morales-López, 2017). Las acciones reformadoras fueron más lejos: en 2014 y 2015 se ofrecieron cursos plenamente virtuales con la modalidad MOOC (de sus siglas en inglés *Massive Open Online Courses*), mediante la plataforma open edX (usada por muchas universidades norteamericanas y otras instituciones de vanguardia en el mundo). Los MOOC no son cursos a distancia o virtuales tradicionales, atienden poblaciones masivas y usan videos cortos como un medio privilegiado para desarrollar sus contenidos instruccionales. Esta modalidad ha tenido desde hace unos pocos años un *boom* en la comunidad educativa internacional. Costa Rica se ha convertido en vanguardia regional en el uso de este tipo de medios.

Pero las acciones siguieron: en el 2016 se creó REduMate, una *App* que permite conectar con todas las actividades de la reforma. Y ese mismo año se desarrollaron MOOC para que los estudiantes de la educación secundaria se prepararan en la prueba nacional de Matemáticas (más de 7000 se matricularon).

En el 2017: se ofrecieron MOOC para poblaciones estudiantiles en modalidades abiertas para apoyarles también con la prueba nacional de Bachillerato (“por madurez” y “ a tu medida”). Nada de esto tenía precedentes en el país.

Ilustración 2. App REduMate

Los trabajos que se han realizado en torno al uso de la virtualidad en Costa Rica no han pasado desapercibidos en el país ni tampoco en la comunidad internacional de Educación Matemática.

Esto se ha reconocido por entidades en Costa Rica como el Programa Estado de la Nación (*Quinto Informe del Estado de la Educación*, 2015).

En la comunidad internacional también, por ejemplo:

- en julio del 2014 el *International Congress of Mathematicians* (de la IMU) en Seúl, Corea del Sur, realizó una mesa redonda sobre MOOC donde se incluyó la experiencia de Costa Rica
- en setiembre del 2016 en *el International Congress of Mathematical Education* (ICMI, Hamburgo, Alemania) una sesión invitada sobre recursos virtuales consignó el trabajo en Costa Rica (aportado entre otros por el especialista español Salvador Llinares), y
- en ese mismo ICME se realizó una sesión conjunta del *Comité Interamericano de Educación Matemática* (CIAEM), el *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM) y el *Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica*.

Cuatro libros de editoriales internacionales reconocidas han incluido recientemente trabajos sobre la reforma de las Matemáticas en Costa Rica:

- Rosario, H., Scott., P. & Vogeli, B. (Eds.) (2015). *Mathematics and Its Teaching in the Southern Americas*. London: World Scientific Publishing.
- Planas, N. (Coord.). (2016). *Avances y realidades de la educación matemática*. España: Editorial Gaó.

- Martínez-Ruiz, X. & Camarena-Gallardo, P. (Coord.) (2015). *La educación matemática en el siglo XXI*. México: Instituto Politécnico Nacional.
- Ruiz, A. (Ed.). (2017). *Teacher preparation in Mathematics Education in Central America and the Caribbean. The cases of Colombia, Costa Rica, Dominican Republic and Venezuela*. Switzerland: Springer International Publishing.

En 2016 la famosa revista *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM Mathematics Education)*, editada por la editorial Springer, incluyó el artículo "Blended learning, e-learning and mobile in Mathematics education" que toma nota de los esfuerzos de vanguardia realizados en este país (Borba, Askar, Engelbrecht, Gadaninis, Llinares & Sánchez-Aguilar, 2016).

En la imagen de ZDM se puede apreciar un fragmento del sitio web del *Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica* donde se alojaron MOOC durante el año 2015.

Ilustración 3. Una imagen de un artículo internacional que reseña uso de virtualidad en cursos de la Reforma Matemática en Costa Rica

Los resultados de la reforma se han ofrecido directamente en eventos académicos de Alemania, Brasil, China, Colombia, El Salvador, España, Estados Unidos, Japón, México, Panamá, Perú, República Dominicana.

Para sostener las acciones en los cursos virtuales se creó en 2016 una campaña especial en las redes sociales: *Yo me apunto con Matemáticas*. Una característica relevante de las acciones de esta implementación curricular incluye el desarrollo de una dinámica comunidad virtual de Educación Matemática a través de un sitio web principal (www.reformamatematica.net), páginas web para cursos (cursos.reformamatematica.net, minimoocs.reformamatematica.net), páginas en

Facebook (ReformaMatematicasCostaRica, YoMeApuntoConMatematicas) y YouTube (reforma matematica cr, Yo me apunto con Matematicas).

La campaña usó como base el proyecto “Yo me apunto” desarrollado por el MEP de Costa Rica con el apoyo de UNICEF para lograr una retención mayor de jóvenes de secundaria en el sistema educativo (www.mep.go.cr/yo-me-apunto).

Ilustración 4. Yo me apunto

La innovación no se ha detenido: en la primera parte del 2017 se empezó a ofrecer una modalidad virtual aun más atrevida: colecciones de Mini MOOC, conjuntos de cursos compactos cortos que poseen las características de los MOOC pero que multiplican sus posibilidades de impacto colectivo. Un *Mini MOOC* es una unidad de aprendizaje relativamente pequeña, compacta, interactiva, dinámica, y diseñada para desarrollarse enteramente dentro de un entorno virtual. Los *Mini MOOC* tienen las mismas ventajas de los MOOC (*Massive Open Online Courses*): abiertos a todos los interesados, gratuitos, se pueden desarrollar con flexibilidad en el lugar y momento más convenientes para el participante. Incluyen diversos elementos multimediales, con un especial énfasis en videos. Su propósito es el aprendizaje y el desarrollo de habilidades y competencias.

Los *Mini MOOC* son:

- *Concisos*: se enfocan en un tema o conjunto pequeño de temas entrelazados.
- *Breves*: se pueden realizar en periodos cortos de tiempo.
- *Autosuficientes*: aportan todos los recursos necesarios para desarrollar sus temas.
- *Versátiles*: se puede realizar uno o un conjunto de ellos de la forma más conveniente para los usuarios.

Los *Mini MOOC* están organizados en *colecciones* por temas y propósitos educativos. (Véase http://cursos.reformamatematica.net)

Esto es único.

Ilustración 5. Mini MOOC: una original modalidad de ofrecer cursos virtuales

Para que este proceso haya sido posible se ha requerido de la voluntad de dos administraciones gubernamentales lúcidas (2010-2014 y 2014-2018): la primera abrió la ventana histórica para que entrara esta oportunidad, la segunda amplió significativamente el apoyo para que se avanzara a un ritmo más rápido y con mayor solidez.

No todo ha dependido de gobiernos, también ha resultado crucial el apoyo de organismos de la sociedad civil. Entre 2012 y 2016 la Fundación Costa Rica Estados Unidos para la Cooperación (CRUSA) dio su apoyo financiando al *Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica*, ejecutado administrativamente por la Fundación Omar Dengo (FOD). En el 2016 se sumó a este esfuerzo la Asociación Empresarial para el Desarrollo (AED), dentro de un convenio MEP-AED-CRUSA que en principio debería llegar hasta el 2021.

La Reforma de la Educación Matemática ha sido orientada y catalizada por un equipo de docentes en servicio y de investigadores de las universidades públicas. El ministro de Educación Leonardo Garnier (2006-2014) reconoció las calidades de este colectivo de académicos, en la presentación del currículo:

> Contamos con el apoyo externo de un equipo de expertos coordinado por Ángel Ruiz, que venían trabajando en las universidades y desde hace varios años en el tema de la enseñanza de las Matemáticas, que conocían bien las fortalezas y debilidades del sistema costarricense y que habían estudiado diversas experiencias exitosas en el mundo. (…). Fue un trabajo minucioso, sistemático y muy responsable. (MEP, 2012, p. 10)

Afirmó: “Con base en ello, y gracias al trabajo de un equipo de lujo de expertos externos al MEP – pero muy cercanos a los procesos de la enseñanza de las Matemáticas (…) hoy contamos con una propuesta que, sin duda, representa un salto muy importante en la enseñanza de las Matemáticas en Costa Rica" (p. 12). Véase también para más detalles sobre este equipo Morales-López (2017).

Esta reforma no es sin embargo producto solamente de este equipo humano: representa la expresión de una voluntad nacional que la identificó como un instrumento para apuntalar el progreso de este país.

Todas estas acciones no han quedado aisladas. Gracias en especial a la ministra Sonia Marta Mora (2014-2018) la reforma ha ejercido una influencia fuerte en el diseño e implementación de otros programas de estudio y en el sistema educativo en ese país. En el 2016, el Consejo Superior de Educación de Costa Rica aprobó una nueva *Política curricular* que debe cobijar todos los programas de estudio de este país (CSE, 2016), el cual, aunque con una perspectiva general, sintoniza plenamente con el currículo de Matemáticas. Esto es muy importante: la reforma matemática ha nutrido el marco curricular nacional.

Las universidades públicas de alguna manera ajustan sus programas de formación inicial al nuevo currículo (Ruiz & Barrantes, 2016). La Universidad de Costa Rica, por ejemplo, aprobó una nueva carrera que explícitamente propone esta sintonía para generar profesionales que impactarán el medio educativo (arrancó en el 2017 administrada por la Escuela de Matemática).

Resulta apenas pertinente consignar que bastante de esta reforma se había formulado desde hacía muchos años: "Es imprescindible lograr un fortalecimiento de las condiciones matemáticas de la población. Esto implica, entonces, un mejoramiento cualitativo de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas desde los primeros niveles hasta los últimos" (Ruiz, 2000, p. 107). Varias de sus orientaciones fueron delineadas desde entonces:

> Esto debe hacerse con una aproximación educativa que corresponda mejor a las condiciones culturales y psicológicas de la población. Debe ser una enseñanza que afirme el método heurístico, lo intuitivo, lo empírico, lo contingente, lo inacabado, lo falible, lo real de las matemáticas. Esta enseñanza debe hacerse relacionada con la enseñanza de las otras ciencias y la tecnología. Y debe asumir las lecciones de la experiencia internacional y las consecuencias prácticas que la reflexión moderna ofrece: las mejores perspectivas epistemológicas y filosóficas de la actualidad deben nutrir nuestros planes en la educación matemática nacional. (p. 107)

Desde su gestación intelectual no se pensó en una colección de parches para un currículo inadecuado, se concibió, más allá de un texto, como una reforma completa que tocaría muchos pliegues nacionales y que invocaría actores diversos: "Hacer esto, dadas las limitaciones y obstáculos que existen, constituiría una auténtica reforma que afectaría muchos planos de la vida nacional, y los protagonistas requeridos se escaparán indudablemente de las fronteras de la misma comunidad matemática" (p. 107).

Pensando entonces en el largo plazo se afirmaba que existía: "la oportunidad, justificación, y conveniencia nacional para una inversión de gran nivel en las Matemáticas. Por supuesto esto es un asunto político y que exige consenso cultural en el país" (pp. 19-20). Con claridad de propósitos: " (…) un ambicioso plan nacional que fortalezca las ciencias, la tecnología y las matemáticas que hagan sostenible, perdurable, el proyecto de la alta tecnología y, tal vez, este nutra el desarrollo en Costa Rica" (p. 19).

¿Por qué Matemáticas? Porque: "enfrentar el desafío de la educación matemática hoy puede ser una de esas tareas medulares que sirvan como pivote nacional para dotar a las nuevas generaciones de costarricenses de la educación de calidad que demanda el nuevo momento histórico" (p. 18).

La Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica no fue un acto casual o un disparo accidental de un ministro, sino un propósito rigurosamente pensado en sus componentes intelectuales más generales desde hace mucho tiempo. Por supuesto, no fue sino hasta el periodo que va de octubre del 2010 a mayo del 2012 que se decantaron los centenares de ideas y detalles que finalmente integraron el currículo (un proceso de elaboración colectiva con un insumo relevante de la comunidad nacional de enseñanza de las matemáticas). De igual forma: las estrategias específicas de documentación o recursos de apoyo así como la naturaleza de todos los cursos (el extraordinario papel de las TIC) fueron diseñadas, ajustadas y rediseñadas desde el 2011 en un dinámico proceso, viviente, que aun no termina.

La reforma matemática ha caminado dentro de un escenario donde el resultado de sus acciones ha dependido no solo del deseo y la habilidad de sus catalizadores, también de las circunstancias institucionales y sociales existentes, aportando un rostro de realidad a cada una de ellas. No siempre ha ocurrido lo que se ha deseado obtener, pero sí lo que era posible. El contexto de un país en vías de desarrollo, con cuellos de botella diversos, jalona inevitablemente los propósitos originales, los remodela. Pero dentro de este abigarrado proceso: el avance reformador ha sido notorio.

La respuesta a la interrogante con que iniciamos esta presentación es claramente afirmativa. Sin embargo aun "no se ha terminado de cruzar el río". Faltan muchos pasos por dar. Es una reforma que debe verse en un plazo de largo aliento, en el tiempo generacional. Siempre se ha concebido así. Y eso tiene consecuencias. Algo menos complejo y exigente socialmente, más breve, habría sido más fácil.

En un camino largo inevitablemente algunos de sus protagonistas salen del proceso, otros modifican su papel. Enemigos acérrimos del cambio se han ido o se irán, lo que es bueno, pero todo tiene su contraparte: también lo han hecho y harán personas muy valiosas que han aportado mucho a esta reforma tan demandante. Algunos nuevos ingresarán tratando de empujar sus propias ideas o agendas, que podrían potenciar la reforma, lo que será bueno, pero también puede haber contrapartes: podrían debilitarla. Esa es la consecuencia de que ya no se trata de un conjunto de ideas y propósitos de un grupo de personas, sino una realidad propia que ha mordido el tejido histórico de la sociedad.

La Reforma de las Matemáticas en Costa Rica se ha desarrollado hasta ahora en dos etapas colocadas cronológicamente así: (i) periodo 2010 a 2015 y (ii) a partir de 2016. La primera incluyó la elaboración y aprobación oficial de los programas nuevos y el desarrollo de materiales y capacitaciones docentes sobre los aspectos fundamentales del currículo (fundamentos, ejes, enfoque principal). En la segunda se han introducido cambios en el diseño y aplicación de las pruebas nacionales de Bachillerato, se extienden y profundizan las capacitaciones docentes y se proporcionan recursos virtuales a estudiantes tanto para preparar para las pruebas nacionales como para apoyar los aprendizajes que consigna el currículo. En la primera etapa se enfatizó la estrategia de aula que privilegia el currículo, una familiarización con los contenidos curriculares novedosos, en particular tópicos nuevos o tratados con otra perspectiva.

Ilustración 6. Dos etapas de la Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica: 2010-2015, 2016-

Cuando se aprobó el nuevo currículo no se incluyó un apartado muy extenso sobre evaluación, apenas unas cuantas apreciaciones generales y tampoco se introdujeron elementos de evaluación luego de la introducción de contenidos, esto último en abierta ruptura con currículos que sufrieron la influencia de esquemas lineales. Las razones para no introducir consideraciones más específicas de evaluación obedecieron por un lado a que no había condiciones para llegar a un consenso institucional sobre cómo plantearla, y se consideró que lo central en ese momento era lograr la aprobación del currículo; por otra parte, porque se consideró que antes se debía avanzar en la implementación para conseguir un punto social de “no retorno” que permitiera empujar otras dimensiones de la reforma que inevitablemente ejercerían nuevas tensiones en el cuerpo institucional.

Desde un inicio se consideró que esta reforma debía realizarse de manera gradual en sus múltiples aspectos.

En el currículo costarricense de Matemáticas del 2012 se establecieron cinco capacidades cognitivas que denominamos "superiores", asociadas a cinco procesos matemáticos (podrán verse más detalles en la primera parte de este documento o en MEP, 2012, pp. 25-29). Estas son transversales a las áreas matemáticas; aunque se plantean a partir de conocimientos específicos en un nivel educativo, son independientes de esas circunstancias. Puesto de otra manera: estas capacidades son *grosso modo* las mismas que actúan en la Educación Primaria y Secundaria y también Superior, solo que con características muy diferentes en cada nivel. Este tipo de capacidades se pueden plantear no solo como se hizo en Costa Rica, sino de otras maneras, un ejemplo son las siete "capacidades fundamentales" que usa la OCDE en las pruebas PISA (que fueron llamadas *competencias* en otros momentos). Estos procesos-capacidades se enmarcan dentro de una perspectiva para la formación escolar: desarrollar una competencia matemática general, concebida como una colección de condiciones para comprender y usar las Matemáticas en diversos contextos individuales y sociales. El papel de las capacidades superiores distancia a este currículo de los anteriores en Costa Rica.

Diversas fuentes revelan que la mayor parte de la evaluación que hasta ahora se realiza en el país no incorpora las capacidades superiores, algo que acontece también en varias partes del mundo.

En el siglo XXI se han dado diversas reformas curriculares en países de la OCDE que subrayan la incorporación de capacidades superiores transversales, estos se han dado en escenarios de competencia, auditoría y rendición de cuentas. Véase Klenowsky & Carter (2016, pp. 790-792). Sin embargo, las reformas no han generado cambios sustanciales en la evaluación que sigue haciéndose enfocada en un conjunto estrecho de conocimientos y habilidades (Nusche, 2016, p. 839).

¿Cómo debería ser la evaluación en el marco del currículo costarricense de Matemáticas? ¿Cómo potenciar la convergencia y congruencia entre las acciones evaluativas en las aulas con aquellas de gran escala aplicadas a conglomerados muy grandes de la población? Contestar esas preguntas es el propósito de este trabajo. Aunque de una manera amplia nos abocaremos a brindar una orientación básica y a delinear un marco teórico que ayude a nutrir nuevos procesos de construcción intelectual en esa dirección, el énfasis en esta parte será la evaluación en general y la de aula en particular, en la tercera parte brindaremos mayor énfasis a las pruebas nacionales. No obstante, como consideramos que las diversas formas de evaluación educativa deben ser congruentes entre sí, en el análisis incluiremos aspectos de todas ellas.

Este trabajo está compuesto por tres partes: las capacidades en el currículo nacional, la evaluación para el currículo costarricense de Matemáticas, y pruebas nacionales congruentes con el currículo. En la primera se sintetizan varios elementos del currículo de Matemáticas en relación especial con competencia matemática general, capacidades cognitivas superiores, contextualización activa, actitudes y creencias positivas sobre las Matemáticas y su enseñanza y el enfoque de resolución de problemas (el cual se formula como selección o diseño apropiado de tareas matemáticas).

En esta parte se aportan cinco elementos teóricos novedosos con base en el currículo oficial:

- Una propuesta de 5 contextos distintos para dar mayor precisión al eje disciplinar del currículo costarricense que formula la necesidad de desarrollar una contextualización activa.
- Un modelo para identificar habilidades y sus interacciones que incluye 6 escenarios de interacción de las habilidades generales del currículo en las diversas áreas (en particular se plantea la participación simultánea de habilidades de diversas áreas matemáticas).
- Dos modelos para valorar la participación de los procesos o capacidades superiores y los niveles de complejidad que señala el currículo (reproducción, conexión y reflexión). El primer modelo formula 61 indicadores colocados en 3 "grados" y 5 criterios para que, a partir de los procesos, se identifiquen los 3 niveles de complejidad. Se ofrece también un modelo simplificado compuesto por un subconjunto de indicadores y un criterio para valorar niveles de complejidad.
- Una estrategia compuesta por cuatro pasos y seis elementos (que se denomina "4 + 6") para la valoración de tareas matemáticas una vez diseñadas.

Una sección especial suministrará ejemplos de cómo realizar una valoración de las tareas matemáticas con base en la estrategia "4 + 6".

En una segunda parte se hace un análisis de algunas dimensiones de la evaluación (formativa, sumativa), se propone dotar a la formativa de un lugar importante pero dentro de un equilibrio de todas las dimensiones, así como se reconoce la necesidad de utilizar una batería más amplia de instrumentos de evaluación cuando entran en juego las capacidades superiores. Se incluye una valoración de algunas teorías del aprendizaje y del diseño de currículos por objetivos y lineales, mostrando que han tenido influencia en el diseño curricular costarricense.

Otra sección muestra las semejanzas y diferencias entre los términos “objetivos” y “habilidades” que fueron acuñados respectivamente en los currículos de Matemáticas de 2005 y 2012. Esto permitirá visualizar muy bien algunas de las distancias que los nuevos programas poseen en relación con los anteriores.

Una de las premisas más importantes de este marco teórico es asumir el diseño de las tareas matemáticas como el denominador común de tres dimensiones: evaluación de aula, pruebas nacionales y acción de aula, y propone como un factor crucial la valoración de sus elementos curriculares constitutivos (aquí se retoma la estrategia “4 + 6”).

Luego de una incursión en la temática del diseño de tareas matemáticas dentro del marco internacional más amplio, se propone una estrategia de tres fases para el progreso en el país de tareas con base en el currículo.

Para contribuir a la reflexión nacional en forma muy detallada, en esta parte se analiza la reglamentación costarricense en cuanto a la evaluación de aula; la conclusión más general es que se deben realizar algunas modificaciones para generar una mayor sintonía con el currículo de Matemáticas.

En esta parte se ofrecerá la fusión de dos perspectivas que se deben seguir: una de carácter estratégico y para el largo tiempo que incluso invoca un uso intenso de las TIC, otra de corto plazo. Se subrayará la relevancia de enfatizar la elaboración de pruebas.

La tercera parte analiza el modelo de elaboración de pruebas nacionales en primer término desde una perspectiva general, que incluye una incursión en las visiones que la comunidad internacional de Educación Matemática tiene sobre las debilidades y posibilidades de los enfoques psicométricos en la evaluación.

Se mostrará cómo el modelo nacional existente de elaboración de las pruebas nacionales no responde adecuadamente al currículo de Matemáticas; en particular se concluirá que la “tabla de especificaciones” y el proceso de “ponderación” que actualmente se usan no son medios apropiados o congruentes con este currículo o incluso con otros que asuman con énfasis capacidades superiores, e interrelaciones múltiples no lineales entre sus habilidades y acciones. En general se propone una reforma drástica del modelo. Como detalle particular se sugieren instrumentos distintos a la comunidad educativa y a aquella de constructores de las pruebas: colecciones de ejemplos que muestren con diferente profundidad los elementos curriculares que serán incorporados en las pruebas.

En esta parte se sistematizan siete dimensiones que es conveniente se incluyan en el diseño de la prueba nacional de Matemáticas; en esencia se subraya la importancia de tomar en cuenta todos los elementos curriculares, así como un formato que incorpore de manera creciente más ítems de respuesta construida.

Se afirma, dentro de una perspectiva histórica futura, la necesidad de usar de manera más agresiva las TIC tanto en la evaluación como en pruebas nacionales (de distinta manera).

Este trabajo dibuja una visión integrada de largo plazo para la evaluación y las pruebas nacionales en Costa Rica pero de manera pertinente para el escenario nacional actual. En particular plantea que aunque se deba tener la perspectiva de largo aliento, es prioritario en el corto plazo darle prioridad a una elaboración de pruebas en el aula y de pruebas nacionales con una mayor correspondencia con el currículo vigente.

El trabajo sostiene que en la etapa que atraviesa la reforma de la Educación Matemática en este país es decisivo brindar atención a la evaluación, que se afirma como un factor necesario para seguir realizando progresos en esta implementación curricular.

Se afirma en este trabajo que si bien mostrar buenos desempeños en las pruebas PISA de la OCDE sería positivo, la clave para que eso suceda en esas pruebas comparativas internacionales o en cualesquiera, descansará en el progreso de la implementación del currículo de Matemáticas.

Introduction

In[2] 2000 we asked if in Costa Rica it would be … possible to promote Mathematics and its teaching and learning with a positive political and social strategy? (Ruiz, 2000, p. 21). A dozen years later, on May 21, 2012, Costa Rica's Higher Council on Education approved a new elementary and secondary curriculum for Mathematics in the country. In only five years one of the most significant "revolutions" in Costa Rican education has been initiated and advanced. The new programs were designed on the one hand with the standards of the highest international quality and on the other hand with a strong sense of national relevance, while attempting to rescue the country from decades of curricular lag in Mathematics. Because of the central focus on lesson construction, the original way that various components (general mathematical competence, processes, complexity levels, disciplinary axes, contextualization, ...) interconnected, and the specific approaches to each mathematical topic, a curriculum is provided that responds to the 21st Century Skills declared by UNESCO. This has begun a new stage in the Mathematics history of the country.

Nevertheless, this stage has been written in a larger vision of reform. It is not a matter of writing an in vitro curriculum that later needs to be implemented in the country's educational reality. Instead, the background has been conceptualized from a "praxis perspective" (Ruiz, 2013). Therefore, teacher resources have been developed from that perspective. Part of the curriculum was carefully chosen so that its implementation could be supported. There are more than 1600 "precise suggestions" and examples. Also, in 2011 even before the program was approved there was a process of teacher professional development. From that perspective, an innovative and integrated battery of multiple actions was introduced: gradually introduced transition programs (something that had never been tried with previous new curricula), support documents, diagnostic pilot plans, face-to-face, blended (hybrid) and totally virtual courses (Ruiz, 2013, 2015.).

---

2 La traducción al inglés de la introducción fue realizada por el Dr. Patrick Scott, Profesor Emérito de la University of New México, Estados Unidos.

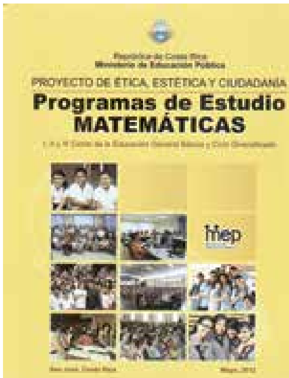


Illustration 1. The Costa Rican Mathematics Curriculum; front-page of the paper edition

The national models for teacher professional development in Mathematics were drastically impacted by a vision that adopted communication technologies as a powerful ally. In Costa Rica in 2011-2013 and 2015 blended courses were offered were half face-to-face and half online using the Moodle platform (development will continue from 2017 to 2019). This was innovative for the Ministry of Public Education where a tradition of continuity and comprehensive action plans for teacher development did not exist (Morales, 2017). The reform actions went even farther: in 2014 and 2015 completely virtual courses were offered as MOOC (*Massive Open Online Courses*) by means of the open platform edX (used by many North American universities and other vanguard institutions in the world). MOOC are not traditional distance or virtual courses. They engage massive populations and use short videos as the main method for developing the instructional content. There has been a boom in the use of MOOC over the past few years. Costa Rica has become the regional vanguard in the use of this type of media.

Illustration 2. App REduMate

There have been even more actions. In 2016, an app called REduMate was created that gives access to all the reform activities. And that same year MOOC were developed to help prepare high school students for the national Mathematics examinations (more than 7000 enrolled).

In 2017, MOOC were offered to students who want to receive a high school diploma similar to a GED in the United States. There was no precedent for any of this in the country.

The work that has been done on the use of virtuality in Costa Rica has not gone unnoticed in the country nor in the international community of Mathematics Education.

This has been recognized by local entities such as the State of the Nation Program (*Quinto Informe del Estado de la Educación*, 2015) in Costa Rica.

By the international community, for example:

- In July of 2014 at the *International Congress of Mathematicians* of the International Mathematical Union in Seoul, South Korea, had a roundtable discussion on MOOC that included the Costa Rican experience.
- In July of 2016 the *International Congress on Mathematical Education* of the International Commission on Mathematical Instruction in Hamburg, Germany, an invited session on virtual resources referenced the work in Costa Rica (particularly presented by the Spanish specilist Salvador Llinares).
- In that same ICME there was a joint session of the *Inter-American Committee of Mathematics Education*, the National Council of Teachers of Mathematics and the project Mathematics Education Reform in Costa Rica.

Four books from renowned international publishers have recently included articles on the Math reform in Costa Rica:

- Rosario, H., Scott., P. & Vogeli, B. (Eds.) (2015). *Mathematics and Its Teaching in the Southern Americas*. London: World Scientific Publishing.
- Planas, N. (Coord.). (2016). *Avances y realidades de la educación matemática*. España: Editorial Gaó.
- Martínez-Ruiz, X. & Camarena-Gallardo, P. (Coord.) (2015). *La educación matemática en el siglo XXI*. México: Instituto Politécnico Nacional.

- Ruiz, A. (Ed.). (2017). *Teacher preparation in Mathematics Education in Central America and the Caribbean*. The cases of Colombia, Costa Rica, Dominican Republic and Venezuela. Switzerland: Springer International Publishing.

Illustration 3. An image of an international article that includes the use of virtual-learning in Costa Rican Mathematics Reform

Another button: in 2016 the famous *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM Mathematics Education)*, edited by Springer, included the article "Blended learining, e-learning and mobile in Mathematics education" that takes note of the avant-garde efforts made in this country (Borba, Askar, Engelbrecht, Gadaninis, Llinares & Sánchez-Aguilar, 2016).

In the previous ZDM's image you can see a fragment of the website of the Reform of Mathematics Education in Costa Rica Project where MOOC were hosted during the year 2015.

The results of the reform have been presented directly in academic events in Brazil, China, Colombia, Dominican Republic, El Salvador, Japan, Mexico, Panama, Peru, Spain, United States.

To support the actions in the virtual courses in 2016 a special campaign was created in the social networks: Yo me apunto con Matematicas. A relevant feature of the actions of this curricular implementation includes the development of a dynamic Virtual Mathematics Education Community through a main website (www.reformamatematica.net), web pages for courses (cursos.reformamatematica.net, minimoocs.reformamatematica.net), Facebook pages (ReformaMatematicasCostaRica, YoMeApuntoConMatematicas) and YouTube (reforma matematica cr, Yo me apunto con Matematicas).

The campaign used the “Yo me apunto” project developed by the MEP of Costa Rica with the support of UNICEF to achieve a greater retention of secondary school students in the education system (www.mep.go.cr/yo-me-apunto).

Illustration 4. Yo me apunto

The innovation has not stopped. In early 2017, a new even bolder virtual modality began to offered: collections of Mini MOOC, sets of compact short courses that possess the characteristics of MOOC but that multiply the possibilities for collective impact.

A Mini MOOC is a unit of learning that is relatively small, compact, interactive, dynamic and designed to be developed entirely in a virtual context. Mini MOOC have the same advantages of regular MOOC: open to everyone who is interested, free, can be developed with flexibility in the place and moment that is most convenient for the participant. They include diverse multimedia elements, with a special emphasis on videos. Their purpose is the learning and the development of abilities and competencies.

Mini MOOC are

- *Concise*: they are focused on a topic or a small set of interconnected topics.
- *Brief*: they can be completed in short periods of time.
- *Self-sufficient*: they provide all the necessary resources to develop their topics.
- Versatile: one or a set of them can be done in the way that is most convenient to the user.

Mini MOOC are organized in collections by topics and educational purposes. (See http://cursos.reformamatematica.net)

This is unique.

Illustration 5. Mini MOOC: an original modality to deliver virtual courses

To make this process possible has required the will of two enlightened governmental administrations (2010-2014 and 2014 to 2018). The first opened an historic window for this opportunity. The second significantly broadened the support so that advancement could be more rapid and more firmly established. But not all the progress depended on the government.

There has also been crucial support from organizations in the civil society. Between 2012 and 2016 the Costa Rica United States Cooperation Foundation (CRUSA) gave their support to the Costa Rica Mathematics Education Reform Project, administered by the Omar Dengo Foundation (FOD). In 2016, the Business Development Association (AED) joined the effort, within an agreement MEP-AED-CRUSA that should last until 2021. The Mathematics Education Reform, which has been guided and catalyzed by a team of in-service teachers and researchers from the public universities.

Minister Leonardo Garnier recognized the qualities of this collective of academics in presenting the curriculum:

> We count on the external support of a team of experts coordinated by Angel Ruiz, that have been working in the universities for many years on the teaching of Mathematics. They know well the strengths and weaknesses of the Costa Rican system and have studied diverse successful experiences from around the world. (…) It was meticulous, systematic and very responsible work. (MEP, 2012, p. 10)

He said: "…thanks to the work of the deluxe team of experts external to the MEP – but very close to the processes of teaching Mathematics … today we have a proposal that, without a doubt, represents a very important leap forward in the teaching of Mathematics in Costa Rica" (p. 12). See also for more details about this academics Morales-López (2017).

This reform is not the result of this team: it is the expression of a national will that has identified it as an instrument to underpin the nation's progress.

None of these actions has remained isolated. Thanks in particular to Sonia Marta Mora, the Minister of Education, the reform has had a strong influence on the design and implementation of other programs of study. In 2016, the Costa Rican Higher Council of Education approved a new Curricular Policy that should cover all the curricula in this country (CSE, 2016), which, although with a general perspective, fully tune with the Mathematics curriculum. This is very important: mathematical reform has nurtured the national curriculum framework.

The public universities in one way or another have adjusted their pre-service teacher preparation programs to the new curriculum (Ruiz & Barrantes, 2016). The University of Costa Rica, for example, approved a new pre-service program that explicitly proposes a connection to the new curriculum to prepare professionals that will have an impact on the educational environment (it began in 2017 and is administered by the School of Mathematics).

It is necessary to indicate that much of the reform had been formulated many years ago. "It is absolutely necessary to strengthen the mathematical condition of the population. This, therefore, implies a qualitative improvement in the teaching and learning of Mathematics from the lowest grades to the last" (Ruiz, 2000, p. 107). Various of the reform orientations had long been delineated.

> This should be done with an educational approach that corresponds better to the cultural and psychological conditions of the population. Teaching should affirm the heuristic method, the intuitive, the empirical, the contingent, the unfinished, the fallible, the real of mathematics. Teaching of Mathematics should be related to the teaching of other sciences and technology. And it should consider lessons from international experience and the practical consequences that a modern reflection offers: the best current epistemological and philosophical perspectives should nurture our national plans for Mathematics education. (p. 107)

From its intellectual gestation, a collection of patches leading to an inadequate curriculum was not being considered. Much beyond a text, a complete reform that touched many national layers and involved diverse participants was conceived. "To do this, given the limitations and obstacles that exist, would constitute an authentic reform that would affect many levels of the national life, and the required protagonists would undoubtedly be from beyond the borders of the Mathematics community" (p. 107).

Long-term thinking has affirmed that there exists ·"the national opportunity, justification and advisability to make a large investment in mathematics. Of course, this is a political matter and needs a cultural consensus in the country" (p. 19-20). With clarity of purpose: this is "… an ambitious national plan that strengthens the sciences, technology and Mathematics to make them sustainable, lasting, projecting high technology and, perhaps, nurturing development in Costa Rica” (p. 19).

Why Mathematics? Because “to face the challenge of Mathematics education today may be one of those fundamental tasks that serve as a national pivot point that endows the new Costa Rican generations with the quality of education that is demanded by the new historical moment” (p. 18).

The Mathematics Education Reform in Costa Rica was not a casual act or an incidental effort of a Minister, but a proposal with its most general intellectual components rigorously planned quite a while ago. Of course, it was not until the period between October of 2010 and May of 2012 that the hundreds of ideas and details that had been were unloaded were integrated into the curriculum. (It was a process of collective elaboration with relevant input from the national Mathematics teaching community.) Likewise, the specific documentation strategies or support resources as well as the nature of all the courses (with an extraordinary role for ICT) were designed, adjusted and redesigned beginning in 2011 in a dynamic, living process that has not yet ended.

The Mathematics reform has made its way through a scenario where the result of its actions has depended not only on the wishes and ability of its developers, but also on the existing institutional and social circumstances. What was desired has not always been obtained, but what was possible has been realized. In the context of a developing country, with diverse bottlenecks, the original purposes are inevitably staked out and remodeled. But within this disjointed process, the advancement of reform has been obvious.

The answer to the question with which we began this introduction is clearly affirmative. Nevertheless, we have yet “to finish crossing the river”. Many steps must still be taken. It is a reform that should be seen in the long term, the timeframe is generational. It has always been conceived that way. Something socially less complex and demanding, shorter, would have been easier.

On a long journey, some of the protagonists will inevitably leave the process, others will modify their roles. All-out enemies of the change will come and go, which is good, but everything has its counterpart: there have also been and will be very valuable persons that have given much to this so demanding reform. Some new participants will enter trying to push their own ideas and agendas. That can empower the reform, but, as everything has its counterpart, it can also weaken it. That is the consequence of what is no longer a set of ideas and purposes of a group of persons, but a reality that has torn the fabric of society.

Illustration 6. Two stages of the Reform of Mathematics Education in Costa Rica: 2010-2015, 2016-

The Reform of Mathematics in Costa Rica has up to now been developed in two stages: (i) 2010 to 2015 and (ii) since 2016. The first stage included the writing and official approval of the new curriculum, the development of materials and the professional development of teachers on the fundamental aspects of the curriculum (foundations, strands, main focus). In the second stage changes in the design and application of national high school examination have been introduced, the teacher professional development activities have been extended and strengthened, and virtual resources have been provided to students both to help them prepare for the testing and to support the kind of learning manifest in the curriculum. In the first stage, classroom strategies to support the curriculum, and a familiarity with the new curricular content, in particular, new topics or those approached from a new perspective were emphasized.

When the new curriculum was approved, there was not much mention of assessment, just a few general comments. Neither were elements of assessment presented after introduction of content, in an obvious break with curriculum influenced by linear schemes. The reasons for not presenting more specific considerations on assessment were because, on the one hand, there were not conditions to arrive at an institutional consensus on how to proceed and what was considered central at the time was the approval of the curriculum. On the other hand, it was believed that the implementation should be advanced to a social "point of no return" that would permit promoting other dimensions of the reform that would inevitably bring new institutional tensions. From the beginning an important consideration was that the many aspects of the reform should be realized gradually

The Costa Rican Mathematics curriculum of 2012 established five cognitive capabilities that we called "higher-level" and were associated with five mathematical processes. (Details can be found at the beginning of this document or in MEP, 2012, pp. 25-29.) The higher-level cognitive capabilities and the mathematical processes cut across all mathematical topics, and, although they are based on specific knowledge at an educational level, they are also independent.

Diverse sources reveal that most of the assessment that has been realized in the country up until now has not incorporated higher-level capabilities, something that is also evident in other parts of the world.

In the 21st century there have been diverse curriculum reforms in the OECD countries that have highlighted the incorporation of cross-cutting higher-level capabilities, although presented in contexts of competition and accountability. See Klenowsky & Carter (2016, pp. 790-702). Nevertheless, the reforms have not generated substantial changes in the associated assessments which are still focused on a narrow set of knowledge and abilities (Nusche, 2016, p. 839).

What kind of assessment should there be for the Costa Rican Mathematics curriculum? How can a convergence and congruence be promoted between classroom assessment and large-scale assessment applied to large groups of the population? Answering that question is the goal of this document. Although in a broad sense the focus will be on providing a basic orientation and delineating a theoretical framework that will help to nurture new processes of intellectual construction in that direction, the emphasis in this part will be assessment in general and classroom assessment in particular. In the third part, greater emphasis will be given to the national examinations. However, even though it is considered that the various forms of educational assessment should be congruent with each other, an analysis of aspects of each will be included.

Put another way, these capabilities are the same, grosso modo, at the elementary and secondary, and even higher education, levels. They have very different characteristics at each level. This type of capabilities has not only been presented as was done in Costa Rica, but, in other ways. An example is the seven “fundamental capabilities” used by OECD for the PISA examinations (that have also been called competencies at times). These processes-capabilities are framed within a perspective within school-based education: developing a general mathematical competency, conceived of as a collection of conditions for understanding and using Mathematics in diverse individual and social contexts. The role of higher-level capabilities is what sets this curriculum apart from its predecessors in Costa Rica.

This document consists of three parts: the capacities in the national curriculum, the assessment of the Costa Rican Mathematics curriculum, and the national assessments aligned to the curriculum. In the first, various elements of the Mathematics curriculum in special relationship to general mathematical competencies, higher-level cognitive capabilities, active contextualization, positive attitudes and beliefs about Mathematics and its teaching, and a focus on problem solving (which is conceived of as the appropriate selection or design of mathematical tasks) will be synthesized.

In the first part, five innovative theoretical elements are presented that are based in the official curriculum:

A proposal of 5 distinct contexts that bring more precision to the axis of a "active contextualization" promoted by the Costa Rican curriculum.

A model for the identification of abilities and their interactions that includes 6 scenarios of interaction of general curriculum skills in the various areas (in particular, the simultaneous participation of abilities from different mathematical areas).

Two models to evaluate the participation of the higher-order processes or capabilities and the three levels of complexity that the curriculum points out (reproduction, connection and reflection). The first model formulates 61 indicators placed in 3 "degrees" and 5 criteria so that, from the processes, the 3 levels of complexity are identified. There is also a simplified model composed of a subset of indicators and a criterion for assessing levels of complexity.

A strategy consisting of four steps and six elements (called "4 + 6") for judging mathematical tasks once designed.

One special section will provide examples of how mathematical tasks are judged based on the "4 + 6" strategy.

The second part presents an analysis of some of the dimensions of the assessment (formative, summative). It is proposed that formative assessment will have an important place within the equilibrium of all the dimensions. Also, the need to use a greater battery of assessments instruments is recognized when higher-level capabilities are brought into play. A consideration of various learning theories and the design of curriculum by objectives will be included, showing the influence they have had in the design of the Costa Rican curriculum.

In order to contribute to a very detailed national reflection, in this part the Costa Rican classroom assessment regulations are analyzed. The most general conclusion is that some modifications should be made to bring closer alignment with the Mathematics curriculum.

One of the most important premises of this theoretical framework is to take on the design of the mathematical tasks as the common denominator of the three dimensions: classroom assessment, national examinations and classroom action, and proposing as a crucial factor the judging of the constitutive curricular elements (here the "4 + 6" will be considered again).

After an excursion into the design of the mathematical tasks within the broader international framework, a three-phase strategy for progress in the country with respect to the mathematical tasks based on the curriculum is proposed.

Another section shows the similarities and differences between the terms “objectives” and “abilities” as they were used respectively in the Mathematics curricula of 2005 and 2012. Thus, it is possible to visualize quite well some of the distance that exists between the new programs in relation to previous programs.

In this part will be offered the fusion of two perspectives that must be followed: one of strategic character and for the long run that even invokes an intense use of the ICT, another one of short term. Emphasis will be placed on emphasizing the elaboration of tests.

The third part analyzes the model for the development of the national examinations. It begins with a general perspective that includes a look at the various perspectives that the international Mathematics Education community has on the weaknesses and possibilities of psychometric approaches in assessment.

It will be shown how the existing national model for the development of national examinations does not respond adequately to the Mathematics curriculum. In particular, it will be shown that “specification tables” and the “weighting” process that are currently used are neither appropriate nor congruent means for this curriculum or others that assume an emphasis in higher-level capabilities and multiple nonlinear interrelationships between abilities and actions. In general, a drastic reform of the model is proposed. As a particular detail, different instruments are suggested for the educational community and test developers: collections of examples that show with a different depth the curricular elements that will be incorporated into the examinations.

In this part seven dimensions that should be included in the design of the national Mathematics examination will be systematized. In essence, the importance of taking into account all the curricular elements will be underscored, as well as a format that incorporate an increasing number of constructed response test items.

The need to use ICT in a more aggressive way, although within an historical future perspective, is affirmed not only in classroom assessment in the national examinations as well as (although in different ways).

This document paints an integrated long-term vision for assessments and national examinations in Costa Rica, but in a way that is relevant to the current national context. In particular, it is proposed that, although a long-term perspective is needed, in the short term a priority should be to develop classroom tests and national examinations that are better aligned to the current curriculum.

The document sustains that given the stage of Mathematics Education reform in the country it is decisive to give attention to assessment, affirming it as a necessary factor to continue to advance in this curricular implementation.

It is affirmed that, although it would be fine to show improved achievement on the OECD PISA tests, the key to what happens on those or any other international comparative tests rests on the progress in the implementation of the Mathematics curriculum.

1. Las capacidades en el currículo nacional

El currículo de Matemáticas se separó de los currículos anteriores de esta asignatura que estuvieron basados esencialmente en conocimientos y objetivos alrededor de ellos. Esta decisión se enmarca en una tendencia internacional que existe desde hace décadas a incluir capacidades matemáticas y no solo contenidos; por ejemplo en los Estados Unidos: el National Council of Teachers of Mathematics mediante "estándares de proceso", los *Common Core State Standards for Math* a través de "Estándares para la práctica matemática" y el *National Research Council* (2003) también introduce capacidades.[3] En esa dirección están las competencias matemáticas diseñadas por M. Niss y colaboradores en Dinamarca a finales del siglo pasado y que han sido cruciales para el marco teórico en Matemáticas de las pruebas PISA de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE) desde el año 2000 (aunque, como señala Niss (2015), en las diversas ediciones entre el 2000 y 2015 se han dado cambios en su conceptualización). De igual manera el Currículo Nacional de Matemáticas de Reino Unido usa "procesos clave" (representar, analizar, interpretar y evaluar) y Singapur introduce razonamiento, comunicación y conexiones, habilidades de pensamiento y heurísticas, y aplicación y modelización (Soh, 2008). Sin embargo, la forma en que se introducen las capacidades superiores en el currículo costarricense es plenamente original. Este currículo sintetiza lecciones de la experiencia internacional y nacional en Educación Matemática, resultados de investigación y planteamientos teóricos desarrollados por una comunidad importante de investigadores en esta disciplina que se ha desarrollado en Costa Rica desde hace más de 20 años (véase Ruiz, 2013).

El corazón del nuevo currículo es el cultivo de capacidades cognoscitivas superiores que si bien parten de los conocimientos y las habilidades asociadas, las trascienden y son por su naturaleza transversales a las áreas matemáticas. Una capacidad superior puede intervenir en relación con distintos conocimientos y en diferentes niveles educativos; aunque actúa en un medio cognoscitivo preciso, en ese sentido, es independiente de los conocimientos. La forma como este currículo articula conocimientos,

[3] En este último se establece: Comprensión conceptual, Fluidez en procedimientos, Competencia estratégica, Razonamiento estratégico, Disposición productiva.

habilidades, capacidades superiores y competencia matemática general, aporta una perspectiva original y renovadora para la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas.

En esta parte se describe cómo el constructo principal del currículo costarricense de Matemáticas es una competencia matemática general, que subraya la comprensión y uso de las Matemáticas para la vida en diversos contextos, que permita a los ciudadanos intervenir con mejores condiciones cognoscitivas en el siglo XXI. Se muestra que, a diferencia de currículos anteriores en ese país, este incluye conocimientos pero enfatiza capacidades cognitivas superiores. En las tareas matemáticas en busca de avanzar esa competencia se invoca el significado de los contextos reales y de varios niveles de complejidad (reproducción, conexión, reflexión).

Se mostrará cómo las habilidades asociadas a los conocimientos se mezclan o integran de múltiples maneras en las tareas matemáticas, en particular sin circunscribirse a una sola área matemática, y se identifican seis opciones de interacción de las habilidades generales. Las habilidades, procesos y niveles de complejidad son integrados mediante una novedosa propuesta teórica en congruencia con el currículo costarricense, que busca servir de fundamento para la acción de aula y la evaluación.

Introduciremos aquí modelos teóricos que establecen tres grados distintos en que pueden intervenir los procesos o capacidades superiores en una tarea matemática, y se aportan en un caso 61 indicadores precisos para permitir la identificación de esos grados de cada proceso. También mediante los procesos se formularán cinco criterios para identificar los tres niveles de complejidad de las tareas matemáticas. Se aporta también un modelo simplificado que plantea 30 indicadores (un subconjunto de los 61) y un criterio para valorar niveles de complejidad.

Y finalmente se propone la estrategia “4 + 6” para identificar pasos a seguir y elementos a tomar en cuenta a la hora de valorar los problemas o las tareas matemáticas.

Una última sección analiza la relación entre la política curricular oficial de Costa Rica aprobada a finales del 2016 y los programas de Matemáticas.

Vamos a empezar por reseñar algunos de los principales elementos del currículo costarricense de Matemáticas en cuanto a capacidades.

Competencia matemática y capacidades superiores

Las experiencias curriculares dominantes en el pasado han provocado distorsiones en la comunidad educativa empujando para que su atención se centre unilateralmente en los conocimientos que se incluyen; como veremos: no ha sido extraño que se acuda con bastante exclusividad a las mallas curriculares, dejando de lado los fundamentos que consigna el currículo. En ocasiones solamente se traslada el lenguaje de contenidos y objetivos de currículos anteriores hacia las habilidades del nuevo. Los procesos y las capacidades superiores son desaparecidas. Y lo mismo sucede con la competencia general. Eso es algo inadmisible en relación con los programas aprobados en el 2012, más aun: no es posible de implementarse apropiadamente sin un dominio de esa fundamentación. Para sostener la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas que consigna el nuevo currículo se debe empezar con su constructo más general: la competencia matemática.

La competencia matemática como constructo

El nuevo currículo asume una perspectiva general sobre la formación matemática escolar, que se articula como una competencia matemática general particular:

> … una capacidad de usar las matemáticas para entender y actuar sobre diversos contextos reales, subraya una relación de esta disciplina con los entornos físicos y socioculturales y también brinda un lugar privilegiado al planteamiento y resolución de problemas. En esta visión la competencia matemática está definida por un poderoso sentido práctico. (MEP, 2012, p. 14)

Esta competencia se construye por medio de conocimientos matemáticos, habilidades generales y específicas, y capacidades cognoscitivas superiores transversales a las áreas, y esta se encuentra asociada a la participación racional y crítica en la vida social e individual. Esta constituye el *constructo* de los programas oficiales y por lo tanto aporta la perspectiva a sus fines, ejes, contenidos, enfoque general, contextualización, cultivo de actitudes y creencias positivas sobre las Matemáticas y su enseñanza, la organización por áreas matemáticas, e incluso el papel de las tecnologías:

> … dará sentido a muchas decisiones globales que se encuentran de manera explícita o implícita en el currículo. En primer lugar aporta sentido y coherencia a las diversas partes del mismo, es un

> poderoso instrumento para establecer sus fines generales y sus fronteras, lo nutre y le da dirección. Es un medio para establecer ejes disciplinares curriculares estratégicos, ofrece criterios para la presencia o ausencia de contenidos y motiva un enfoque para la acción de aula que privilegia la resolución de problemas, especialmente en contextos reales, fortalece la participación de la identificación, construcción y uso de modelos, da sentido al fortalecimiento de áreas como Estadística y Probabilidad, nutre el papel de las tecnologías. (MEP, 2012, p. 24)

Esta decisión curricular se fundamentó en una posición ontológica y epistemológica sobre la naturaleza de las Matemáticas que se propuso en Costa Rica desde hace muchos años antes de que se abriera la ventana histórica que permitió el diseño y la aprobación del nuevo currículo:

> A través de una adecuada lectura de la evolución de las Matemáticas es posible sugerir cómo (de manera general) abordar la nueva enseñanza de las Matemáticas. En primer lugar, está claro que es importante enfatizar siempre los aspectos concretos e intuitivos, y su relación con el mundo físico y social. La dialéctica entre lo concreto y lo abstracto debe transmitirse tomando como dirección vectorial el primer elemento de esa relación. Lo abstracto puede llegar a ocupar papeles muy decisivos en la construcción matemática, pero de manera general, sumergidos en un marco teórico vinculado al devenir físico y social (a la naturaleza y a la sociedad). La axiomática y lo formal si bien útiles en la expresión, son completamente secundarios en la construcción matemática. Los énfasis y sobrevaloraciones que se les han dado sólo han conducido a desvirtuar la naturaleza y el sentido de las matemáticas. Por otra parte, consecuencia de lo anterior, es necesario introducir énfasis en la utilidad de las Matemáticas. También en su relación con las demás ciencias. (Ruiz, 1987, p. 250)

Y en el mismo sentido:

> Las ideas dominantes hasta nuestros días sobre las matemáticas siempre pusieron énfasis en sus aspectos más abstractos, deductivos, incluso axiomáticos y formales, debilitando los intuitivos, vitales, heurísticos, concretos. Esto fue un importante punto de partida para las reformas de las llamadas “matemáticas modernas” que buscaban transformar el carácter anticuado, *calculístico*, *memorístico* y “poco general” de las matemáticas enseñadas en primaria y secundaria. Sus énfasis fueron la teoría de conjuntos, las estructuras *algebraicoformales*, y las generalizaciones abstractas. En América Latina, las matemáticas se cargaron de esa ideología y de una manía por un “purismo” matemático que apuntaló un distanciamiento de las matemáticas con relación a las ciencias, la tecnología y la economía. (Ruiz, 2000, p. 25)

Es decir, la adopción de los propósitos generales de la preparación escolar en Matemáticas, aunque se consignó en el 2012 mediante los términos específicos de la OCDE, obedeció a una visión original cultivada ya en Costa Rica sobre la naturaleza de las Matemáticas y su enseñanza.

La naturaleza de las Matemáticas es la que brinda los elementos para diseñar su enseñanza y aprendizaje y aquí se enfatiza su sentido como construcción sociocultural, por ende histórica, como una actividad donde se ponen en juego no solo los conocimientos (validados y consignados por medio de mecanismos que posee la comunidad científica matemática) sino especialmente las capacidades cuya intervención generan esos resultados. En la enseñanza y aprendizaje esas capacidades deben estar presentes como una especie de vector director. Por eso los conocimientos matemáticos son el punto de partida pero en relación estrecha con las capacidades que se formulan de manera precisa en el currículo: las "habilidades" asociadas a las áreas matemáticas y especialmente aquellas cognitivas superiores correspondientes a actividades denominadas *procesos matemáticos* transversales a estas áreas; aquí, se insiste: capacidades en un ensamblaje dinámico con los conocimientos edifican la competencia matemática general. Las capacidades superiores son: *Plantear y resolver problemas, Argumentar y razonar, Conectar, Comunicar* y *Representar*. Las características que estos poseen se reseñan en este trabajo más adelante.

El currículo se enfoca en la acción que puede hacer el estudiante y no en la lógica de las Matemáticas que se incorporan; aunque se parte de las Matemáticas, se enfatizan acciones generales a realizar en todos los niveles educativos y, a la vez, capacidades que se pueden desarrollar.

Integración de habilidades

Las habilidades se distinguen en específicas y generales, las primeras en relación con periodos relativamente cortos de tiempo y las segundas en conexión con ciclos educativos.

El currículo costarricense fue diseñado con una perspectiva de integración, no solo en cuanto la conexión de todos los niveles educativos (primaria y secundaria, por ejemplo) sino en cuanto a todos sus elementos curriculares. Hay una integración de conocimientos, habilidades, procesos y competencia general con la malla curricular, así como de ejes disciplinares y enfoques con la malla curricular y con los otros elementos. En particular las habilidades: "(…) no deben verse de manera desagregada. No se trata de objetivos operativos que deben trabajarse en el aula necesariamente por separado. Por el contrario, lo conveniente es tratar de integrar las habilidades específicas en todas las actividades de aprendizaje: planeamiento, desarrollo de la lección y evaluación" (MEP, 2012, p. 45). Esto implica en cuanto a la acción de aula y la evaluación, que mediante "… un solo problema es posible abordar varias habilidades" (MEP, 2012, p. 45).

Esta perspectiva se ha promovido entre los docentes, sin embargo una buena cantidad sigue igualando "habilidades" con los "objetivos" de currículos anteriores en donde la integración de estos últimos no se planteaba, pues se seguía un modelo curricular esencialmente lineal (esto se desarrollará con detalle en la segunda parte). Al no adoptarse la integración de habilidades, la acción de aula tiende a volverse ineficiente: los tiempos para el desarrollo de lo contenidos y propósitos curriculares son difíciles de cumplir. El asunto se vuelve aun más grave cuando en Costa Rica existe un número muy amplio de demandas de naturaleza administrativa para los docentes que ya en sí mismas conspiran para que estos puedan disponer de tiempos suficientes para la gestión de aula. El asunto es de gran trascendencia para la implementación curricular.

El estilo de la lección

El currículo plantea que para fortalecer la competencia matemática se requiere una gestión de aula con base en cuatro fases distintas:

1. Propuesta de un problema.
2. Trabajo estudiantil independiente.
3. Discusión interactiva y comunicativa.
4. Clausura o cierre. (MEP, 2012, p. 41)

MEP (2012) propone que esta acción de aula debe hacerse en dos etapas: una para "realizar el aprendizaje de conocimientos nuevos" (p. 41), y otra para la movilización o aplicación de los mismos que "busca reforzar y ampliar el papel de los aprendizajes realizados" (p. 41). Esta última puede realizarse "en cualquier momento posterior, no necesariamente de forma inmediata a la primera" (p. 41). Pero en la primera sí es muy importante seguir los 4 momentos "en una lección o en una secuencia de lecciones" (p. 41).

Este estilo de lección se fundamenta en varias fuentes teóricas también cultivadas en Costa Rica que consideran a la clase:

> (…) como una pequeña "comunidad científica" dotada de sus reglas, es el corazón de la experiencia educativa. Aquí es donde el alumno se enfrenta a los "problemas" y *construye* o, mejor dicho, *reconstruye* conceptos. El alumno es activo, aunque también el

> maestro. Es necesario romper con los esquemas tradicionales en lo que el profesor dicta sin real interacción con el alumno, romper con la pasividad del alumno. No es que un profesor no participa “porque el niño puede construir el conocimiento solo”. Es quien debe suministrar las situaciones adecuadas (los problemas), organizar las discusiones y apenas sugerir procedimientos de validación para el nuevo conocimiento. (Ruiz, 2000, p. 38)

Y además:

> El sujeto construye un concepto “nuevo” por medio de un proceso complejo que parte de un conflicto “cognoscitivo” entre las concepciones que posee originalmente el sujeto y el que va a resultar de la experiencia cognoscitiva. Resulta en esto importante entender que el aprendizaje no debe verse con la dirección típica de la educación programada: de lo simple a lo complejo; más bien es al revés: de lo complejo a lo simple. (p. 38)

Otras ideas que se usaron en el diseño del currículo costarricense incluyen elementos del marco teórico de las pruebas PISA, de la corriente de Educación Matemática Realista fundada por Freudenthal (1973, 1983, 1991) y que han tenido mucha influencia en Holanda, de la experiencia de Japón y otros países asiáticos, así como de la escuela francesa de didáctica de las Matemáticas.

En relación con el estilo de la lección que propone el currículo, un referente teórico fue un análisis sobre los resultados de tres estudios comparativos internacionales realizados con videos por TIMSS en 1995 y 1999, y desde el 2005 otro encabezado por D. Clarke, C. Keitel, Y. Shimizu, E. Jablonka, J. Emanuelsson y I.A.C. Mok (Ruiz, 2011). Aquí, entre otras experiencias, se sintetizaron resultados sobre las lecciones en Japón (Clarke, Emanuelsson, Jablonka & Mok, 2006; Neubrand, 2006; Shimizu, 2006 y 2009; Stigler y Hiebert, 1999, 2004). Aunque es siempre posible encontrar variaciones del esquema propuesto en el currículo costarricense (más pasos antes o después de los cuatro), se observa una forma de estructurar la lección que posee un gran parentesco con el modelo de este país.

Resolución de problemas y selección-diseño de tareas

El corazón de la orientación metodológica general que plantea el currículo es el *diseño apropiado de problemas o tareas matemáticas* por medio de los cuales en el aula se logre potenciar el desarrollo de la competencia matemática. Dentro de esta visión, si bien los cuatro momentos de la estrategia metodológica son importantes, se enfatiza el momento inicial de colocación de problemas, decisivo para desencadenar la construcción o la movilización de los aprendizajes, lo que subraya la importancia de la planificación de la lección.

En la acción de aula propuesta se debe favorecer una acción estudiantil que permita estimular su progreso cognoscitivo, dominio de conocimientos y desarrollo de capacidades. Puesto en términos epistemológicos: “la propuesta afirma la necesidad de que el estudiante construya sus propios aprendizajes y busca fortalecer su compromiso con ellos. Para eso se plantea que la lección proporcione problemas interesantes que capturen la atención estudiantil y a la vez que sean desafíos para motivar su acción cognitiva” (Ruiz, 2013, p. 29).

Aquí se introduce una visión de la resolución de problemas que se apodera de los enunciados constructivistas brindándoles un sentido práctico pedagógico renovador. La selección apropiada de problemas y la gestión de aula con los cuatro pasos ofrece al docente una intervención precisa en la cual, además de estimular la acción cognitiva del estudiante, también debe actuar como transmisor (o puente) del conocimiento y de la cultura matemática de la época (adaptados a entornos escolares, es decir: su “transposición didáctica”).

Es posible pensar que la propuesta de un modelo para la acción de aula (los “4 pasos”) puede resultar limitante en algunos momentos o no servir a los docentes que viven circunstancias diversas. Tal vez se podría haber considerado en lugar de un modelo ofrecer solo orientaciones generales de cómo manejar los diversos elementos que intervienen en la lección. La decisión curricular se basó en consideraciones de oportunidad histórica en el país. En Costa Rica subsisten desigualdades importantes en la preparación de los docentes tanto en la Educación Primaria como Secundaria, y además en este país hay múltiples entornos educativos con profundas diferencias. Se volvía importante en la actual fase histórica introducir un cierto grado de uniformidad y dirección para la gestión de aula. Sin duda la propuesta habría sido muy distinta si se hubiera planteado en un Japón donde *per se* desarrollan las lecciones con un esquema muy parecido, o en una Finlandia donde existe una homogeneidad casi absoluta en las condiciones educativas y donde es extraordinaria la preparación docente en todos los niveles. Había que diseñar un modelo capaz de ayudar a orientar la acción de aula de acuerdo a la realidad nacional.

Lo que debe subrayarse es que el modelo elaborado cristaliza importantes experiencias y resultados de investigación en la comunidad internacional de Educación Matemática. Además no solo incluye cuatro fases de aula, sino la presencia de varios ejes disciplinares (como la contextualización activa o el cultivo de actitudes y creencias positivas sobre las Matemáticas) y un rol central de las capacidades. Debe insistirse que la estrategia de aula y todos los elementos curriculares buscan el aprendizaje de conocimientos, el desarrollo de las capacidades superiores y la competencia matemática general.

Procesos y niveles de complejidad

El desarrollo de los cinco procesos matemáticos es fundamental para generar las capacidades superiores. El currículo es inequívoco: "Los conocimientos matemáticos o las habilidades específicas no generan por sí mismos capacidades cognitivas más amplias que nutran la competencia matemática" (MEP, 2012, p. 26).

En esa misma dirección interviene la introducción de tareas matemáticas en tres niveles de complejidad que permite favorecer el desarrollo de las capacidades: "Es sustancial … pues existe una relación directamente proporcional entre niveles de complejidad y las oportunidades para realizar procesos matemáticos y nutrir el progreso de la competencia matemática. La filosofía a seguir en el aula varía a favor de acentuar acciones cognitivas de mayor nivel" (MEP, 2012, p. 32). Y también es inequívoco en su distancia de modelos educativos que privilegian una demanda cognitiva débil: "Una acción de aula encaminada a la confrontación progresiva con complejidades mayores no es consistente con estilos educativos que enfatizan las acciones simples, repetitivas o de poca exigencia mental" (MEP, 2012, p. 32). Por eso: "Un énfasis curricular que asume la resolución de problemas como su enfoque principal no puede privilegiar solamente la realización de problemas de reproducción. Los problemas de conexión o reflexión son los que pondrán en movimiento más capacidades" (MEP, 2012, p. 33).

Existe una relación estrecha entre los niveles de complejidad y los "procesos" o capacidades superiores que estos buscan promover. Es importante comprender, sin embargo, que el punto de partida son los "procesos" y que la determinación de los niveles de complejidad debe visualizarse como una forma de condensar la intervención de los mismos. En este documento ofreceremos modelos teóricos que permitirán apreciar esta visión, los cuales brindarán instrumentos valiosos para favorecer la valoración de problemas y tareas matemáticas en cuanto al papel que juegan las capacidades superiores.

Estrategias de aula en función del currículo

El currículo propone diversas estrategias para desarrollar la acción de aula, dentro de las cuales se le brinda especial atención al uso de la historia de las Matemáticas y de la tecnología; la primera permite ofrecer un rostro humano a las Matemáticas, la segunda permite desarrollar los aprendizajes de maneras diferentes y a la vez en congruencia con el escenario histórico que viven los estudiantes. El uso de la historia de las Matemáticas y de la tecnología, sin embargo, al igual que todas las estrategias que se usen, se concibe en función de los conocimientos, habilidades y capacidades superiores propuestas en el currículo en busca del desarrollo de la competencia matemática.

Otro elemento a tomar en cuenta es la relación de la tarea matemática planteada y los propósitos del currículo. Como sucede con todos los medios o recursos didácticos que se proponen aquí, se trata de que la tarea esté claramente asociada a conocimientos y habilidades precisas que se consignan para el año escolar. En ese sentido, no toda situación se presta de manera pertinente para generar los aprendizajes específicos que se desean.

Esta ha sido una demanda que se ha buscado trasmitir a las universidades formadoras de docentes que enseñan Matemáticas, pues ha sido frecuente que los programas de formación inicial no realicen esta asociación. Por una parte abundan cursos de pedagogía muy generales (segregados de cursos de Matemáticas también desvinculados), y por otra cuando incluyen la Educación Matemática también lo hacen de manera muy general (Programa Estado de la Nación, 2015; Ruiz y Barrantes, 2016). La formación inicial debe contener dimensiones generales educativas, matemáticas y de educación matemática, y por supuesto asumir que no solo debe hacerse en función de un currículo (que por definición es transitorio), sin embargo es relevante que esta incorpore tópicos, enfoques y planteamientos del currículo oficial que constituyen la guía central para la acción de aula. Al no hacerse se debilitan las condiciones de los egresados para participar adecuadamente en su labor en servicio. Algo similar ha ocurrido en el pasado con capacitaciones para docentes y también se ha dado en eventos académicos que convocan docentes en los cuales el lugar del currículo oficial no ha sido suficientemente abordado.

La siguiente figura condensa la relación entre estos componentes del currículo.

Figura 1. La competencia matemática general como constructo curricular

Actitudes y creencias positivas

Uno de los ejes disciplinares del currículo costarricense es el cultivo de actitudes y creencias positivas alrededor de las Matemáticas y su enseñanza; se propone materializar en la acción de aula de manera central, pero no debe excluirse de la evaluación o de las pruebas en gran escala.

Este eje se inscribe como parte del propósito de enfrentar la "matefobia" (Ruiz, 2013), es decir: una condición sociocultural de miedo y rechazo hacía esta disciplina, presente en muchos países. Esta se manifiesta no solo en la educación formal, sino también en ámbitos familiares y sociales más amplios.

La matefobia es un poderoso obstáculo para generar el desarrollo de competencia matemática general en la población. Tanto porque afecta que haya una cantidad más grande de individuos que se dediquen a profesiones asociadas a las Matemáticas (STEM[4]) así como porque debilita las condiciones para que los ciudadanos aprendan Matemáticas y desarrollen habilidades y capacidades que estas ayuden a generar.

De alguna manera este "síndrome" encuentra su origen en la misma naturaleza de las Matemáticas pero también se genera en una estrecha asociación con los medios y estrategias que se han utilizado para su enseñanza.

Veamos la primera dimensión. Las Matemáticas refieren a aspectos muy abstractos de la realidad: "Las matemáticas son conocimiento de 'lo general' (una manera de hablar) en el mundo que, como todo conocimiento, surge en una relación entre el sujeto y el objeto (ella misma un factor real)" (Ruiz, 2000, p. 54). Su forma de elaboración determina sus condiciones: "Las matemáticas se construyen aquí: acciones sobre nociones extraídas de la realidad o acciones humanas, sobre ellas mismas o sobre otras acciones y operaciones. Acciones sobre acciones: un territorio fértil para la abstracción matemática" (p. 56). Y: "Con el correr de la historia … conjuntos de construcciones mentales cada vez más alejadas de lo intuitivo y empírico. Tanto que, hoy en día, a veces, nos da la impresión que nunca tuvieron contacto con ese mundo" (p. 56).

Este es como un "pecado original", tenemos por lo tanto una disciplina que requiere condiciones y estrategias especiales para poder enseñarse (múltiples andamios, conceptos y métodos). Y es aquí donde se ha fallado: una inapropiada visión y enseñanza de esta asignatura ha ayudado a provocar la "crisis". Esto lo consignábamos así:

---

4 STEM: Science, Technology, Engineering, Mathematics.

> … no se puede olvidar que el enfoque filosófico sobre las matemáticas y su enseñanza dominante desde hace más de treinta años en universidades y colegios, en el "gremio", ha contribuido también a la crisis: una matemática fría, sobrecargada de lenguaje abstracto innecesario y muchos formalismos, una matemática vacía separada de la acción constructiva por el estudiante, y ajena a los planos más intuitivos. Si ya era un problema la dificultad inherente al estatus epistemológico de las matemáticas (su implacable abstracción: el territorio de lo general), los enfoques, programas y métodos inadecuados apuntalaron el rechazo de las matemáticas entre los estudiantes, los padres de familia y hasta los mismos maestros y profesores. (p. 17)

Dos de los vectores que en el contexto escolar provocan actitudes negativas hacia las Matemáticas y su enseñanza son: métodos inapropiados de enseñanza y rendimientos débiles en el desarrollo de las tareas matemáticas.

En cuanto a la primera categoría, sucede cuando por ejemplo se proponen: "Matemáticas con un bajo nivel de demanda de la acción inteligente y creativa. Los énfasis en repeticiones mecánicas de procedimientos simples, en la memorización sin sentido o en actividades mentales poco exigentes no provocan en la mayoría de estudiantes empatía con las Matemáticas" (MEP, 2012, p. 38). Eso ocurre si el énfasis no es la comprensión conceptual o cuando al realizar tareas matemáticas sucesivas no se añaden en el proceso cambios significativos que permitan variar las acciones mentales involucradas. Concentrar las lecciones en interminables listas de ejercicios de idéntica demanda cognitiva juega en ese sentido.

Otro ejemplo es cuando hay una "separación de los entornos estudiantiles" (MEP, 2012, p. 38). Sucede cuando la gran mayoría de tareas matemáticas que se plantean no usan contextos reales con los cuales el estudiante puede sentir un cierto grado de familiaridad o empatía. Un caso particular de lo anterior: cuando la enseñanza está "separada de las realidades culturales y los medios tecnológicos de la sociedad moderna". (MEP, 2012, p. 38). Cada día las nuevas generaciones demandan que los medios tecnológicos disponibles permeen la forma de enseñar Matemáticas: uso de computadoras, tabletas, celulares y especialmente redes y la Internet. De igual manera, la cultura invoca espacios mayores para los elementos visuales, dinámicos, creativos e interactivos entre los sujetos y los objetos cognoscitivos. Las generaciones Y o Z, nativos digitales, son una referencia. No se puede enseñar igual que se hacía antes de dispositivos tecnológicos o plataformas del tipo Google y YouTube; o cuando no existía la recolección (tomar apuntes) de lecciones, mensajes, contenidos o experiencias de aula por medio de celulares inteligentes que toman fotos, o tabletas que organizan los discursos expresados por medio de programas inteligentes en donde se incrustan imágenes, sonidos o apuntes. La sociedad ha cambiado mucho en todos estos aspectos como para poder aceptar una estrategia pedagógica casi decimonónica.

El estilo de conducir la lección afecta cuando: "no favorece la participación activa y colaborativa de estudiantes y docentes (MEP, 2012, p. 38). Por ejemplo cuando predominan lecciones magistrales que no permiten que participe el estudiante o se desarrollen tareas que estimulen colaboración y trabajo colectivo.

Hay muchos otros errores de enseñanza, como cuando el docente privilegia tareas innecesariamente difíciles que no son pertinentes o instrumentales para el desarrollo de los aprendizajes o los fines curriculares. Un desequilibrio en la demanda cognitiva solicitada en la evaluación juega en la misma dirección.

Algunos de estos factores afectan no solo a las Matemáticas, pero por algunas características de la naturaleza de estas refuerzan actitudes negativas.

El segundo vector está estrechamente asociado con los métodos de enseñanza en el aula, como señala el currículo costarricense: "El fracaso en ejercicios, problemas y pruebas … generan una estela de baja autoestima y confianza" (MEP, 2012, p. 38). Desempeños débiles afectan a un individuo, pero si este tipo de resultados es común y persistente en la población solo se contribuye a una percepción colectiva negativa; esta ha sido la realidad que ha acontecido con las Matemáticas en muchos países.

No todos estos factores poseen el mismo impacto en actitudes y creencias, pero entre ellos refuerzan visiones sobre la asignatura. Cuando los métodos de enseñanza y en particular de evaluación generan malos rendimientos de manera sistemática, es inevitable que se culpe a la asignatura o se promuevan creencias distorsionadas sobre la misma.

En la relación de las personas con las Matemáticas se puede identificar por un lado su dominio, una percepción y un reconocimiento positivo de la disciplina en general, y su aprecio y satisfacción con ellas. Algunas investigaciones internacionales consignan que aunque los individuos dominen las Matemáticas e incluso la valoren como fundamentales para la ciencia y tecnología modernas y para múltiples profesiones, no necesariamente provocan para ellos satisfacción y aprecio. Una cantidad de estudiantes en Japón poseen rendimientos muy buenos con las Matemáticas escolares en comparación con muchos otros países, superan pruebas de ingreso a las universidades con gran demanda en Matemáticas, sin embargo una vez sobrepasados los requisitos educativos estos estudiantes no desean seguir con esta disciplina, y más bien exhiben percepciones negativas hacia ella (Hirabayashi, 2006, p. 51; Hino, 2007, p.

504; Mullis, Martin, González & Chrostowski, 2004). Y esto no es exclusivo de este país oriental (Leung, 2006, p. 40).

Por otra parte: las actitudes están asociadas a creencias. Y por eso: "Identificar y transformar las percepciones negativas en positivas debe ser parte de los fines de una educación anclada en los requerimientos de la sociedad en que vivimos" (MEP, 2012, p. 38).

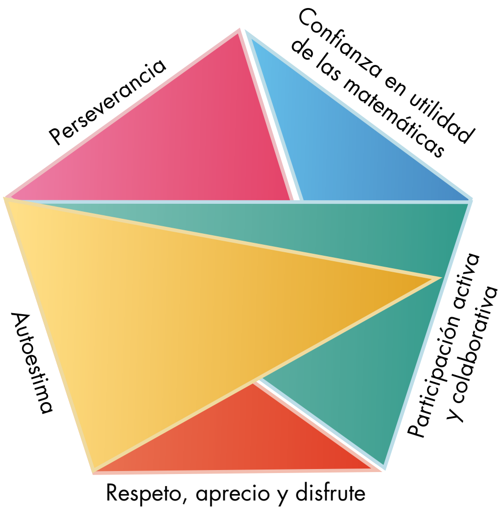


Figura 2. Cinco actitudes positivas sobre Matemáticas en el currículo costarricense

En el currículo costarricense se seleccionaron cinco actitudes a promover:

> *Perseverancia*. Una de las principales actitudes que se busca potenciar es aquella que hace del trabajo, la dedicación y la persistencia el medio para abordar las Matemáticas. Lejos de ser un asunto para personas superdotadas, lo cierto es que las destrezas matemáticas se entrenan y desarrollan.
>
> *Confianza en la utilidad de las Matemáticas*. Es constante el reclamo por visualizar la utilidad de estos aprendizajes para la vida. Con la contextualización activa se ofrece una valiosa oportunidad para permitir de forma perspicaz un vínculo con la realidad estudiantil. El uso de tecnologías digitales diversas resultará también un instrumento para favorecer esta comprensión del contexto y su cercanía con el entorno. De la misma manera, el progreso en la competencia matemática general para resolver problemas permite fomentar esta percepción y actitud.
>
> *Participación activa y colaborativa*. Lograr que cada estudiante se comprometa en la construcción de su propio aprendizaje es

> una condición básica. La organización de la lección debe ofrecer oportunidades para la participación estudiantil activa e interactiva.
>
> *Autoestima en relación con el dominio de las Matemáticas*. Muchas personas sienten que fracasan al no poder abordar con éxito tareas matemáticas. Con la presencia de escaleras pedagógicas apropiadas y la existencia de niveles de profundidad distintos se tendrá la posibilidad de dar forma a las exigencias personales para buscar el desarrollo de esta autoestima.
>
> *Respeto, aprecio y disfrute de las Matemáticas*. Si bien no todas las personas van a relacionarse con las Matemáticas de la misma manera en sus vidas ni todos van a tener las mismas habilidades para su manejo, es importante que se desarrolle un respeto del lugar que ocupa en el conocimiento y la cultura de la humanidad. Para eso resultan sustanciales los elementos que se aporte a la reflexión, recurriendo a múltiples medios como la historia, la filosofía, la ingeniería, las artes y otras disciplinas en las que las Matemáticas son parte fundamental. (Itálicas añadidas, p. 38)

Estas actitudes no actúan de manera aislada, sino que conjunta o sinérgica, hay diversas interrelaciones entre ellas. Por ejemplo, si se avanza en la *persistencia* es posible mejorar desempeños y por lo tanto fortalecer la *autoestima*, e igual sucede con la *participación activa* con la *autoestima*. Si se logra *confianza en la utilidad de las Matemáticas* se puede provocar *respeto, aprecio y disfrute* de estas.

No debe entenderse que cada tarea matemática puede provocar todas estas actitudes positivas. Apuntalarlas apela más bien al conjunto de las acciones que se deben realizar. En general: en la construcción y movilización de los aprendizajes en la acción de aula es donde se propone desarrollar este eje disciplinar. Pero también el diseño de la evaluación de aula y en gran escala son cruciales para el progreso de este eje disciplinar.

Los contextos en el currículo de Matemáticas

El currículo establece una distinción entre contextos que se desarrollan en el dominio estrictamente matemático y aquellos reales (relativos a entornos físicos o sociales).

El papel de los contextos reales

Con un significado determinante: "… adopta (…) una premisa esencial: juegan un papel crucial los problemas reales, en los que aparecen los entornos físicos y socioculturales. Usar problemas extraídos de la realidad o que se puedan imaginar como reales promueve acciones cognitivas requeridas para el aprendizaje de las Matemáticas" (MEP, 2012, p. 28). ¿Por qué? En primer lugar porque: "… es posible despertar un mayor interés, provocar actitudes positivas sobre las Matemáticas, involucrar más a las personas en la construcción de sus aprendizajes y entonces estimular diversas actividades cognitivas y el cultivo de la competencia matemática" (p. 28). Pero no se trata solamente de un asunto de promoción de esa condición socioafectiva y mental, el propósito de la contextualización encierra una posición epistemológica:

> (…) en la acción por encontrar, usar o aplicar las Matemáticas dentro de contextos reales (bien seleccionados) se promueve el contacto con los objetos matemáticos en su relación privilegiada con la realidad de donde emergieron. Trabajar en estos contextos diversos favorece una matematización (usar matemáticas para representar o modelar situaciones del entorno) que -aunque debe ser adaptada al medio escolar- corresponde a aquellas actividades similares realizadas en los quehaceres matemáticos más generales. (p. 28)

Es decir, se parte de una consideración sobre la naturaleza de las Matemáticas: los objetos matemáticos refieren en su base a las relaciones de los sujetos con la realidad física y social, son modelos de lo real o modelos de modelos en sucesiones de mayor nivel de abstracción. Los contextos reales permiten una manipulación de los métodos generales de construcción matemática. El trabajo con contextos reales, por eso mismo, permite estimular competencias personales que suelen participar en la construcción de las Matemáticas. Precisamente porque el trabajo con contextos reales posee tantas dimensiones cruciales para la comprensión y utilización de las Matemáticas es que se requiere que sea realizado con mucho cuidado. Por ejemplo, las situaciones que se introducen deben tener un significado y no ser artificiales o representar situaciones matemáticas abstractas disfrazadas por medio de un contexto real. En este tipo de situaciones es esencial que se visualicen y se fomenten las capacidades matemáticas superiores.

El uso de contextos reales y de una gestión de aula que fomente el compromiso de los estudiantes permite favorecer las actitudes y creencias positivas sobre las Matemáticas y su enseñanza, lo que a su vez potencia la construcción de aprendizajes.

La perspectiva de los programas en cuanto a esto se articula como "contextualización activa", el término "activa" busca resaltar ese propósito:

> Se pueden contextualizar los objetos matemáticos de varias maneras. Por ejemplo puede ofrecerse una introducción contextual para abordar algunos conceptos o procedimientos matemáticos ("fíjense que en esta sala de clase tenemos distintas figuras, hoy vamos a estudiar los triángulos"). Otra manera: contextualizar una situación matemática (si Juan tenía 400 colones y gastó 200 en caramelos, ¿cuántos colones le quedan?). Esas contextualizaciones son útiles en muchas circunstancias educativas, pero no activan intereses y acciones cognitivas de nivel superior ni procesos matemáticos: no generan un involucramiento estudiantil activo. Al contrario, para despertar el interés y la participación, se propone usar problemas en contextos reales que provoquen la construcción o uso de modelos. Se trata de diseñar problemas sacados de las informaciones de prensa, de la escuela, de la comunidad, de la clase, de Internet. Los mismos "problemas" tradicionales que aparecen en muchos libros de texto (como apéndice) pueden ser enriquecidos si se colocan en la perspectiva de la modelización y usados para construir capacidades cognitivas superiores. (MEP, 2012, p. 36)

Este es uno de los ejes disciplinares de este currículo y está fuertemente asociado a las nuevas perspectivas que establece. En el mismo juega un papel crucial lo que se denomina aquí "modelización" que se consigna como el "elemento esencial de la contextualización activa (….)" (p. 36) y que se define como:

> La identificación, uso y construcción de modelos matemáticos (…). Los modelos emergen siempre que se deba acudir a la realidad. Un modelo es en esencia un conjunto de elementos matemáticos conectados que representan una realidad específica (explican, describen, permiten hacer predicciones). Pueden existir varios modelos sobre una realidad con distintos grados de representación de la misma. Identificar, construir o usar un modelo de una situación real es una manera de matematizar esa realidad.
>
> Lo que se propone aquí no es solamente un entrenamiento de estudiantes en las estrategias para el planteamiento y construcción

> de modelos en sí mismos, sino esencialmente utilizar los modelos matemáticos y las acciones que supone su construcción y utilización para generar o reforzar aprendizajes. Conocimientos y habilidades específicas se pueden construir o aplicar a través de las acciones que ofrece la modelización. Esta matematización escolar no busca dar un modelo final y acabar la acción allí. Trata de la creación y uso sucesivo de modelos que se refinan, adecúan y amplían su rango de acción. Refiere al aprendizaje, a una acción estudiantil constructiva en la que también hay intervención docente. (MEP, 2012, p. 31)

El propósito de la modelización es la construcción o movilización de aprendizajes, es decir el dominio de conocimientos y el desarrollo de habilidades y capacidades matemáticas. La modelización conecta con el fin general de todo el currículo que conecta estrechamente con la competencia matemática, esta constituye a la vez consecuencia y perspectiva que alimenta contextualización activa y modelización.

La contextualización activa puede introducirse en la acción educativa de distintas maneras de acuerdo con las diversas áreas matemáticas, algunas se prestan más que otras para el trabajo en contextos reales en dependencia del nivel educativo (por ejemplo, en algunas áreas se requieren Matemáticas más sofisticadas para poderse usar adecuadamente contextos reales).

Se debe comprender en esta temática que las situaciones de contexto real deben estar relacionadas con la tarea matemática que se propone de una forma precisa. Siempre es esencial preguntarse ¿de qué manera la realización de esta tarea resuelve los interrogantes que plantea la situación? ¿Es necesario el contexto para realizar la tarea? Si la tarea planteada no resuelve los desafíos del contexto o se podría prescindir del mismo para realizarla o sus resultados no aportan algo significativo para el contexto, no se logra lo que se persigue con el eje disciplinar. La clave debe ser la búsqueda de un involucramiento intelectual del estudiante por medio de situaciones que le permitirán desarrollar sus habilidades y capacidades matemáticas.

En el currículo la contextualización “activa” no se circunscribe al desarrollo de las lecciones sino que se conceptúa como un elemento que debe estar presente en todas las dimensiones educativas; en particular en lo que refiere a la evaluación cotidiana en el aula o a pruebas nacionales.

Propuesta para identificar contextos

Los contextos que se invocan en los programas costarricenses se pueden agrupar en cinco categorías: matemáticos, personales, ocupacionales, sociales y científicos. Para los últimos cuatro hemos aceptado la formulación que hace la OCDE en las pruebas PISA aunque con una modificación:

los problemas que se desarrollan enteramente dentro del mundo de las Matemáticas no se incluyen en los “científicos” (lo que sí se hace en PISA) y se colocan en una categoría aparte. De esta manera, los contextos pueden conceptualizarse así:

> *Matemáticos*: se centran exclusivamente en conceptos y procedimientos que no salen del seno de las Matemáticas.
>
> *Personales*: “… las actividades de uno mismo, su familia o sus iguales. (…) incluye (pero no se limita a) (…) preparación de alimentos, compras, juegos, salud personal, transporte personal, deportes, viajes, programación personal y finanzas personales.” (OCDE, 2016, p. 74)[5]
>
> *Ocupacionales*: “…el mundo del trabajo. (…) pueden incluir (pero no se limitan a) cosas tales como medir, calcular costos y pedir materiales para la construcción, nómina / contabilidad, control de calidad, programación / inventario, diseño / arquitectura y toma de decisiones relacionadas con el trabajo. (…) pueden relacionarse con cualquier nivel de la fuerza laboral, desde el trabajo no calificado hasta los niveles más altos de trabajo profesional …” (p. 74).
>
> *Sociales*: “… la comunidad (local, nacional o global). Pueden involucrar (pero no se limitan a) cosas tales como sistemas de votación, transporte público, gobierno, políticas públicas, demografía, publicidad, estadísticas nacionales y economía. Aunque los individuos están involucrados en todas estas cosas de una manera personal, en la categoría de contexto social el enfoque de los problemas está en la perspectiva de la comunidad” (p. 74).
>
> *Científicos*: “… la aplicación de las matemáticas al mundo natural y temas relacionados con la ciencia y la tecnología. (…) pueden incluir (pero no se limitan a) áreas tales como clima o clima, ecología, medicina, ciencia espacial, genética, medición” (p. 74).

La siguiente figura permite resumir estas categorías.

[5] La redacción de las características de cada categoría se ha ajustado un poco a conveniencia de nuestro texto (plural de palabras por ejemplo).

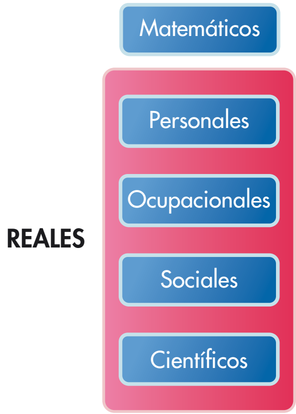


Figura 3. Cinco contextos

¿Por qué no aceptar solamente las cuatro categorías que establece PISA y no extraer los problemas matemáticos de la categoría "científicos"? Aunque las Matemáticas son una ciencia y sus problemas pueden ser considerados científicos, nos resulta más adecuado visualizar los últimos cuatro contextos como referidos a *aplicaciones* de las Matemáticas: es decir al uso de estas en entornos reales. El currículo busca promover estos contextos en las diversas acciones de aula.

¿Es relevante identificar los contextos? La respuesta es afirmativa: se promueve que la introducción de los tipos de contextos (a usarse en la construcción y movilización de aprendizajes o en la evaluación) se haga de una manera más consciente y equilibrada.

Ejemplos de contextos[6]

A partir de cada uno de los contextos siguientes es posible establecer diversas tareas matemáticas.

Matemático

Un polígono inscrito en otro

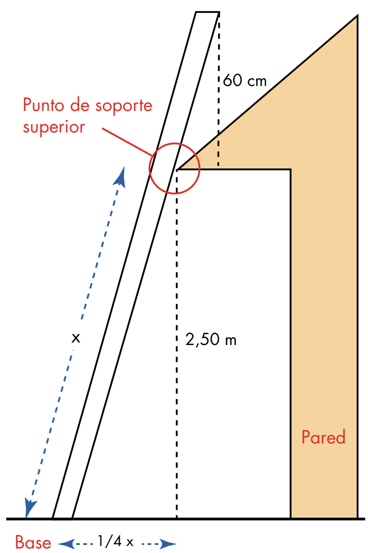
Se tiene un hexágono P regular de lado L, se construye otro hexágono Q de modo que sus vértices son los puntos medios de los lados del hexágono P.

[6] Ejemplos aportados por Hugo Barrantes, Edwin Chaves y Edison de Faria.

Personal

Reparación del techo

Suponga que usted necesita reparar el techo de su casa, para ello debe comprar una escalera. El techo se encuentra a una altura de 2,5 metros. Para poder tener una buena estabilidad las normas de seguridad recomiendan que la escalera debe inclinarse contra la pared u otro tipo de apoyo, a un ángulo tal que la distancia horizontal desde la base de la escalera hasta la pared sea de aproximadamente la cuarta parte de la longitud de la escalera hasta el punto superior de soporte (ver figura 1). Suponiendo que la escalera debe sobresalir 60 cm del punto de soporte, ¿cuál debe ser la longitud de la escalera que debo comprar?



Ocupacional

Venta de Camisetas

El administrador de una tienda deportiva debe entregar un informe sobre las ventas de camisetas durante el último mes. Debe hacer una comparación entre las tallas y si la camiseta era para hombre o para mujer, para ello construye la siguiente tabla:

Información ficticia utilizada con fines didácticos

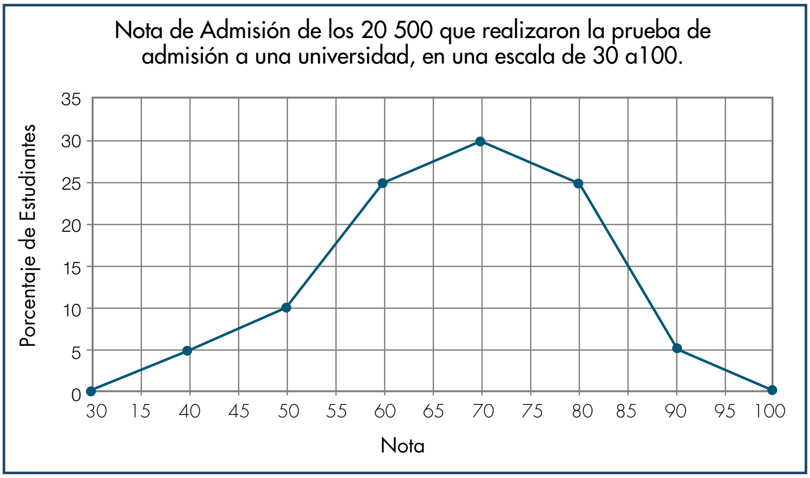
Venta de camisetas deportivas durante el último mes según talla y sexo

Talla de las camisetas	Número de camisetas vendidas	
	Hombre	Mujer
XS	12	8
S	10	25
M	30	30
L	24	18
XL	44	9
Total	120	90

Social

Examen de admisión a una universidad

Supongamos que 20 500 estudiantes realizaron el examen de admisión a una universidad. Las calificaciones fueron resumidas en el siguiente polígono de frecuencias.



Científico

Modelo de Ludwig von Bertalanffy

En 1938 el biólogo Ludwig von Bertalanffy desarrolló un modelo para calcular la longitud, en centímetros, del pez barracuda que crece bajo condiciones ideales, por un periodo de t años. El modelo de crecimiento de este pez es

$$L = 198 - 197{,}1e^{-0{,}23t}$$

Conocimientos y habilidades: enfoques del currículo

En el currículo costarricense de Matemáticas se establecieron cinco áreas para todos los niveles educativos: Números, Medidas, Geometría, Relaciones y Álgebra y Estadística y Probabilidad. Cada una posee una participación distinta en cada ciclo educativo (y dentro de ellos en cada año escolar); por ejemplo Números ocupa el mayor espacio en la Primaria y Relaciones y Álgebra en la Secundaria. Algunas áreas se vuelven transversales e instrumentales: Medidas en toda la Secundaria y Números en el Ciclo Diversificado.

La decisión curricular de usar las mismas áreas en todo el currículo persigue el fin de tener un tratamiento homogéneo y visualizar los conocimientos de manera integrada en todos los niveles educativos. No se usó una división de los dominios matemáticos mediante categorías organizadoras que incluyeran los contenidos asociados de manera transversal a las subdisciplinas tradicionales de las Matemáticas, como se hace en la pruebas PISA: Forma y espacio, Cantidad, Cambio y relaciones, Incertidumbre y datos. El objetivo de PISA es una categorización dirigida a pruebas dentro de una visión que enfoca los diversos contextos en la vida. Hay convergencia con PISA en cuanto al rol de los contextos reales pero en nuestro caso se tenía que considerar que esta categorización debía establecerse con base en la realidad del país. Ya la introducción de las capacidades y de una multitud de elementos curriculares novedosos aportaba una demanda pesada. Los estudiantes, docentes y funcionarios de Costa Rica están familiarizados con las áreas matemáticas tradicionales. Por otro lado no se trataba solamente de enfocar la evaluación (pruebas) sino la implementación curricular en las aulas. Se apostó por una clasificación familiar a partir de la cual arrancar para que en la mediación pedagógica se desarrollen las capacidades y la competencia matemática y en ese escenario introducir todas las interacciones cognoscitivas necesarias. Esto lo analizaremos con mayor detalle más adelante.

Dentro de las áreas se asumieron importantes criterios curriculares, lo que se puede apreciar en la manera de introducir los distintos contenidos (por ejemplo en qué momento y con cuál significado) así como el enfoque que se pretende en el uso de esos contenidos. No es nuestro objetivo en este documento describir con demasiado detalle esa colección de criterios que sostienen la malla curricular. Vamos aquí solamente a reseñar algunos elementos.

Números

En Números: se busca establecer distancia de un manejo muy formal de los conceptos, es decir:

> (…) darle mayor relevancia a los cálculos, que permiten desarrollar habilidades o destrezas numéricas. En ese sentido, se propone fortalecer el cálculo mental y la estimación. Esta visión se asocia con la resolución de problemas y la contextualización activa. El cálculo mental, por ejemplo, se puede cultivar desde un primer momento como un mecanismo especial para el dominio de propiedades numéricas y como entrenamiento de destrezas mentales.
>
> (…) las actividades de cálculo en el aula permiten fortalecer la búsqueda de soluciones distintas. El registro, explicación, crítica y comunicación de estrategias de cómputo permiten favorecer procesos cognitivos importantes, que ayudan en el desarrollo de la competencia matemática. (MEP, 2012, p. 50)

Pero el papel brindado al cálculo no se debe confundir con un “sobredimensionar el valor de los procedimientos por encima de la comprensión conceptual, (…) sin una comprensión conceptual los procedimientos se olvidan con mayor rapidez y no se logran aprendizajes significativos” (p. 50).

Es importante mencionar que no se desea que se hagan cálculos demasiado largos o una utilización simbólica excesiva que no aporte a la solución de problemas. Aquí también se debe decir que no se promueve el uso de la teoría de conjuntos para definir los números (naturales, enteros, racionales, reales). Los conjuntos se introducen hasta décimo año escolar de manera instrumental en Relaciones y Álgebra y en Probabilidad; los conjuntos en sí mismos no tienen cabida en este currículo.

La introducción de los números así como de sus representaciones también obedeció a consideraciones curriculares, basadas en resultados sobre cognición. Por ejemplo, un tratamiento amplio de las fracciones y decimales se deja para el segundo ciclo educativo; de igual manera las operaciones se introducen en espiral con claras distinciones sobre el grado de complejidad o demanda cognitiva de las mismas.

Geometría

En Geometría se ven “los objetos geométricos como patrones o modelos de muchos fenómenos de lo real” (p. 52). Hay un sentido que invoca “entornos espaciales”, y por lo tanto se pretende generar un “sentido espacial". Lo que se define como: "la identificación, visualización y manipulación de las formas en el espacio" (p. 52). En esa dirección "no se privilegia una aproximación a la Geometría basada en el estudio de objetos ideales y abstractos" (p. 52); el propósito declarado es: "(…) fortalecer una mayor visualización en la Geometría: establecer contactos estrechos entre representaciones visuales y las formas geométricas" (p. 52). Esto está asociado a capacidades que deseamos en la población, como lo es un mejor manejo de los objetos en el espacio que se requieren en decenas de actividades reales.

Uno de los cambios fuertes del nuevo currículo es: "una introducción de la geometría de coordenadas y analítica adecuada a los distintos niveles cognitivos." (p. 52) Y eso se debe a que: "(…) las actuales perspectivas de la Geometría se colocan con fuerza dentro del Álgebra y las funciones, y eso mismo permite mostrar la visión moderna de esta disciplina matemática" (p. 52). Esto se hace escalonadamente desde la Educación Primaria.

Otra de las ideas fuerza del currículo vigente es la introducción del movimiento en los objetos geométricos. Y por supuesto las actividades planteadas para lograr ese sentido dinámico. Simetrías, traslaciones, reflexiones, rotaciones son introducidas. De alguna manera esto refleja resultados de la historia de las Matemáticas: "El movimiento de puntos y entidades geométricas permite construir nuevas entidades (curvas por ejemplo) y visualizar las usuales de otras maneras: un sentido dinámico de algunas propiedades geométricas como las posiciones relativas y transformaciones de puntos y formas" (p. 52). Pero también permite visualizar la Geometría de una manera más atractiva y sintonizar con temas que son además parte de profesiones modernas como el diseño gráfico digital.

Medidas

El área de Medidas juega un papel importante, para empezar "como una fuente muy rica para introducir objetos y procedimientos matemáticos, para hacer conexiones con otras áreas matemáticas y no matemáticas y con muchas situaciones del entorno" (p. 53). En otros currículos las medidas desaparecen para usar unidades lineales, de área o volumen abstractas. El trabajo con contextos reales demanda un papel de las medidas en todos los niveles escolares.

Uno de los temas que se busca cultivar gira en torno a que "siempre hay un *sentido de aproximación"* en toda medición. Tanto el sujeto que hace la medición como el instrumento que se utilice producen un porcentaje de error.

Las medidas están poderosamente emparentadas con el sentido numérico, la medida de objetos y con la estimación en particular. Por eso: “pueden apoyar el estudio de varios conceptos matemáticos, como el cambio y la invariancia bajo algunas transformaciones” (p. 53).

Relaciones y álgebra

El primer cambio significativo en Relaciones y Álgebra es que se plantea en la Primaria. Algunos elementos antes se incluían en las otras áreas matemáticas (evidentemente en Números) pero darle el lugar distinguido y separado que posee este tipo de contenidos era muy importante. Esta área proporciona situaciones especiales para el cultivo de las capacidades superiores.

El trabajarla desde la Primaria nos permitía la oportunidad de plantear las conexiones con las relaciones y álgebra de la Secundaria que ocupan el mayor lugar en ese nivel escolar. Por ejemplo ir creando conscientemente habilidades y capacidades en el manejo de las relaciones de cambio, en el uso de símbolos, en las múltiples representaciones,… El tema de funciones siempre fue un problema en los currículos anteriores, pues se introducían esencialmente en décimo año, de sopetón, sin una preparación gradual en sus objetos, procedimientos y significados, además de una presentación totalmente abstracta y formal. Eso cambió drásticamente con el nuevo currículo.

Una de las ideas fuerza de esta área es que “se favorece un tratamiento ‘funcional’ de la manipulación de expresiones simbólicas, por ejemplo las ecuaciones, la factorización y la simplificación, lo que permite darle significado a varios temas de ese tipo y empezar la formación en este pensamiento funcional desde la Primaria aunque de manera gradual” (p. 52). Y también un reacomodo importante para enseñar temas que poseen profunda relación de una manera cercana o integrada: por ejemplo, la ecuación de primer grado y la función lineal, las ecuaciones de segundo grado y la función cuadrática. Objetos como las raíces de una función permiten dotar de un sentido especial a tópicos como la factorización simbólica.

Ha sido una poderosa pulsión hacer de las expresiones algebraicas un territorio para la práctica rutinaria y repetitiva, donde se pierde todo significado en el uso del símbolo y la relación. Es decir: colecciones exageradas de símbolos, letras con diversos grados, no han sido ajenas a la acción en muchas aulas. Con el nuevo currículo eso desaparece: la utilización de las expresiones simbólicas deben tener un sentido dentro de las acciones relacionadas con la comprensión y uso de las Matemáticas ya sea dentro de estas como también en contextos reales.

Otro de los elementos que definen el rostro de esta área es su relación estrecha con la contextualización y especialmente de una manera aún más precisa con la modelización. Sus objetos y procedimientos deben cultivarse:

> (…) con una fuerte orientación hacia la resolución de problemas y la modelización. Por ejemplo, las funciones trascendentes (exponenciales, logarítmicas) se tratan con esta visión novedosa y estimulante. El aprendizaje y utilización de las funciones en diversos contextos cierra la formación matemática que aporta esta área. (p. 52)

Este es un terreno que posee varias dimensiones: una de ellas es que sobre esta área los docentes poseen un mayor dominio, otra es que tal vez precisamente por lo anterior subsisten ideas o enfoques equivocados o inapropiados sobre cómo enseñar los contenidos de esta área con base en el nuevo currículo. Los temas de funciones deben introducirse con vigor dentro de contextos reales y con una poderosa participación de capacidades superiores.

Un asunto específico en esta área que todavía genera debate fue la decisión de no incluir las funciones trigonométricas en la malla curricular en el Ciclo Diversificado. Esto obedeció a una razón de fondo: se buscaba condensar un currículo que pudiera implementarse efectivamente en el escenario costarricense, donde aun se pierden muchas lecciones, las condiciones laborales o de infraestructura son desiguales, y la preparación de los docentes tampoco es uniforme. No se quería un currículo muy cargado para dar espacio tanto a nuevos contenidos o modificados en su significado, y sobre todo para potenciar el cultivo de los enfoques novedosos, en particular el papel de las capacidades superiores.

En la decisión se valoraron varios elementos. Por un lado que estos contenidos tradicionalmente incorporados sirven a carreras universitarias muy específicas (ingenierías esencialmente) y las universidades podrían brindar esos contenidos fácilmente a los estudiantes de esas carreras sin tener que invertir una gran cantidad de tiempo. En las instituciones de secundaria demandaba más tiempo, pero además no había sido extraño que esos contenidos en muchos sitios simplemente no fueran estudiados. Se decidió en lugar de incluir este tipo de funciones trascendentes beneficiar un tratamiento más profundo de las funciones exponenciales y logarítmicas, que en el pasado no se enseñaban adecuadamente. Por ejemplo no se estudiaban estas últimas como funciones inversas, puesto que se había excluido el concepto de composición de funciones.

Por otra parte, y tal vez la razón más importante: este nuevo currículo enfatiza las capacidades y no los contenidos. Con mayores capacidades superiores y competencia matemática los egresados de la educación preuniversitaria podrían con mucha mayor facilidad aprender los contenidos de funciones trigonométricas que necesitaran.

Estadística y probabilidad

Estadística y Probabilidad es una área relativamente novedosa en el currículo, sobre todo porque debido a los pocos lugares en que se incluía en el currículo anterior, la mayoría de docentes no la enseñaba; nunca hasta el 2016 se incluyó en las pruebas nacionales de Bachillerato. Esta área: "posee un lugar estratégico, que alimenta directamente el sentido de la competencia matemática alrededor de la descripción de la realidad y el cultivo de la resolución de problemas en contextos diversos" (MEP, 2012, p. 54). Podría incluso decirse que es una disciplina distinta de las Matemáticas en donde sus criterios de validez no son idénticos a los de Geometría, Relaciones y Álgebra u otras subdisciplinas. Sin embargo, contiene Matemáticas de una manera considerable, y para el currículo escolar ofrece extraordinarios recursos de aprendizaje donde intervienen las Matemáticas más tradicionales.

En esta área:

> (…) uno de los temas fundamentales que se desarrolla persistentemente es el de la variabilidad de los datos. Es muy importante insistir en que la representación y modelización de muchos fenómenos se hace por medio de datos, y que los diferentes conjuntos de datos se pueden comparar y así brindar más conocimiento de los fenómenos de partida. De igual manera, un conjunto de datos requiere instrumentos para su descripción (media, mediana, moda, rango, desviación); su enseñanza debe hacerse en buena parte en función de su aplicación en el análisis de la información y resolución de problemas y no como objetos en sí mismos. Esto es relevante, pues a veces se ve equivocadamente la Estadística escolar como colecciones de fórmulas y un manejo mecánico de esos instrumentos. (MEP, 2012, pp. 54-55)

Es esencial subrayar que la introducción de los objetos estadísticos o probabilísticos debe hacerse siempre en contextos reales, puesto que deben servir a la resolución de problemas donde el análisis de la información y la toma de decisiones se vean favorecidos por sus contenidos. Aquí, por ejemplo, no tiene sentido el cálculo de medidas de tendencia central en sí mismas, lo que ya no sería Estadística sino Aritmética. En este currículo la demanda por un tratamiento adecuado de la Estadística y Probabilidad cobra mucho peso precisamente por haber sido hasta ahora una área que se trabajaba poco en las escuelas y colegios, y porque de igual manera en las mismas universidades formadoras de docentes el enfoque usado no ha sido plenamente convergente con el que sostiene el currículo costarricense.

Modelo para identificar habilidades y sus interacciones

En este apartado vamos a ofrecer una propuesta para clasificar la participación de las habilidades generales que subyace en el currículo de Matemáticas, para ello sin embargo será necesario evidenciar las interacciones que poseen habilidades específicas entre ellas, así como entre estas y las generales, y finalmente entre aquellas generales.

La interacción de las áreas

Si bien Costa Rica estableció cinco áreas matemáticas para apoyar la comprensión del currículo y beneficiar la acción de aula en su entorno educativo, no se consideran estas áreas como compartimentos estancos sin conexiones. Y más aun: se introducen diversos elementos curriculares que promueven fuertemente las interacciones entre las áreas y una visión transversal a todas ellas en las acciones de enseñanza y aprendizaje; por ejemplo, los cinco procesos o capacidades superiores y los ejes disciplinares invocan precisamente una visión integrada de las Matemáticas y su enseñanza.

Las Matemáticas contemporáneas en la perspectiva más amplia exhiben extraordinarias intersecciones entre sus objetos y métodos: las variables y las funciones propias de Relaciones y Álgebra se usan en la Geometría, o el manejo del plano o el espacio es importante para la comprensión de la naturaleza de objetos de Relaciones y Álgebra, en una situación propia de la Estadística o de la Probabilidad pueden participar elementos de Medidas, Números y Relaciones y Álgebra. Existe una conocida dicotomía que opone Matemáticas a la Matemática apuntando a si son varias disciplinas o subdisciplinas o se deben considerar como una sola, es decir una tensión entre diversidad y unicidad. La realidad es que esta dicotomía se puede resolver de una manera clara: hay Matemáticas y hay Matemática, son varias y una a la vez. Se pueden ver varias Matemáticas a partir de sus áreas que en esencia fueron establecidas históricamente y enfatizar características propias por ejemplo de la Geometría o del Álgebra, sin embargo los métodos de las matemáticas en sus diferentes disciplinas se intercambian, se integran. Y conforme avanza la historia de las Matemáticas y su cortejo de abstracción, es fácil encontrar más y más elementos en común, y, sin duda, se ha vuelto esencial potenciar la unidad y la generalidad de los métodos y objetos matemáticos para su construcción teórica. Hay unidad en las Matemáticas, y esto debe recogerse en su enseñanza: en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas conviene tener las dos perspectivas. En las Matemáticas existe un especial sentido de *transdisciplinariedad* (Ruiz, 2003).

La forma más conveniente de hacer esto, con base en el currículo nacional, es señalando cuando sea pertinente y útil las interrelaciones entre las áreas. Lo claramente inadmisible sería asumir tanto en la acción de aula como en la evaluación un tratamiento rígido de las fronteras de las áreas matemáticas.

El asunto se puede ver incluso desde una perspectiva más general: los problemas reales a los que se puede enfrentar una persona o una colectividad en su vida suelen traspasar las fronteras de las disciplinas cognoscitivas, mucho más allá de las propias matemáticas y del resto del conocimiento. La capacidad para identificar y usar los diversos instrumentos cognoscitivos, las Matemáticas y las relaciones entre sus áreas es una parte de la competencia matemática que se desea que la preparación escolar brinde a la población.

Hasta el 2017, en el currículo así como en las acciones de implementación del mismo, se ha enfatizado la clasificación de áreas y no insistido en las interacciones entre las áreas. ¿Por qué? Esto obedeció a una estrategia de implementación dotada de momentos históricos distintos. Una transformación tan amplia y profunda de las perspectivas y elementos curriculares, en realidad de toda la enseñanza de las Matemáticas en el país, no podía incorporar desde un principio todos los énfasis que se derivan de estos programas. Por ejemplo, aunque se consignó la relevancia de problemas de “final abierto” para el enfoque curricular, no se propuso darles un lugar privilegiado. De igual manera, aunque se afirmó el uso intenso de tecnologías no se les brindó un papel tan significativo en los contenidos propiamente ni en los ejemplos ni en las acciones propuestas. Algo similar ocurre con el papel de la historia de las Matemáticas.

La colectividad educativa debía aprehender primeramente componentes “gruesos” del currículo (como su enfoque principal que funde la resolución de problemas y la contextualización activa). Aunque aun faltan varios años para instalar en la conciencia colectiva esos ejes curriculares esenciales, ya es tiempo de subrayar cada vez más el papel de las capacidades superiores y el trabajo con mayores niveles de complejidad.

En cuanto a la interrelación de las áreas: ya el uniformar la malla curricular mediante una clasificación con cinco áreas, algunas de ellas novedosas en ciertos niveles o con una conceptualización distinta, era suficiente carga para asumirse en el medio educativo costarricense. Algo parecido ha ocurrido con la evaluación que ha tenido que abordarse con rigor hasta unos años después de iniciarse la implementación curricular, por razones incluso de un calado social más general. Sin embargo, conforme se siga avanzando en esta poderosa reforma educativa será necesario que en las diversas acciones se incluyan todos los elementos curriculares que este currículo estableció.

La intervención combinada y sinérgica de habilidades

Las habilidades generales en el currículo en general refieren a ciclos educativos completos, pero debe señalarse que no es idéntica la “generalidad” de las mismas ya sea dentro de una área o en relación con otras. Es decir, algunas de estas habilidades generales poseen un foco más reducido que otras o, al revés, unas tienen un foco de mayor amplitud (refieren a mayor o a menor número de cosas).

Se busca estimular y obtener las habilidades en periodos, y por lo tanto su desarrollo debe verse como un proceso gradual. Tampoco conviene verlas como si se tratara de situaciones “binarias”: ceros o unos, se tiene o no se tiene, siempre existen matices o grados pues convergen diferentes niveles en el dominio de una habilidad.

Los programas oficiales subrayan la integración de habilidades como una característica central del enfoque curricular. Esto se traduce en la gestión educativa en que se debe promover el tratamiento integrado de las habilidades como una de las mejores maneras de generar el desarrollo de estas alrededor de los conocimientos. La integración de habilidades favorece un aprendizaje sinérgico, es decir se potencia el estímulo del conjunto de habilidades más allá de la simple suma de cada una de ellas consideradas por separado. Y esta orientación permite optimizar los tiempos para la acción de aula con base en los contenidos curriculares.[7]

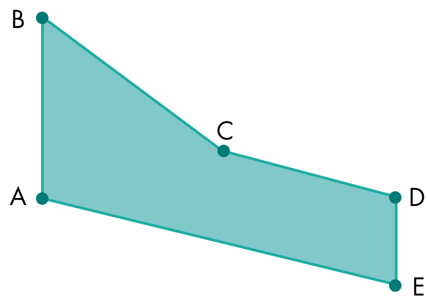
Las habilidades no se conceptúan como capacidades aisladas, por lo tanto se desarrollan de manera combinada entre sí; es decir: un estudiante puede avanzar en el cultivo de una habilidad en asociación con otras; existen intersecciones cognitivas entre las habilidades.

Una manera de valorar las habilidades es comprender que se pueden descomponer en habilidades de naturaleza más básica, como si se tratara de elementos “moleculares” o “atómicos” más pequeños; estos elementos

[7] En la experiencia de Costa Rica se ha podido identificar esta perspectiva integradora como un instrumento poderoso para apoyar su implementación; pero no es solo que corresponda con el enfoque del currículo, es que esta permite que los docentes comprendan mejor ese enfoque, que visualicen de manera muy práctica cómo la gestión de aula se puede concentrar y racionalizar dentro de cursos lectivos donde nunca sobra el tiempo, pues las contingencias diversas no dejan de actuar.

más básicos pueden entonces estar presentes en varias habilidades. Por ejemplo: “Identificar colecciones de puntos en una figura geométrica” o “reconocer símbolos como representaciones de objetos matemáticos” no son habilidades específicas del currículo, pero son capacidades que subyacen dentro de varias específicas y generales que sí están. Un ejemplo[8] de esto último podría ser:

*En la siguiente figura se tiene que B-C-E y ∆*ABE*~∆EDC, con razón de semejanza 2, y el segmento AD perpendicular a segmento AB. Si AB=2 cm y AD=4 cm, determine el área del pentágono ABCDE.*



En este caso, se debe conocer el significado de los símbolos ∆ y ~. Por otra parte se debe interpretar que B-C-E indica que los puntos con colineales y B está entre E y C; en la semejanza el orden en que se dan los vértices de los triángulos refiere a la correspondencia entre los vértices, también, que la notación AB se refiere a la medida del segmento AB y que tanto ABC y EDC como ABCDE refieren a polígonos cuyos vértices son los puntos denotados por las letras indicadas.

Como veremos adelante también es posible considerar situaciones en las que habilidades específicas podrían verse como generalizaciones de otras específicas.

La intersección de habilidades se da tanto en aquellas específicas como en las generales, siendo probable que se encuentren más intersecciones con la habilidades de naturaleza más general que con las específicas.

---

[8] Los ejemplos específicos de esta sección fueron aportados por Hugo Barrantes.

Relación entre habilidades generales y habilidades específicas

El currículo costarricense de Matemáticas no se elaboró pensando que las habilidades generales no tienen intersecciones, ni tampoco pensando que cada habilidad específica debía ser parte o manifestación de solamente una habilidad general, ni tampoco que siempre las habilidades que intervienen en una tarea matemática se encuentran totalmente contenidas dentro de una área. En algunas tareas matemáticas es posible que habilidades generales o específicas de una área sean las decisivas para su realización, pero en otras puede que sean habilidades de dos o más áreas las que sean cruciales para la realización de la tarea.

En este currículo se pueden distinguir dos casos de relación entre habilidades generales y específicas:

Habilidades generales de una área que *generalizan* de alguna manera una o varias habilidades específicas.

Habilidades generales de una área que se *construyen a través* de dos o más específicas.

1. En el primer caso, la habilidad general lo que hace es potenciar las específicas una vez que ellas se hayan adquirido; se puede ver como una generalización de ellas.

Figura 4. Habilidad general como generalización de habilidades específicas

Vamos a continuación a ofrecer un ejemplo de este primer caso.

Consideremos la habilidad general de Relaciones y Álgebra: "Determinar el modelo matemático que se adapta mejor a una situación dada" (MEP, 2012, p. 405). Algunas habilidades específicas relacionadas con ella son:

- “Identificar y aplicar modelos matemáticos que involucran las funciones exponenciales.” (MEP, 2012, p. 415)
- “Identificar y aplicar modelos matemáticos que involucran las funciones logarítmicas.” (MEP, 2012, p. 417)
- “Analizar el tipo de función que sirva de modelo para una situación dada (lineal, cuadrática, raíz cuadrada, logarítmica y exponencial).” (MEP, 2012, p. 417)

La habilidad general aquí se puede ver como una generalización de las tres específicas (en el sentido de que las engloba). “Determinar el modelo matemático” refiere a “Identificar y aplicar” modelos matemáticos así como “Analizar el tipo de función que sirva de modelo”. Lo que sucede es que las específicas refieren a casos particulares: “exponenciales”, “logarítmicas” o a “lineal, cuadrática, raíz cuadrada, logarítmica y exponencial”, mientras que la general refiere a cualquier “situación dada”.

En este primer caso la habilidad general potencia a las específicas en su conjunto.

En casos como este también es posible identificar grados distintos de “generalidad” en las habilidades específicas, por lo que podrían incluso considerarse como habilidades “semigenerales” o incluso propiamente generales; sin embargo, el currículo establece una habilidad más general que en conjunto las incluye y las potencia; en algunos casos podrían verse como generalización de otras específicas. Por ejemplo: “Identificar y aplicar modelos matemáticos que involucran las funciones exponenciales” podría incluir las habilidades específicas “Analizar gráfica, tabular y algebraicamente las funciones exponenciales” y “Plantear y resolver problemas en contextos reales utilizando ecuaciones exponenciales”, entre otras.

Figura 5. Habilidad específica como generalización de habilidades específicas

2. En el segundo caso enunciado anteriormente las habilidades específicas se asocian a una general pero esta última no puede verse como una generalización de alguna o del conjunto de las específicas, o -si así se desea formular- la general las engloba de una manera distinta a las del caso analizado previamente. Aquí lo central es que la realización del conjunto de las habilidades específicas (con mediación pedagógica e intervención de otros elementos curriculares como los procesos) permite alcanzar la general. Es decir, se pueden ver estas habilidades específicas como "bloques" componentes (que se juntan, asocian) para desarrollar la habilidad general.

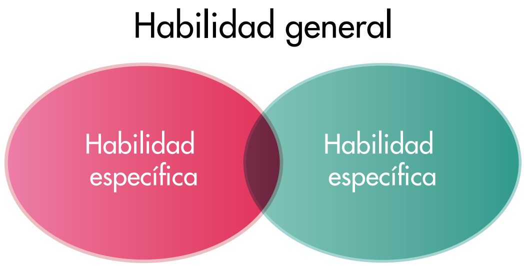


Figura 6. Habilidad general como composición de habilidades específicas

Un ejemplo muy claro: la habilidad general del área de Geometría: "Representar las circunferencias de manera analítica y gráfica" (MEP, 2012, p. 385) involucra las siguientes habilidades específicas:

- "Representar gráficamente una circunferencia dado su centro y su radio."
- "Representar algebraicamente una circunferencia dado su centro y su radio." (MEP, 2012, p. 386)

En esta situación la habilidad general es prácticamente la yuxtaposición de las dos primeras específicas; es decir, la general se construye mediante las específicas, no es una generalización de ellas.

Ahora bien, se puede ofrecer aquí mismo una relación un poco distinta en la que la habilidad general no es generalización de específicas pero tampoco simple yuxtaposición: un caso de una específica que es componente para lograr la habilidad general. En el mismo ejemplo anterior considérese otra habilidad específica asociada a la general:

- "Determinar gráfica y algebraicamente si un punto se ubica en el interior o en el exterior de una circunferencia." (MEP, 2012, p. 386)

Esta tercera habilidad específica coadyuva en la interpretación del sentido de lo que es la circunferencia en cualquiera de sus representaciones, y le da a la habilidad general un rango mayor que la simple suma de las dos primeras específicas. En realidad podría haberse formulado como dos habilidades específica: "Determinar gráficamente si un punto se ubica en el interior o en el exterior de un circunferencia", y "Determinar algebraicamente si un punto se ubica en el interior o en el exterior de una circunferencia". Esta habilidad específica sería así yuxtaposición de dos habilidades más específicas (que sin embargo no fueron formuladas de esa forma en el currículo). La acción básica que construye la habilidad general en este tipo de casos es la yuxtaposición o composición y no la generalización.

Figura 7. Habilidad general como composición de habilidades específicas y habilidades más simples

En síntesis: la relación entre habilidades específicas y las generales a las que se asocian no siempre es la misma, al menos hay dos casos distintos: a) generales como *generalización de específicas*, y b) aquellas que se consiguen a partir de habilidades específicas (como *mera conjunción o como un componente necesario*). Y además: hay habilidades específicas con niveles distintos de generalidad.

Otra situación que aparece en este currículo es la existencia de habilidades generales que pueden verse como englobando o generalizando otras habilidades generales (habilidades que "incluyen" otras habilidades generales); se trata de algunas habilidades extremadamente generales.

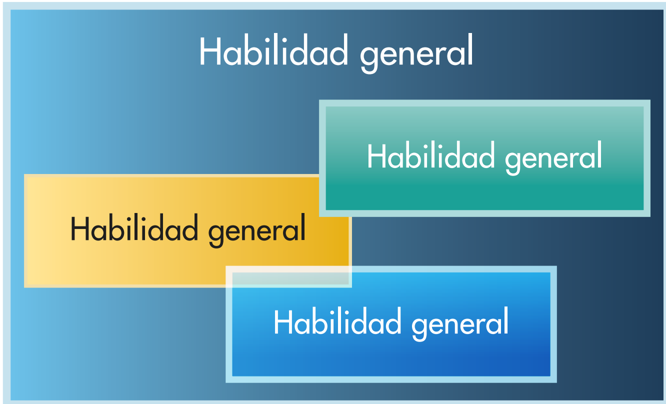


Figura 8. Habilidad general que generaliza otras habilidades generales

Un par de ejemplos en el área de Relaciones y Álgebra: "Plantear problemas a partir de una situación dada" (MEP, 2012, pp. 247, 328), "Plantear y resolver problemas a partir de una situación dada" (MEP, 2012, p. 405). Esta última habilidad incluye las demás habilidades generales del área e, inclusive, se puede decir que de las otras áreas. Este tipo de habilidad realmente estará presente en todos los problemas que se consideren.

Tres ejemplos en Estadística y Probabilidad: "Utilizar técnicas de análisis estadístico o probabilístico para la resolución de problemas del contexto" (MEP, 2012, p. 352), "Utilizar las probabilidades y las medidas estadísticas para favorecer la toma de decisiones en condiciones de incertidumbre." (MEP, 2012, p. 431), "Resolver problemas vinculados con el análisis de datos y el manejo de la aleatoriedad dentro del contexto estudiantil" (MEP, 2012, p. 431).

En Números: "Efectuar operaciones con números en sus diferentes representaciones" (MEP, 2012, p. 173), "Plantear y resolver problemas en diferentes contextos donde se requiera el uso de las operaciones y representaciones numéricas" (MEP, 2012, p. 275).

En Medidas: "Aplicar la medición en diversos contextos" (MEP, 2012, p. 223).

Estas habilidades tan generales, por convención, las podemos llamar "habilidades sombrilla"; fueron introducidas en el currículo para que en diversas partes de la malla curricular se pudiera subrayar la sintonía con elementos centrales del enfoque principal del currículo y la competencia matemática como su constructo o para potenciar capacidades muy generales de toda una área.

Participación de las habilidades generales en las tareas matemáticas[9]

Se puede por conveniencia, y en aras de la explicación de estas ideas, denominar las cinco áreas matemáticas del currículo nacional como A_1, A_2, A_3, A_4 y A_5. Es posible identificar las siguientes posibilidades de participación de las habilidades generales en las tareas matemáticas para una área A_k .

Tabla 1. Seis escenarios de intervención de habilidades generales

	Descripción de escenario
E_1	Una habilidad general de A_k
E_2	Más de una habilidad general de A_k
E_3	Una habilidad general de A_k y una habilidad general de otra área
E_4	Una habilidad general de A_k y dos o más habilidades generales de al menos dos áreas distintas a A_k
E_5	Más de una habilidad general de solamente A_k y una de otra área
E_6	Más de una habilidad general de A_k y más de una de las otras áreas

Se podría consignar una colección con más opciones teóricas (por ejemplo, si intervinieran dos o tres o cuatro áreas). Sin embargo, estas seis opciones generales (o escenarios) solamente pretenden visualizar teóricamente la multiplicidad de opciones con las que se podrían relacionar las habilidades generales del currículo en las tareas matemáticas.

En esta discusión, no obstante, hay que tener en cuenta que lo que predominantemente sucede con una tarea matemática (problema, ítem) es que obedece prioritariamente a una área determinada y en ella a una habilidad general y a veces a dos habilidades generales.

9 La clasificación final de las relaciones entre habilidades generales que se formula en esta sección fue producto de la elaboración colectiva realizada durante el 2016 en el equipo central del *Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica*; una sistematización preliminar que nutrió la que aparece aquí fue realizada por Hugo Barrantes.

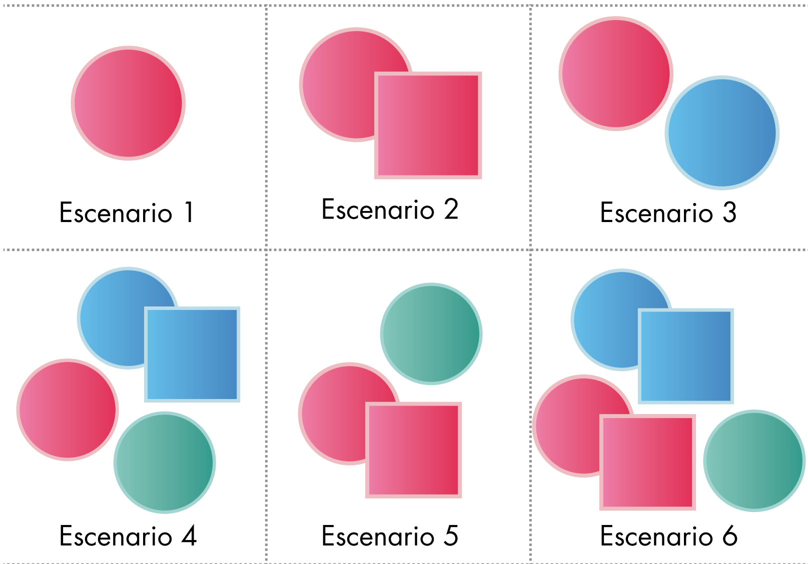


Figura 9. Seis escenarios de interacción de habilidades generales. Círculos y cuadrados representan habilidades generales distintas, el color indica una área. El escenario 2, por ejemplo, representa dos habilidades dentro de una tarea

En una tarea matemática es probable que intervenga una habilidad general del área y solamente habilidades específicas de otra general de esa área pero sin que realmente esta última habilidad general participe plenamente. Es decir: aquí una habilidad general y además específicas de una área y algunas específicas de otras habilidades generales dentro del área serían lo crucial para realizar la tarea. Por ejemplo, considere el siguiente problema:

> *La longitud* **L** *(en centímetros) después de* **t** años de vida, de un pez barracuda está modelada por:
>
> $L(t) = 198 - 197{,}1e^{-0{,}23t}$
>
> *Según este modelo, la edad aproximada, en años, de un pez barracuda cuya longitud es de 114 cm corresponde a*
>
> *A) 1,21*
>
> *B) 3,77*
>
> *C) 15,00*
>
> *D) 21,05*

Solución

Si la longitud del pez es 114 cm, entonces 114 = 198 -197,1e$^{-0,23t}$. Esto equivale a 0,4264 = e$^{-0,23t}$, por lo tanto

$$t = \frac{\ln(0,4264)}{-0,23} \approx 3,77 \text{ años}$$

Aquí hay dos habilidades generales del área de Relaciones y Álgebra. La fundamental refiere a "Plantear y resolver problemas a partir de una situación dada" (MEP, 2012, p. 405). La otra es "Determinar el modelo matemático que se adapta mejor a una situación dada" (MEP, 2012 p. 405), la cual no se da plenamente puesto que el modelo no se determina sino que está dado y se utiliza, lo cual refiere a la habilidad específica "Identificar y aplicar modelos matemáticos que involucran las funciones exponenciales" (MEP, 2012, p. 415) que corresponde a la segunda habilidad general mencionada.

Cuando en la resolución de una tarea matemática se introducen habilidades de otras áreas con mayor razón es posible que se usen en su realización algunas habilidades específicas de esas áreas y no realmente sean necesarias las habilidades generales como tales de esas áreas (con las que estarían asociadas las específicas usadas de las otras áreas).

Por ejemplo, considere la siguiente situación:

Al punto (2,5) se le aplica la homotecia H de centro (0,0) *y razón* 0,5 *y al resultado se le aplica la reflexión*

$$R(x,y) = (\frac{4y\text{-}3x)}{5}, \frac{3y+4x}{5})$$

La ordenada del punto que se obtiene corresponde a ____

Al aplicar la homotecia al punto (2,5) se obtiene el punto (2 · 0,5, 5 · 0,5) = (1, 2,5). Al aplicar a este la reflexión se obtiene

$$R(1,\ 2,5) = (\frac{4\cdot 2,5\text{-}3\cdot 1}{5}, \frac{3\cdot 2,5+4\cdot 1}{5}) = (1,4,\ 2,3)$$.

La respuesta es 2,3.

Aquí hay dos habilidades generales involucradas del área de Geometría:

- "Aplicar e identificar diversas transformaciones en el plano a figuras geométricas."

- “Utilizar la geometría analítica para representar circunferencias y transformaciones.” (MEP, 2012, p. 385)

El problema corresponde prioritariamente al área de Geometría y a las dos habilidades generales mencionadas puesto que la información indica que se aplican dos transformaciones y, además, la información sobre ellas está dada en su forma analítica. Por otra parte, se pregunta sobre la ordenada de un punto por lo que se hace referencia al uso de la geometría analítica.

En el proceso de solución se evidencia el uso de dos habilidades específicas:

- “Aplicar el concepto de traslación, homotecia, reflexión y rotación para determinar qué figuras se obtienen a partir de figuras.” (MEP, 2012, p. 395)
- “Calcular la composición de dos funciones.” (MEP, 2012, p. 408)

La segunda corresponde al área de Relaciones y Álgebra y se utiliza de manera implícita en el proceso. No se hace uso pleno de la habilidad a la que está ligada: “Aplicar el concepto de función en diversas situaciones” (MEP, 2012, p. 405).

De manera general, lo que todo esto plantea para la acción de aula y para la evaluación es la necesidad de tener una comprensión amplia de las habilidades generales y específicas y de las fronteras de las áreas y, por lo tanto, mucha flexibilidad en el diseño de las tareas matemáticas. Lo congruente con el currículo nacional de Matemáticas es el diseño de tareas matemáticas que incorporen de múltiples maneras las habilidades (generales y específicas) de las diversas áreas. Esta flexibilidad en la participación de habilidades no debe entenderse en el sentido de que en toda tarea matemática se deba forzar la participación de habilidades de varias áreas; hacer eso podría resultar artificial e inapropiado para las tareas matemáticas y los aprendizajes (conocimientos y habilidades) que se desean generar en los estudiantes.

Visto desde la perspectiva más amplia de la implementación curricular en las aulas: la integración de habilidades y las interrelaciones entre áreas matemáticas en el diseño de las tareas matemáticas en la acción de aula y en la evaluación debería realizarse en el país a través de un proceso gradual; en el periodo 2012-2016 se proporcionaron recursos para la integración de habilidades específicas y generales dentro de una área[10],

---

[10] El *Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica* elaboró en el periodo 2013-2014 múltiples documentos mostrando cómo se puede llevar a las aulas la integración de habilidades (para todos los niveles), capacitaciones presenciales en el 2014 (que fueron replicadas en muchas regiones en el 2015), y además en el 2015 desarrolló un

pero este proceso debe avanzar con la inclusión de habilidades de varias áreas dentro de una estrategia lúcidamente concebida.

Identificar cuáles son los conocimientos que intervienen en una tarea no es tan complejo, resulta más difícil consignar las habilidades específicas y generales, y aun más valorar la intervención de las capacidades superiores así como precisar el nivel de complejidad de la tarea. En cuanto a las habilidades aquí hemos sostenido la necesidad de una actitud flexible para identificar su intervención, aunque eso no elimina la dificultad para calibrar esa participación de las habilidades.

plan piloto en busca de hallazgos y ejemplos de buenas prácticas en conexión con esta temática (MEP, PREMCR, 2014a, 2014b, 2014c, 2014d, 2014e, 2014f, 2014g, 2014h, 2014i, 2014j).

Modelos para valorar capacidades superiores y niveles de complejidad

Las capacidades superiores participan de manera múltiple y sinérgica, a veces todas ellas actúan y a veces solo algunas; puesto de otra manera: existe una intersección no vacía entre las diversas capacidades superiores.

El lugar de los procesos

La realización de procesos matemáticos es un mecanismo privilegiado para construir las capacidades superiores. MEP (2012) los describe:

> *Razonar y argumentar*
>
> … se activa en todas las áreas de múltiples maneras, por ejemplo en el estudio de regularidades y patrones, en la justificación de la congruencia de triángulos, la elección de una representación matemática y su manipulación, en la solución de ecuaciones, entre otros. La justificación y prueba son parte esencial de los quehaceres matemáticos y por lo tanto deben ocupar un lugar especial en la formación escolar. (p. 25)
>
> *Plantear y resolver problemas*
>
> Refiere al planteamiento de problemas y el diseño de estrategias para resolverlos. Aquí se dará un lugar privilegiado a los problemas en contextos reales.
>
> Se busca potenciar capacidades para identificar, formular y resolver problemas en diversos contextos personales, comunitarios o científicos, dentro y fuera de las Matemáticas. Se trata de capacidades para determinar entonces las estrategias y métodos más adecuados al enfrentar un problema, para valorar la pertinencia y adecuación de los métodos disponibles y los resultados matemáticos obtenidos originalmente, además de la capacidad para evaluar y controlar el desarrollo de su trabajo en la resolución de problemas.
>
> El énfasis que se desea dar a los contextos reales también impulsa una asociación con el desarrollo de capacidades cognitivas para identificar, formular, diseñar, desarrollar y contrastar modelos matemáticos del entorno con complejidad diversa. (p. 25)
>
> Uno de los aspectos que se desea subrayar en esta visión es la importancia de descubrir, plantear y diseñar problemas (y no sólo resolverlos), pues en su vida las personas se verán más expuestas a circunstancias en las que los problemas no están formulados o las Matemáticas posibles que pueden intervenir no son visibles o evidentes. (p. 29)

Además: "… el propósito de desarrollar competencia en los recursos y métodos para resolver problemas también se incorpora en las distintas áreas matemáticas que organizan estos programas (p. 29).

Comunicar

Es la expresión y comunicación oral, visual o escrita de ideas, resultados y argumentos matemáticos al docente o a los otros estudiantes.

Este proceso busca potenciar la capacidad para expresar ideas matemáticas y sus aplicaciones usando el lenguaje matemático (reglas de sintaxis y semántica) de manera escrita y oral a otros estudiantes, docentes y a la comunidad educativa. Pretende que se desarrollen capacidades para consignar y expresar con precisión matemática las ideas, los argumentos y procedimientos utilizados así como las conclusiones a las que se hayan arribado, así como para identificar, interpretar y analizar las expresiones matemáticas escritas o verbales realizadas por otras personas.

Por la gran presencia de simbolizaciones en las Matemáticas en ocasiones se piensa que no es relevante la comunicación verbal y escrita, es común que no se incluya en la acción de aula ni tampoco en las formas de evaluación. No obstante, es un proceso central para la generación de la competencia matemática, pues permite esclarecer ideas matemáticas, compartirlas, revelar dimensiones distintas y ampliar la participación estudiantil activa. (p. 25)

Conectar

Este proceso transversal pretende el entrenamiento estudiantil en primer lugar en la obtención de relaciones entre las diferentes áreas matemáticas, lo cual se deriva de las características centrales de los quehaceres matemáticos: el carácter integrado de los mismos. Los matemáticos profesionales aplican métodos y objetos matemáticos de unas áreas en otras. Aunque las Matemáticas han evolucionado en distintas disciplinas o áreas, han llegado a integrarse con el correr del tiempo. Esta integración es de tal nivel y el flujo de relaciones de un lado a otro es tan grande que no insistir en esas conexiones y ese carácter unificado haría perder la comprensión adecuada de lo que son las Matemáticas.

Con esta multiplicidad de conexiones se comprenden mejor los límites y el significado de muchos de los objetos matemáticos. En el contexto escolar, entrenar y desarrollar la capacidad para hacer conexiones puede hacerse en todos los niveles educativos sin gran dificultad.

Este proceso busca que se cultiven las relaciones entre las distintas partes de las Matemáticas escolares, además del desarrollo de acciones para identificar dentro de situaciones no matemáticas aquellas en las cuales es posible un tratamiento matemático. Y de igual manera persigue motivar conexiones con otras asignaturas y con los distintos contextos (p. 25).

> *Representar*
>
> Pretende fomentar el reconocimiento, interpretación y manipulación de representaciones múltiples que poseen las nociones matemáticas (gráficas, numéricas, visuales, simbólicas, tabulares).
>
> El proceso busca favorecer la capacidad para elaborar y usar representaciones matemáticas que sirvan en el registro y organización de objetos matemáticos, para interpretar y modelar situaciones propiamente matemáticas, para manipular distintas representaciones de objetos matemáticos. Propone también desarrollar capacidades para poder traducir una representación en términos de otras, comprendiendo las ventajas o desventajas (o los alcances) de cada representación en una situación determinada. (p. 26)

Las competencias o capacidades superiores no son usadas operativamente para organizar el currículo: "sólo se usan como una perspectiva general que busca la formación matemática, pero se reconoce su relevancia. Las competencias dentro de un currículo escolar ofrecen visiones renovadoras que permiten redireccionar el significado de los aprendizajes y sustentar premisas constructivistas cruciales, apoyando que la educación aporte al progreso social" (pp. 489-491). Además: "se usan las competencias de una manera precisa en atención a los fines educativos nacionales y las posibilidades de docentes y estudiantes en el actual momento histórico" (pp. 489-491). Ahora bien, la forma como se introducen es por medio de procesos matemáticos: "que poco a poco se vayan introduciendo en los quehaceres educativos. Se considera más eficaz trabajar con procesos y no con competencias directamente, pues en primer lugar, se desea enfatizar las acciones a desarrollar en la acción de aula" (pp. 489-491).

Por simplicidad y conveniencia los procesos matemáticos se asocian de manera **biunívoca** con las cinco capacidades superiores. Es decir: el proceso *Razonar y argumentar* se asociaría con una capacidad para **Razonar y argumentar**, el proceso *Plantear y Resolver problemas* con la competencia para **Plantear y resolver problemas**, y así igualmente para los cinco procesos. Hay una conexión de las capacidades consignadas por el currículo costarricense con las capacidades fundamentales o competencias que plantea PISA de la OCDE en el 2012, sin embargo en el caso de Costa Rica no se adoptan estas capacidades de igual manera.[11] Para efectos de este currículo lo relevante es que intervengan los procesos-capacidades en el aula y se incluyan también en la evaluación y en general se tomen en cuenta en todas las dimensiones educativas. En lo que sigue

---

[11] En el currículo costarricense se plantea que las capacidades estimuladas por los cinco procesos pueden ser, por ejemplo, las siete competencias que señala PISA de la OCDE (MEP, 2012, pp. 492-493).

se hablará indistintamente del proceso como acción o como capacidad superior.

Insistimos: el dominio de conocimientos o el desarrollo de habilidades aunque necesarios no son suficientes para avanzar en la competencia matemática que define el currículo. Es decir: se requieren otras acciones y, por eso, se plantean los procesos.

En lo que sigue vamos a proponer en primer lugar un modelo completo que permitirá valorar los niveles de complejidad a partir de los procesos. El modelo está compuesto por dos elementos:

- 61 **indicadores** que consignan la intervención de los procesos matemáticos en un problema organizados en tres *grados* distintos
- 5 **criterios** para que a partir de los indicadores y de la estructura de su intervención se pueda realizar valoración.

Una vez que describamos este modelo, ofreceremos una versión simplificada del mismo.

Modelo completo para valorar grados de los procesos

La primera premisa que podemos establecer es que una tarea matemática demanda la participación de las capacidades superiores de diferente manera: por un lado debido a combinaciones distintas de las mismas, pero por el otro como resultado de que cada una podría intervenir con grados distintos. Aquí, para consignar esa diferencia en la acción cognitiva se propone, por simplicidad y aplicabilidad, una escala de tres grados, siendo el grado 1 el menos complejo y el grado 3 el más complejo.

En lo que sigue se brindan indicadores para cada grado en relación con los cinco procesos matemáticos que consigna el currículo.

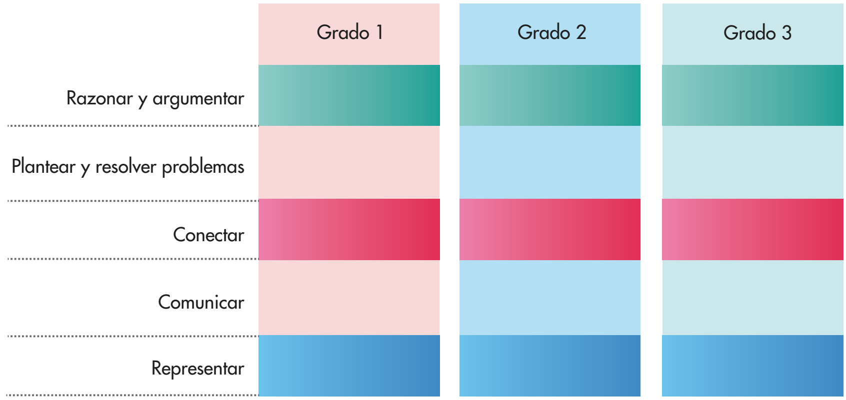


Figura 10. Grados de procesos / capacidades superiores

La descripción de estos grados constituye un marco para la elaboración de un instrumento o una guía general que permita visualizar las características de una tarea matemática determinada y valorar, en particular, la pertinencia y características de su inclusión en la acción de aula o en la evaluación. Al precisarse el grado de intervención de cada proceso se abren posibilidades importantes para sostener una estrategia para obtener progresos en las capacidades matemáticas. Puesto de otra manera: se puede ir ajustando el grado de los procesos en las tareas matemáticas para nutrir el fortalecimiento de la competencia matemática.

De igual manera, en el caso de la evaluación: los resultados que se obtengan el disponer de esta precisión aportaría información muy clara sobre la realidad de los rendimientos estudiantiles, y permitir definir acciones educativas.

La introducción en el currículo costarricense de los niveles de complejidad de los problemas, por otro lado, pretendió favorecer el desarrollo de capacidades cognitivas superiores y por lo tanto estos niveles están estrechamente asociados a los procesos.

En las tablas que siguen se identifican algunas de las características en términos de acciones o capacidades, se trata de *indicadores*.

Debe insistirse en que los procesos y las capacidades que estos invocan poseen múltiples puntos de contacto; no pueden considerarse simplemente separados. Por eso algunos indicadores de un proceso poseen intersección con indicadores de otros procesos.

A la hora de valorar el grado del proceso que una tarea matemática supone deben tomarse en cuenta las características que aquí se sugieren de una manera flexible; en algunos casos algunas de ellas aparecerán con claridad, en otras no aparecerán de esa manera o no estarán del todo.

Luego de los indicadores de cada proceso, se ofrecerán algunas observaciones breves que mostrarán de cierta forma la lógica seguida para el establecimiento de los indicadores de los distintos grados.

Los procesos *Razonar y argumentar* y *Plantear y resolver problemas* ocupan un lugar preponderante para valorar el estímulo de capacidades cognitivas superiores y la competencia matemática. Por eso, en lo que sigue se aportarán más indicadores en estos procesos que en los otros tres.

Debe advertirse que los elementos y ejemplos teóricos que se introducen aquí se pueden aplicar en la acción y en la evaluación de aula o en pruebas nacionales. Por eso no se debe pensar que las tareas matemáticas que pueden proponerse deben ser por ejemplo de selección única, múltiple o de respuesta cerrada que se han privilegiado en las pruebas de Bachillerato. Sin duda la intervención de procesos en ciertos grados supone ítems de desarrollo. Este marco teórico se puede aplicar a tareas matemáticas de las cinco áreas matemáticas del currículo en todos los niveles educativos.

Otro elemento a tomar en cuenta es que las diversas áreas matemáticas poseen características propias, lo que se expresará en que algunos indicadores puede que aparezcan más en una que en otra.

En la utilización de este instrumento (es decir en el análisis de una tarea matemática) si bien es posible que un indicador de un grado aparezca solitariamente, es más probable que aparezcan varios del mismo grado, especialmente en los procesos *Razonar y argumentar* y *Plantear y resolver problemas*.

En lo que sigue se establecen los indicadores usando la siguiente codificación:

- RAi.j: indicador j del proceso *Razonar y argumentar* en el grado valorado como i.
- PRPi.j: indicador j del proceso *Plantear y resolver problemas* en el grado valorado como i.
- Ci.j: indicador j del proceso *Conectar* en el grado valorado como i.
- COMi.j: indicador j del proceso *Comunicar* en el grado valorado como i.
- Ri.j: indicador j del proceso *Representar* en el grado valorado como i.

Tabla 2. Indicadores de grados del proceso *Razonar y argumentar*

Grado 1	Grado 2	Grado 3
RA1.1 Identificar la información presente de forma explícita en situaciones matemáticas o de contexto real RA1.2 Desarrollar procedimientos rutinarios siguiendo instrucciones directas. RA1.3 Responder a preguntas donde está presente de forma explícita toda la información necesaria para encontrar la solución (preguntas directas como ¿cuántos? ¿cuánto es?). RA1.4 Efectuar razonamientos directos o realizar interpretaciones que se extraen literalmente de los resultados en la aplicación de un procedimiento. RA1.5 Describir los procesos de cálculo o los resultados cuantitativos obtenidos al resolver un problema en una situación matemática o de contexto real ya estudiada.	*Si alguno o algunos de los indicadores siguientes en esta columna aparecen (y no hay indicadores de grado 3), se valorará la intervención del proceso con un grado 2:* RA2.1 Identificar información matemática que no está dada de manera explícita en una situación matemática o de contexto real. RA2.2 Responder a preguntas donde la respuesta no es directa y amerita mayor argumentación (por ejemplo: ¿cómo hallamos? ¿qué tratamiento matemático damos? ¿qué puede o no puede pasar y por qué? ¿qué sabemos? ¿qué queremos obtener?). RA2.3 Brindar las soluciones de las preguntas cuando sea pertinente mediante diferentes representaciones: tablas, gráficos, medidas estadísticas, elementos algebraicos, cifras, etc. RA2.4 Evaluar la validez de una secuencia no compleja de argumentos matemáticos (por ejemplo escrita en un texto o en una exposición). RA2.5 Elaborar argumentos basados en sus propias acciones al resolver problemas similares a los ya estudiados.	*Si alguno o algunos de los indicadores siguientes en esta columna aparecen, se valorará la intervención del proceso con un grado 3:* RA3.1 Realizar argumentos matemáticos para resolver problemas o describir situaciones (matemáticas o de contexto real) no estudiados y complejos. RA3.2 Desarrollar argumentos que utilizan integradamente distintos conceptos o métodos matemáticos para resolver un problema. RA3.3 Generalizar los métodos matemáticos utilizados o resultados obtenidos en la resolución de problemas. RA3.4 Realizar razonamientos matemáticos donde se muestra que se comprende la amplitud y los límites de los objetos matemáticos usados y de los procedimientos desarrollados. RA3.5 Formular conceptos novedosos en la resolución de problemas o descripción de una situación (matemática o de contexto real). RA3.6 Realizar razonamientos donde se señalan cuáles son los aspectos esenciales del problema o situación y cómo están relacionados los diferentes objetos matemáticos que participan. RA3.7 Consignar en la resolución de un problema los elementos cruciales de la estrategia seguida. RA3.8 Realizar razonamientos matemáticos en situaciones específicas donde se consignan las diferencias entre definiciones, teoremas, conjeturas, hipótesis o afirmaciones.

En general, los grados de intervención de este proceso se establecen con base en el nivel de complejidad del razonamiento matemático que se efectúa; en el grado 3 se plantea en relación con dimensiones y objetos más abstractos, con un grado mayor de precisión matemática. Sin duda, los problemas que se diseñan para poder trabajar en este grado 3 son de mayor demanda cognitiva por lo que en el proceso *Plantear y resolver problemas* se esperaría también grados 2 o 3, aunque no siempre resulte así. También es posible que en los otros procesos (*Conectar*, *Comunicar* y *Representar*) los indicadores aparezcan en esos grados, pero no necesariamente.

Los indicadores RA1.1 y el RA2.1 poseen una relación clara pues refieren a la información dentro de un problema, la diferencia reside en que en el primer grado se trata de información explícita mientras en el segundo grado no está dada de forma explícita.

Los indicadores RA1.2, RA1.3 y RA1.4 refieren en esencia a procedimientos, cálculos, acciones directas. El RA1.5 plantea una justificación pero de ese tipo de procedimientos o cálculos rutinarios, y no más.

Los indicadores RA2.5 y RA3.1 abordan el hacer razonamientos, pero en el grado 2 esto se hace en situaciones similares a los problemas ya estudiados, mientras que en el grado 3 en situaciones no estudiadas y complejas.

Los indicadores RA1.3 y RA2.2 poseen relación, lo que cambia es el tipo de preguntas. En el grado 1 las preguntas refieren a respuestas directas, cortas; en el grado 2 se plantean preguntas que implican un nivel de argumentación mayor.

El indicador RA2.3 plantea el uso de diversas representaciones en las soluciones, lo que se relaciona estrechamente con el proceso *Representar*.

En el RA2.4 se plantea poder seguir una secuencia de razonamientos y revisar si la misma es válida; no significa que el sujeto la realiza, puede ser un texto escrito por otra persona lo que se estudia.

Los indicadores RA3.2 y RA3.3 muestran dos formas de razonar que son más complejas: usar integradamente conceptos y generalizar acciones o resultados.

El indicador RA3.4 refiere a poder identificar las condiciones y límites de los objetos matemáticos que se usan, y el RA3.5 al uso de elementos novedosos.

Los indicadores RA3.6 y RA3.7 refieren a condiciones de la estrategia de solución, el RA3.6 a valorar las dimensiones del problema y el RA3.7 a los pasos de la estrategia.

El indicador RA3.8 refiere al desarrollo de los razonamientos pero identificando los tipos de razonamiento o de pensamiento matemático (teorema, definición, conjeturas, …).

Tabla 3. Indicadores de grados del proceso *Plantear y resolver problemas*

Grado 1	Grado 2	Grado 3
PRP1.1 Resolver problemas con datos sencillos y enunciados de manera explícita que sólo admiten una única solución. PRP1.2 Resolver problemas que involucran la utilización de algoritmos, fórmulas, procedimientos, propiedades, o convenciones elementales. PRP1.3 Identificar problemas que se pueden plantear a partir de una situación dada matemática o de contexto real dada. PRP1.4 Identificar modelos matemáticos que ya han sido estudiados, que se encuentran explícitamente formulados y que permitirían explicar o representar situaciones matemáticas elementales o de contexto real. PRP1.5 Resolver problemas mediante la aplicación de un modelo que ya ha sido estudiado y que se encuentra explícitamente formulado.	*Si alguno o algunos de los indicadores siguientes en esta columna aparecen (y no hay indicadores de grado 3), se valorará la intervención del proceso con un grado 2:* PRP2.1 Plantear una estrategia correcta para resolver problemas que no han sido estudiados donde se identifiquen con claridad los procedimientos a utilizar. PRP2.2 Resolver problemas que no han sido estudiados a partir de una situación dada (matemática o de contexto real) donde se ejecuten acciones secuenciales descritas con claridad. PRP2.3 Resolver problemas que impliquen establecer conexiones entre distintas áreas matemáticas, o distintas formas de representación o de comunicación. PRP2.4 Plantear problemas a partir de una situación dada matemática o de contexto real que implique una estrategia de solución. PRP2.5 Identificar y usar modelos matemáticos que ya han sido estudiados, que no están explícitamente formulados y que permitirían explicar o representar situaciones elementales matemáticas o de contexto real.	*Si alguno o algunos de los indicadores siguientes en esta columna aparecen, se valorará la intervención del proceso con un grado 3:* PRP3.1 Resolver problemas que no han sido estudiados donde se seleccionen, comparen y evalúen diferentes estrategias. PRP3.2 Generalizar los resultados obtenidos en la resolución de problemas. PRP3.3 Plantear problemas a partir de una situación matemática o de contexto real que implique diferentes estrategias de solución o que sean de solución abierta. PTP3.4 Usar modelos matemáticos que no han sido estudiados, para representar o explicar situaciones (matemáticas o de contextos reales) identificando las limitaciones y los supuestos de los mismos.

En el indicador PRP1.1 de este proceso se consigna que se trata de una sola solución. En el indicador PRP1.2 se subraya el uso de procedimientos rutinarios sencillos en la resolución de un problema. Es muy probable que ambos indicadores aparezcan en un ítem, pero se prefiere distinguir por separado ambas dimensiones.

El indicador PRP1.3 refiere a que dada una situación se pueda identificar que un problema determinado puede plantearse, es decir que tiene sentido plantear ese problema para esa situación. No se pide elaborar el problema, solo ver si posee la correspondencia.

El indicador PRP1.4 refiere a modelos ya estudiados y formulados explícitamente, donde solo se realiza un acción de identificación. Mientras en el indicador PRP1.5 se resuelve problemas utilizando un modelo estudiado y formulado explícitamente.

En el grado 2 se consigna acciones como plantear una estrategia correcta con evidencia de los procedimientos a seguir para resolver un problema no estudiado, aunque no se pide resolverlo (PRP2.1) o que el problema se resuelva (PRP2.2) ejecutando todos los pasos.

Los indicadores PRP2.2 y PRP2.3 en el grado 2 se relacionan con los indicadores PRP3.1 y PRP3.2 en el grado 3. La diferencia más significativa es que en el grado 3 se demanda selección, comparación, evaluación del procedimiento usado (PRP3.1) y además se generalizan los resultados de la solución o estrategia (PRP3.2).

En el indicador PRP2.3 se hace referencia a la conexión entre áreas o el uso de varias representaciones. Aquí hay clara relación con los procesos *Conectar* y *Representar*.

Los indicadores PRP2.4 y PRP3.3 poseen relación en la acción de plantear problemas, la diferencia es que en el grado 2 se plantea para proporcionar una situación en donde haya una sola solución, mientras que en el grado 3 que haya varias soluciones o sea de solución abierta. Hay un nivel de mayor complejidad en el grado 3.

Los indicadores PRP1.3, PRP1.4, PRP2.5 y PRP3.4 refieren a los modelos. En el grado 1 se pide identificarlos (PRP1.3) aunque estén ya formulados explícitamente y en un contexto ya estudiado, o resolver usando un modelo estudiado y formulado explícitamente (PRP1.4); en el grado 2 además de identificar se deben usar y aunque ya estudiados los modelos no se encuentran explícitamente formulados. En el grado 3 los modelos no han sido estudiados, se usan en situaciones diversas y se deben consignar las condiciones y los límites de los mismos.

Tabla 4. Indicadores de grados del proceso *Conectar*

Grado 1	Grado 2	Grado 3
C1.1 Identificar conexiones entre conceptos o procedimientos matemáticos y una situación de contexto real similar a las ya estudiadas. C1.2 Relacionar conceptos o procedimientos matemáticos distintos dentro de una misma área matemática en la resolución de problemas.	*Si alguno o algunos de los indicadores siguientes en esta columna aparecen (y no hay indicadores de grado 3), se valorará la intervención del proceso con un grado 2:* C2.1 Usar la conexión entre conceptos o procedimientos matemáticos y una situación de contexto real para resolver problemas similares a los ya estudiados. C2.2 Relacionar conceptos o procedimientos matemáticos de dos o más áreas matemáticas diferentes en la resolución de problemas.	*Si alguno o algunos de los indicadores siguientes en esta columna aparecen, se valorará la intervención del proceso con un grado 3:* C3.1 Usar la conexión entre conceptos o procedimientos matemáticos y una situación de contexto real para resolver problemas no estudiados y relativamente complejos. C3.2 Relacionar conceptos o procedimientos matemáticos de dos o más asignaturas o disciplinas cognoscitivas diferentes en la resolución de un problema.

Los indicadores C1.1, C2.1 y C3.1 hacen referencia a la conexión entre matemáticas y contextos reales. En el grado 1 solo se pide que se puedan identificar las conexiones, en el grado 2 que se use la conexión en la resolución de un problema similar a uno ya estudiado, en el grado 3 que se use la conexión en problemas no estudiados y relativamente complejos.

Los indicadores C1.2, C2.2 y C3.2 hacen referencia a las conexiones dentro de un área matemática (C1.2), dos o más áreas matemáticas (C2.2), o con otras asignaturas (C3.2).

Los indicadores C1.2, C2.2 y C3.2 son algo generales. Es posible que el problema deba valorarse con mucho más precisión cuando aparecen.

Se debe comentar que un problema que no establece conexiones fuera del área o la asignatura, puede tener una gran complejidad en la intervención de los otros procesos. Por ejemplo, un problema dentro de Geometría (o Relaciones y álgebra u otra área) puede demandar una acción cognitiva muy fuerte en *Razonar y argumentar* o en *Plantear y resolver problemas.* Algo similar se podría decir cuando aparecen los indicadores C2.2 o el C3.2.

El número de indicadores en este proceso *Conectar* es menor que en los otros procesos, por lo que abre más posibilidades a tomar en cuenta al juzgar su intervención en un ítem.

Tabla 5. Indicadores de grados del proceso *Comunicar*

Grado 1	Grado 2	Grado 3
COM1.1 Identificar expresiones matemáticas estudiadas en textos dados similares a los estudiados (aportados de manera escrita o verbal). COM1.2 Interpretar expresiones matemáticas dadas en situaciones similares a las estudiadas para proceder a buscar una estrategia de solución. COM1.3 Reproducir los nombres y las propiedades básicas de objetos matemáticos ya estudiados. COM1.4 Comunicar en forma breve mediante representaciones matemáticas (verbales, numéricas, algebraicas, tabulares, estadísticas, gráficas) resultados de procedimientos rutinarios (por aplicación de algoritmos o propiedades, fórmulas, convenciones elementales, o un modelo que ya ha sido estudiado) que se desarrollan en la resolución de un problema ya estudiado.	*Si alguno o algunos de los indicadores siguientes en esta columna aparecen (y no hay indicadores de grado 3), se valorará la intervención del proceso con un grado 2:* COM2.1 Identificar expresiones matemáticas estudiadas en textos dados no similares a los estudiados (aportados de manera escrita o verbal). COM2.2 Interpretar o seguir una secuencia de razonamientos matemáticos, que usan conceptos o procedimientos matemáticos estudiados (expresados de manera oral o escrita) en la resolución de un problema. COM2.3 Describir mediante un lenguaje matemáticamente no preciso las acciones, resultados y razonamientos que ha efectuado en la solución de un problema. COM2.4 Comunicar conclusiones mediante lenguaje natural en torno a acciones, razonamientos y resultados que ha desarrollado en la resolución de un problema.	*Si alguno o algunos de los indicadores siguientes en esta columna aparecen, se valorará la intervención del proceso con un grado 3:* COM3.1 Interpretar o seguir una secuencia de razonamientos matemáticos abstractos no estudiados y complejos. COM3.2 Expresar ideas, acciones, argumentos y conclusiones usando lenguaje matemático y precisión matemática. COM3.3 Comunicar sus argumentos en la resolución de un problema o la realización de una prueba, usando relaciones más abstractas entre conceptos, métodos o resultados matemáticos (en especial relaciones lógicas).

Los indicadores COM1.1 y COM2.1 refieren a la identificación de expresiones matemáticas estudiadas en textos expresados por escrito o verbalmente, la diferencia es que en el grado 1 estos textos son similares a los estudiados mientras que en el grado 2 no lo son.

En los indicadores COM1.2, COM2.2 y COM3.1 se plantea interpretación de objetos matemáticos, no obstante en el grado 1 es solo la interpretación de una expresión (para buscar una estrategia de solución), en el grado 2 se plantea una interpretación de una secuencia de razonamientos con conceptos o procedimientos estudiados (indicador COM2.2), en el grado 3 el indicador COM3.1 refiere a interpretar y seguir una secuencia de razonamientos abstractos, no estudiados y complejos. En esta secuencia desde el grado 1 al 3 hay un incremento en la complejidad de la acción de comunicación que se plantea.

Los indicadores COM1.4, COM2.4 y COM3.3 tienen relación pero en diversos niveles de complejidad: en el grado 1 se comunican de manera breve mediante representaciones matemáticas resultados de procedimientos rutinarios en problemas estudiados, en el grado 2 se pide que se describa con un lenguaje matemáticamente no preciso las acciones, resultados y razonamientos (en este caso no rutinarios), en el grado 3 la comunicación es usando relaciones más abstractas.

La comunicación que se plantea en el indicador COM1.4 no permite incluir respuestas que se dan por medio de un ítem de selección única, aun a pesar que se da un cierto nivel de comunicación al expresar una respuesta.

Los indicadores COM2.3 y COM3.2 refieren a la comunicación, pero hay diferencias: en el indicador 2.3 es mediante lenguaje natural mientras que en el indicador COM3.2 es usando relaciones abstractas entre los conceptos, métodos o resultados matemáticos.

Los indicadores COM3.2 y COM3.3 consignan una intervención del proceso *Comunicar* donde participan precisión y lenguaje matemáticos así como relaciones más abstractas.

Tabla 6. Indicadores de grados del proceso *Representar*

Grado 1	Grado 2	Grado 3
R1.1 Identificar los datos que están presentes de forma explícita en representaciones* ya estudiadas de objetos matemáticos. R1.2 Usar solo una representación matemática para resolver o para modelar situaciones matemáticas o de un contexto real que han sido estudiadas. R1.3 Identificar dos más representaciones de objetos matemáticos en una situación dada.	*Si alguno o algunos de los indicadores siguientes en esta columna aparecen (y no hay indicadores de grado 3), se valorará la intervención del proceso con un grado 2:* R2.1 Interpretar y razonar sobre la información codificada en una representación matemática dada. R2.2 Pasar de una representación matemática a otra en la resolución de problemas. R2.3 Elaborar una representación matemática para interpretar o modelar una situación matemática o de contexto real no estudiada. R2.4 Usar dos representaciones matemáticas en la resolución de problemas estudiados.	*Si alguno o algunos de los indicadores siguientes en esta columna aparecen, se valorará la intervención del proceso con un grado 3:* R3.1 Pasar de una representación matemática a dos o más representaciones matemáticas en la resolución de problemas. R3.2 Usar tres o más representaciones matemáticas para aplicar en la resolución de problemas en contextos reales o matemáticos que no han sido estudiados y son complejos. R3.3 Combinar representaciones matemáticas distintas de manera creativa para interpretar y modelar una situación matemática o de contexto real. R3.4 Inventar nuevas formas de representación matemática en la resolución de problemas. R3.5 Evidenciar con claridad que se comprenden las ventajas y desventajas de cada representación en la resolución de problemas.

*En esta tabla las representaciones matemáticas pueden ser visuales, gráficas, numéricas, estadísticas, simbólicas o tabulares. Se acepta que al hablar de dos o más representaciones matemáticas estas pueden ser tanto del mismo tipo de representación (visual, gráfico, numérico, estadístico, simbólico, tabular) como de diferentes.

Los indicadores R1.1 y R2.1 refieren a la información que se codifica en representaciones. Sin embargo en el grado 1 la información está dada de forma explícita y se trata de representaciones estudiadas. En el grado 2 se pasa a interpretar y razonar sobre la información consignada en una representación dada.

El identificador R1.2 plantea que se pueda señalar la presencia de varias representaciones de objetos matemáticos, no plantea traducir una en otra (como hace el indicador R2.2) o usar dos representaciones como plantea R2.4.

El indicador R2.4 plantea solo usar 2 representaciones pero no pasar de una a otra (traducir una en términos de otra).

Los indicadores R1.2, R2.3, R2.4 y R3.2 poseen relación en el uso de representaciones, pero en el grado 1 se trata de una representación en situaciones ya estudiadas, mientras en el grado 2 se usa en situaciones no estudiadas. En el indicador R2.3 se plantea elaborar la representación y no solo interpretar y razonar a partir de ella. En el grado R2.4 se plantean el uso de dos representaciones en problemas estudiados, en el grado 3 el indicador R3.2 plantea usar más de dos representaciones y en situaciones no estudiadas y complejas. Es decir, en el grado 3 el indicador R3.2 va más lejos de lo que plantean los indicadores R2.3 y R2.4. Se cuantifica el número de representaciones para que quede aun más claro el instrumento.

Los indicadores R2.2 y R3.1 tienen relación pues plantean el paso de una representación a otras, pero en el grado 2 se plantea una sola traducción o conversión, en el grado 3 el paso se plantea de una a dos o más representaciones.

Los indicadores R3.3 y R3.4 refieren a un uso de las representaciones: combinaciones de representaciones de manera novedosa o creativas, o a evidenciar que se comprenden las ventajas y desventajas de cada representación.

El indicador R3.5 refiere a la consignación de las ventajas de una representación en la resolución de problemas. Este es un indicador que expresa un dominio muy grande del uso de representaciones.

Los diversos indicadores se colocan en la tabla siguiente:

Tabla 7. 61 Indicadores de los grados de procesos matemáticos

Grado1	Grado 2	Grado 3	
RA1.1 Identificar la información presente de forma explícita en situaciones matemáticas o de contexto real. RA1.2 Desarrollar procedimientos rutinarios siguiendo instrucciones directas. RA1.3 Responder a preguntas donde está presente de forma explícita toda la información necesaria para encontrar la solución (preguntas directas como ¿cuántos? ¿cuánto es?). RA1.4 Efectuar razonamientos directos o realizar interpretaciones que se extraen literalmente de los resultados en la aplicación de un procedimiento. RA1.5 Describir los procesos de cálculo o los resultados cuantitativos obtenidos al resolver un problema en una situación matemática o de contexto real ya estudiada.	RA2.1 Identificar información matemática que no está dada de manera explícita en una situación matemática o de contexto. RA2.2 Responder a preguntas donde la respuesta no es directa y amerita mayor argumentación (por ejemplo: ¿cómo hallamos? ¿qué tratamiento matemático damos? ¿qué puede o no puede pasar y por qué? ¿qué sabemos? ¿qué queremos obtener?). RA2.3 Brindar las soluciones de las preguntas cuando sea pertinente mediante diferentes representaciones: tablas, gráficos, medidas estadísticas, elementos algebraicos, cifras, etc. RA2.4 Evaluar la validez de una secuencia no compleja de argumentos matemáticos (por ejemplo escrita en un texto o en una exposición). RA2.5 Elaborar argumentos basados en sus propias acciones al resolver problemas similares a los ya estudiados.	RA3.1 Realizar argumentos matemáticos para resolver problemas o describir situaciones (matemáticas o de contexto real) no estudiados y complejos. RA3.2 Desarrollar argumentos que utilizan integradamente distintos conceptos o métodos matemáticos para resolver un problema. RA3.3 Generalizar los métodos matemáticos utilizados o resultados obtenidos en la resolución de problemas. RA3.4 Realizar razonamientos matemáticos donde se muestra que se comprende la amplitud y los límites de los objetos matemáticos usados y de los procedimientos desarrollados. RA3.5 Formular conceptos novedosos en la resolución de problemas o descripción de una situación (matemática o de contexto real). RA3.6 Realizar razonamientos donde se señalan cuáles son los aspectos esenciales del problema o situación y cómo están relacionados los diferentes objetos matemáticos que participan. RA3.7 Consignar en la resolución de un problema los elementos cruciales de la estrategia seguida. RA3.8 Realizar razonamientos matemáticos en situaciones específicas donde se consignan las diferencias entre definiciones, teoremas, conjeturas, hipótesis o afirmaciones.	18 Indicadores *Razonar y argumentar*

Grado1	Grado 2	Grado 3	
PRP1.1 Resolver problemas con datos sencillos y enunciados de manera explícita que sólo admiten una única solución. PRP1.2 Resolver problemas que involucran la utilización de algoritmos, fórmulas, procedimientos, propiedades, o convenciones elementales. PRP1.3 Identificar problemas que se pueden plantear a partir de una situación dada matemática o de contexto real dada. PRP1.4 Identificar modelos matemáticos que ya han sido estudiados, que se encuentran explícitamente formulados y que permitirían explicar o representar situaciones matemáticas elementales o de contexto real. PRP1.5 Resolver problemas mediante la aplicación de un modelo que ya ha sido estudiado y que se encuentra explícitamente formulado.	PRP2.1 Plantear una estrategia correcta para resolver problemas que no han sido estudiados donde se identifiquen con claridad los procedimientos a utilizar. PRP2.2 Resolver problemas que no han sido estudiados a partir de una situación dada (matemática o de contexto real) donde se ejecuten acciones secuenciales descritas con claridad. PRP2.3 Resolver problemas que impliquen establecer conexiones entre distintas áreas matemáticas, o distintas formas de representación o de comunicación. PRP2.4 Plantear problemas a partir de una situación dada matemática o de contexto real que implique una estrategia de solución. PRP2.5 Identificar y usar modelos matemáticos que ya han sido estudiados, que no están explícitamente formulados y que permitirían explicar o representar situaciones elementales matemáticas o de contexto real.	PRP3.1 Resolver problemas que no han sido estudiados donde se seleccionen, comparen y evalúen diferentes estrategias. PRP3.2 Generalizar los resultados obtenidos en la resolución de problemas. PRP3.3 Plantear problemas a partir de una situación matemática o de contexto real que implique diferentes estrategias de solución o que sean de solución abierta. PRP3.4 Usar modelos matemáticos que no han sido estudiados, para representar o explicar situaciones (matemáticas o de contextos reales) identificando las limitaciones y los supuestos de los mismos.	14 Indicadores *Plantear y resolver problemas*
C1.1 Identificar conexiones entre conceptos o procedimientos matemáticos y una situación de contexto real similar a las ya estudiadas. C1.2 Relacionar conceptos o procedimientos matemáticos distintos dentro de una misma área matemática en la resolución de problemas.	C2.1 Usar la conexión entre conceptos o procedimientos matemáticos y una situación de contexto real para resolver problemas similares a los ya estudiados. C2.2 Relacionar conceptos o procedimientos matemáticos de dos o más áreas matemáticas diferentes en la resolución de problemas.	C3.1 Usar la conexión entre conceptos o procedimientos matemáticos y una situación de contexto real para resolver problemas no estudiados y relativamente complejos. C3.2 Relacionar conceptos o procedimientos matemáticos de dos o más asignaturas o disciplinas cognoscitivas diferentes en la resolución de un problema.	6 indicadores *Conectar*

Grado1	Grado 2	Grado 3	
COM1.1 Identificar expresiones matemáticas estudiadas en textos dados similares a los estudiados (aportados de manera escrita o verbal). COM1.2 Interpretar expresiones matemáticas dadas en situaciones similares a las estudiadas para proceder a buscar una estrategia de solución. COM1.3 Reproducir los nombres y las propiedades básicas de objetos matemáticos ya estudiados. COM1.4 Comunicar en forma breve mediante representaciones matemáticas (verbales, numéricas, algebraicas, tabulares, estadísticas, gráficas) resultados de procedimientos rutinarios (por aplicación de algoritmos o propiedades, fórmulas, convenciones elementales, o un modelo que ya ha sido estudiado) que se desarrollan en la resolución de un problema ya estudiado.	COM2.1 Identificar expresiones matemáticas estudiadas en textos dados no similares a los estudiados (aportados de manera escrita o verbal). COM2.2 Interpretar o seguir una secuencia de razonamientos matemáticos, que usan conceptos o procedimientos matemáticos estudiados (expresados de manera oral o escrita) en la resolución de un problema. COM2.3 Describir mediante un lenguaje matemáticamente no preciso las acciones, resultados y razonamientos que ha efectuado en la solución de un problema. COM2.4 Comunicar conclusiones mediante lenguaje natural en torno a acciones, razonamientos y resultados que ha desarrollado en la resolución de un problema.	COM3.1 Interpretar o seguir una secuencia de razonamientos matemáticos abstractos no estudiados y complejos. COM3.2 Expresar ideas, acciones, argumentos y conclusiones usando lenguaje matemático y precisión matemática. COM3.3 Comunicar sus argumentos en la resolución de un problema o la realización de una prueba, usando relaciones más abstractas entre conceptos, métodos o resultados matemáticos (en especial relaciones lógicas).	11 Indicadores *Comunicar*

Grado1	Grado 2	Grado 3	
R1.1 Identificar los datos que están presentes de forma explícita en representaciones (verbales, numéricas, algebraicas, tabulares, estadísticas, gráficas) ya estudiadas de objetos matemáticos. R1.2 Usar solo una representación matemática para resolver o para modelar situaciones matemáticas o de un contexto real que han sido estudiadas. R1.3 Identificar dos más representaciones de objetos matemáticos en una situación dada.	R2.1 Interpretar y razonar sobre la información codificada en una representación matemática dada. R2.2 Pasar de una representación matemática a otra en la resolución de problemas. 2.3 Elaborar una representación matemática para interpretar o modelar una situación matemática o de contexto real no estudiada. R2.4 Usar dos representaciones matemáticas en la resolución de problemas estudiados.	R3.1 Pasar de una representación matemática a dos o más representaciones matemáticas en la resolución de problemas. R3.2 Usar tres o más representaciones matemáticas para aplicar en la resolución de problemas en contextos reales o matemáticos que no han sido estudiados y son complejos. R3.3 Combinar representaciones matemáticas distintas de manera creativa para interpretar y modelar una situación matemática o de contexto real. R3.4 Inventar nuevas formas de representación matemática en la resolución de problemas. R3.5 Evidenciar con claridad que se comprenden las ventajas y desventajas de cada representación en la resolución de problemas.	12 Indicadores *Representar*
19 indicadores Grado 1	20 indicadores Grado 2	22 indicadores Grado 3	61 indicadores en total

Estructura de intervención de procesos usando el modelo completo

La colección de indicadores de los procesos que participan en un problema se puede convencionalmente llamar: *Estructura de intervención de procesos en un problema* (EIPP). Esta se podría representar al menos de tres maneras que describimos a continuación.

Primera representación

Una tabla con dos columnas: en la primera se colocan los nombres de los procesos ocupando cada uno una celda, en la segunda se consignan los códigos junto al enunciado de los indicadores de cada proceso dentro de la celda ubicada en la misma fila en que se encuentra el proceso, cada indicador ocupará un párrafo dentro de la celda. Por ejemplo:

Tabla 8. Primera representación de la estructura de intervención de procesos en un problema

Procesos-capacidades	Indicadores
Razonar y argumentar	RA1.1 Identificar la información presente de forma explícita en situaciones matemáticas o de contexto real RA1.2 Desarrollar procedimientos rutinarios siguiendo instrucciones directas. RA1.3 Responder a preguntas donde está presente de forma explícita toda la información necesaria para encontrar la solución (preguntas directas como ¿cuántos? ¿cuánto es?).
Plantear y resolver problemas	PRP1.5 Resolver problemas mediante la aplicación de un modelo que ya ha sido estudiado y que se encuentra explícitamente formulado.
Conectar	C2.1 Usar la conexión entre conceptos o procedimientos matemáticos y una situación de contexto real para resolver problemas similares a los ya estudiados.
Comunicar	COM1.2 Reproducir los nombres y las propiedades básicas de objetos matemáticos ya estudiados, mencionando cálculos y resultados.
Representar	R2.2 Pasar de una forma de representación matemática a otra en la resolución de problemas.

Segunda representación

Los códigos junto al enunciado de los indicadores de cada proceso ocupando cada indicador un párrafo, si se desea pueden colocarse como un listado. Por ejemplo:

EIIP

- RA1.1 Identificar la información presente de forma explícita en situaciones matemáticas o de contexto real
- RA1.2 Desarrollar procedimientos rutinarios siguiendo instrucciones directas.
- RA1.3 Responder a preguntas donde está presente de forma explícita toda la información necesaria para encontrar la solución (preguntas directas como ¿cuántos? ¿cuánto es?).
- PRP1.5 Resolver problemas mediante la aplicación de un modelo que ya ha sido estudiado y que se encuentra explícitamente formulado.

Tercera representación

Los códigos de los indicadores seguidos, separados por comas. Por ejemplo:

EIPP: RA1.1, RA1.2, RA1.3, PRP1.5, C2.1, COM1.2, R2.2.

La EIPP permite consignar la intervención de los cinco procesos en un problema. Más adelante se verá cómo esta estructura se puede asociar a niveles de complejidad.

Las representaciones son equivalentes y la utilización de cada una de ellas es cuestión de conveniencia, en ocasiones la primera o la segunda pueden resultar más adecuadas para poder tener “muy cerca” los indicadores dentro de un discurso, la tercera representación puede ser la más adecuada si lo que se busca es tener rápidamente de forma visual los indicadores para derivar una conclusión.

Algunas observaciones sobre grados de procesos

En la aplicación de este modelo conviene tomar en cuenta las siguientes observaciones.

1. Se va a aceptar **por convención** que con solo un indicador del grado mayor de un proceso, el grado del proceso es precisamente

el del indicador de ese grado mayor. Por ejemplo, siempre que no haya indicadores del grado 3: a) si en un ítem se identifica en el proceso *Razonar y argumentar* el indicador RA2.4 el grado del proceso sería 2, b) si se identifica en el proceso *Conectar* el indicador C2.2 entonces el grado del proceso *Conectar* en el problema es 2. Con un solo indicador del grado 3, por ejemplo 3.2 en cualquier proceso, se valora la intervención del proceso con grado 3.

2. En este modelo la presencia de un indicador de grado 2 no implica que todos los indicadores de grado 1 deban aparecer. Si aparece un indicador en un proceso de grado 2 este indicador es el que se señalaría para valorar el grado de intervención del proceso. Es decir, si el indicador de *Comunicar* es COM2.2 entonces no se deberían colocar los indicadores del grado 1 en ese proceso. Sí se deben colocar otros indicadores de grado 2 (COM2.3, COM2.4, etc.) si esto fuera pertinente. Los indicadores de cada grado están definidos de tal manera que un indicador similar en el grado 1 estaría incluido de alguna manera en el indicador del grado 2 correspondiente.

3. En este modelo la presencia de un indicador de grado 3 no implica que todos los indicadores de grado 1 o 2 deban aparecer. Si aparece un indicador en un proceso de grado 3 este indicador es el que se señalaría para valorar el grado de intervención del proceso. Es decir, si el indicador de *Comunicar* es COM3.2 entonces no se deberían colocar los indicadores del grado 1 o 2 en ese proceso. Sí se deben colocar otros indicadores de grado 3 (COM3.3, COM3.4, etc.) si esto fuera pertinente. Los indicadores de cada grado están definidos de tal manera que un indicador similar en el grado 1 o 2 estaría incluido de alguna manera en el indicador del grado 3 correspondiente.

4. Es importante tomar en cuenta siempre el nivel educativo, la habilidad general y las habilidades específicas que están en juego para poder valorar el grado de intervención del proceso-capacidad.

5. También es crucial subrayar que cuando se incluyen en los indicadores situaciones o métodos con los términos “ya estudiados” o “similares a los ya estudiados”, se consigna algo que es relativo. Para un estudiante un objeto o una situación puede haber sido estudiada y en otro caso no. En la acción de aula se podría identificar la situación; sin embargo en pruebas nacionales es algo distinto, el criterio debe ajustarse en esencia a lo que el currículo establece que debe haberse estudiado. Este elemento de “relatividad” obliga en todo caso a una aproximación flexible.

6. Los grados de los procesos se pueden aplicar en todos los niveles educativos. Los conocimientos y habilidades involucradas, sin embargo, pueden determinar que un grado sea 1 en el año lectivo 6 pero 2 en el año lectivo 3. Por ejemplo, en el proceso *Plantear y resolver problemas* tenemos el indicador PRP2.4 y el PRP3.4: aquí se provoca una diferencia si se han estudiado o no los modelos. Si se trata de una tarea que implica que los modelos ya fueron estudiados el grado sería 2, pero si no lo fueron entonces sería de grado 3.
7. A la hora de determinar el grado de un proceso en un ítem de una prueba nacional de Bachillerato se acepta que se debe *aproximar la complejidad de la tarea* de acuerdo al currículo para el Ciclo Diversificado. Por ejemplo, el indicador para el grado del proceso *Representar* R2.2 se debe entender en relación con los conocimientos y habilidades de ese ciclo según están en el currículo.
8. Se debe entender además que al tomar como base los conocimientos y habilidades del ciclo para establecer el grado del proceso, no se debe perder de vista que *en la realidad de aula* en el país puede que estos contenidos no se hayan estudiado plenamente. Y eso significa que es posible que con base en el currículo el grado del proceso sea por ejemplo 1, en la realidad de aula la complejidad sea de grado 2. Eso plantea como política general que en la construcción de una prueba nacional se deben modular con inteligencia los grados que incluyan sus ítems.
9. El potente instrumento que nos aportan los grados de los procesos permite analizar muchos problemas e ítems de manera más fácil, pero siempre habrá situaciones donde la valoración específica del ítem será la esencial; se obliga a un análisis más complejo e integrador.
10. La colección de indicadores de grados de procesos que se ofrece en este trabajo no puede concebirse de manera absoluta y definitiva: los indicadores podrán ajustarse en próximos años con base en acciones de validación tanto con docentes como con estudiantes.

Cinco criterios para valorar niveles de complejidad en el modelo completo

En el currículo costarricense de Matemáticas se introdujeron tres niveles de complejidad con el propósito de que en la acción educativa se estimularan capacidades cognitivas superiores de manera creciente dentro de una estrategia nacional. Los términos que se usaron fueron tomados del marco teórico de las pruebas PISA de la OCDE en el 2003, aunque no corresponden enteramente a lo que PISA entendía por ellos. Podrían haberse denominado de otra manera, por ejemplo: *Nivel de complejidad A, Nivel de complejidad B, Nivel de complejidad C*. Lo importante es comprender la asociación estrecha que tienen esos niveles con los procesos.

Con base en los textos del programa de estudios, es posible sistematizar algunos indicadores para consignar el nivel de complejidad de un problema.

Tabla 9. Niveles de complejidad de un problema: indicadores en el currículo

Nivel A: Reproducción	Nivel B: Conexión	Nivel C: Reflexión
Reconocer objetos o métodos matemáticos equivalentes. Identificar objetos matemáticos o propiedades matemáticas sencillas dentro de una situación familiar dada. Realizar procedimientos rutinarios y aplicar algoritmos estándar, en ambientes familiares al estudiante. Identificar y escribir de manera sencilla aunque coherente matemáticamente, expresiones que poseen símbolos, fórmulas y cómputos no complicados.	Interpretar una situación matemática con exigencia mayor que en el nivel de reproducción. Resolver problemas que no son rutinarios pero se desarrollan en ambientes familiares al estudiante. Conectar distintas representaciones de una situación (algebraicas, numéricas, gráficas, etc.). Conectar elementos matemáticos dentro de un área o que relacionan dos o más áreas matemáticas.	Plantear y resolver problemas complejos. Argumentar, justificar, y generalizar la resolución de problemas complejos. Comprobar si los resultados obtenidos corresponden a las condiciones de partida del problema. Comunicar los resultados de la aplicación de estrategias con lenguaje matemático y precisión matemática. Conectar elementos matemáticos de dos o más asignaturas.
Fuente: MEP, 2012.		

Estos indicadores constituyen una guía pero es posible ofrecer ahora una mejor orientación con base en la identificación de los grados de los procesos que se ha consignado en este documento. No es difícil darse cuenta que estos indicadores para *reproducción* tienen una estrecha relación con los indicadores del grado 1 de procesos, aquellos para *conexión* con el grado 2 y los de *reflexión* con el grado 3.

Figura 11. Los procesos-capacidades determinan el nivel de complejidad

El punto teórico de partida es que los procesos (o capacidades que implican) determinan los niveles de complejidad. Si se establece el papel preciso de intervención de esos procesos en un problema, será posible identificar el nivel de complejidad. Puesto en los términos introducidos en este documento: la *estructura de intervención de los procesos en un problema* (colección de indicadores en los tres grados en los cinco procesos) nos ayuda a identificar el nivel de complejidad del mismo.

Luego de comprender esa relación lo que procede es establecer un modelo **por conveniencia y convención**, y aportar criterios funcionales. Aquí se usarán los siguientes criterios:

- NC1: cuando en un problema la intervención de los procesos no supera el grado 1, se acepta que el problema es de *reproducción*.

- NC2: cuando en un problema la intervención en al menos dos procesos es de grado 2 y se pueden identificar al menos tres indicadores en ese grado, se acepta que el problema es de *conexión*.
- NC3: cuando en un problema la intervención en al menos dos procesos es de grado 3 y se pueden identificar al menos tres indicadores en ese grado, se acepta que el problema es de *reflexión*.

Cuando no se puedan aplicar directamente los criterios NC1, NC2 y NC3 se propone realizar una valoración específica del ítem que, en general, dependerá de los indicadores del grado mayor:

- NC4: cuando en un problema la intervención de procesos es de grados 2 o 1 y el número de los indicadores en el grado 2 es menor que tres, se requerirá hacer una valoración más específica para establecer si es de *reproducción* o *conexión*. Dependerá de la "fuerza" del indicador o indicadores de grado 2 para poder valorar el problema como de *conexión*.

  También este criterio aplica cuando en un problema aparecen tres indicadores de grado 2 en un proceso matemático y en los otros procesos los indicadores no sobrepasan el grado 1.
- NC5: cuando en un problema la intervención de procesos es de grado 3, 2 o 1 y el número de los indicadores en el grado 3 es menor que tres, se requerirá hacer una valoración más específica para establecer si es de *reproducción*, *conexión* o *reflexión*. Dependerá de la "fuerza" del indicador o indicadores de grado 3 para poder valorar el problema como de *reflexión*.

  También este criterio aplica cuando en un problema aparecen tres indicadores de grado 3 en un proceso matemático y en los otros procesos los indicadores no sobrepasan los grados 1 o 2.

En la valoración de un problema se propone seguir la secuencia representada en el diagrama:

Figura 12. Secuencia para valorar grados de procesos y niveles de complejidad

Entonces: la aplicación de este modelo propone que el primer paso es valorar los grados de los procesos.

Estos criterios o este modelo buscan facilitar y hasta cierto punto "automatizar" el reconocimiento de los niveles de complejidad con base en un análisis de los grados de intervención de los procesos matemáticos. Es importante comprender, no obstante, que debe aplicarse de una manera flexible, y que siempre habrá problemas o ítems donde será complejo identificar su nivel.

Es necesario señalar que los procesos-capacidades no tienen el mismo impacto en un problema o ítem. Los procesos *Razonar y argumentar* y *Plantear y resolver problemas* puede decirse que son más decisivos en la valoración global de la complejidad de un problema. Por ejemplo, este podría ser el caso de un problema o ítem donde un indicador de un solo proceso permita valorar el nivel de complejidad como el de *conexión*.

Es importante insistir en que se debe tener *flexibilidad* en la aplicación de este modelo.

Ejemplos teóricos de valoración de niveles de complejidad con el modelo completo

En lo que sigue se presentan algunos ejemplos, donde se aporta la estructura de intervención de procesos (EIPP) del problema y el nivel de complejidad o una consideración sobre el mismo, para mostrar cómo se aplicaría este modelo.

Nivel de reproducción mediante criterio NC1

La EIPP de un problema es:

Procesos-capacidades	Indicadores
Razonar y argumentar	RA1.1 Identificar la información presente de forma explícita en situaciones matemáticas o de contexto real. 1.2 Desarrollar procedimientos rutinarios siguiendo instrucciones directas.
Plantear y resolver problemas	PRP1.4 Identificar modelos matemáticos que ya han sido estudiados, que se encuentran explícitamente formulados y que permitirían explicar o representar situaciones matemáticas elementales o de contexto real.
Conectar	
Comunicar	COM1.2 Interpretar expresiones matemáticas dadas en situaciones similares a las estudiadas para proceder a buscar una estrategia de solución.
Representar	R1.1 Identificar los datos que están presentes de forma explícita en representaciones ya estudiadas de objetos matemáticos.

Todos los indicadores de los procesos en el ejemplo 1 son de grado 1. Y no se plantea indicador en el proceso *Conectar*. Es de *reproducción*.

Nivel de conexión mediante criterio NC2

En una tarea matemática se tiene EIPP: RA2.6, PRP1.4, C2.1, COM1.2, R2.3. En este ejemplo hay tres indicadores de grado 2 en tres procesos *Razonar y argumentar*, *Conectar* y *Representar*. Cumple con el criterio NC2.

Nivel de reflexión mediante criterio NC3

En una tarea matemática se tiene EIPP: RA3.4, PRP3.3, C2.1, C2.2, COM2.2, R3.2. En este ejemplo hay tres procesos con indicadores de grado 3: *Razonar y argumentar*, *Plantear y resolver problemas*, *Representar*. Cumple con el criterio NC3. El ejemplo es de *reflexión*.

El criterio NC4

EIPP:

- RA1.1 Identificar la información presente de forma explícita en situaciones matemáticas o de contexto real.
- RA1.2 Desarrollar procedimientos rutinarios siguiendo instrucciones directas.
- RA1.3 Responder a preguntas donde está presente de forma explícita toda la información necesaria para encontrar la solución (preguntas directas como ¿cuántos? ¿cuánto es?).
- PRP1.5 Resolver problemas mediante la aplicación de un modelo que ya ha sido estudiado y que se encuentra explícitamente formulado.
- C2.1 Usar la conexión entre conceptos o procedimientos matemáticos y una situación de contexto real para resolver problemas similares a los ya estudiados.
- COM1.2 Reproducir los nombres y las propiedades básicas de objetos matemáticos ya estudiados, mencionando cálculos y resultados.
- R2.2 Pasar de una representación matemática a otra en la resolución de problemas.

Hay dos indicadores en grado 2 en el ejemplo 2 en los procesos *Conectar* y *Representar*. No se cumple con el criterio NC2 que pide no solo dos procesos con indicadores de grado 2 sino, también, al menos tres indicadores. Se debe utilizar el criterio NC4.

Modelo simplificado para valorar procesos y niveles de complejidad

En esta sección vamos a ofrecer un modelo simplificado para apoyar la valoración del nivel de complejidad de un problema o tarea matemática con base en los indicadores de grados de procesos que hemos introducido en este trabajo[12]. Este modelo incluye:

- 30 indicadores de la intervención de los procesos.
- 1 criterio para la valoración de niveles de complejidad a partir de la EIPP.

En ciertas tareas esta versión puede favorecer rápidamente una valoración sin tener que acudir al conjunto de los 61 indicadores y 5 criterios ya formulados. Se usa un subconjunto de los indicadores de los grados de los procesos, y solo un criterio; el cual no es ninguno de los criterios que se incluyen en el modelo completo.

Tabla 10. 30 indicadores de grados de procesos[13]

Grado 1	Grado 2	Grado 3	
RA1.3 [11] Responder a preguntas donde está presente de forma explícita toda la información necesaria para encontrar la solución (preguntas directas como ¿cuántos? ¿cuánto es?). RA1.4 Efectuar razonamientos directos o realizar interpretaciones que se extraen literalmente de los resultados en la aplicación de un procedimiento.	RA2.1 Identificar información matemática que no está dada de manera explícita en una situación matemática o de contexto. RA2.2 Responder a preguntas donde la respuesta no es directa y amerita mayor argumentación (por ejemplo: ¿cómo hallamos? ¿qué tratamiento matemático damos? ¿qué puede o no puede pasar y por qué? ¿qué sabemos? ¿qué queremos obtener?).	RA3.1 Realizar argumentos matemáticos para resolver problemas o describir situaciones (matemáticas o de contexto real) no estudiados y complejos. RA3.4 Realizar razonamientos matemáticos donde se muestra que se comprende la amplitud y los límites de los objetos matemáticos usados y de los procedimientos desarrollados.	6 Indicadores *Razonar y argumentar*

12 Este modelo fue validado con base en el trabajo de Hugo Barrantes, Johanna Mena y Edwin Chaves.

13 Se usa la misma codificación de los indicadores de grados de procesos del modelo completo.

Grado 1	Grado 2	Grado 3	
PRP1.1 Resolver problemas con datos sencillos y enunciados de manera explícita que sólo admiten una única solución. PRP1.2 Resolver problemas que involucran la utilización de algoritmos, fórmulas, procedimientos, propiedades, o convenciones elementales.	PRP2.1 Plantear una estrategia correcta para resolver problemas que no han sido estudiados donde se identifiquen con claridad los procedimientos a utilizar. PRP2.2 Resolver problemas que no han sido estudiados a partir de una situación dada (matemática o de contexto) donde se ejecuten acciones secuenciales descritas con claridad.	PRP3.1 Resolver problemas que no han sido estudiados donde se seleccionen, comparen y evalúen diferentes estrategias. PRP3.3 Plantear problemas a partir de una situación matemática o de contexto que implique diferentes estrategias de solución o que sean de solución abierta.	6 Indicadores *Plantear y resolver problemas*
C1.1 Identificar conexiones entre conceptos o procedimientos matemáticos y una situación de contexto real similar a las ya estudiadas. C1.2 Relacionar conceptos o procedimientos matemáticos distintos dentro de una misma área matemática en la resolución de problemas.	C2.1 Usar la conexión entre conceptos o procedimientos matemáticos y una situación de contexto real para resolver problemas similares a los ya estudiados. C2.2 Relacionar conceptos o procedimientos matemáticos de dos o más áreas matemáticas diferentes en la resolución de problemas.	C3.1 Usar la conexión entre conceptos o procedimientos matemáticos y una situación de contexto real para resolver problemas no estudiados y relativamente complejos. C3.2 Relacionar conceptos o procedimientos matemáticos de dos o más asignaturas o disciplinas cognoscitivas diferentes en la resolución de un problema.	6 Indicadores *Conectar*

Grado 1	Grado 2	Grado 3	
COM1.1 Identificar expresiones matemáticas estudiadas en textos dados similares a los estudiados (aportados de manera escrita o verbal). COM1.4 Comunicar en forma breve mediante representaciones matemáticas (verbales, numéricas, algebraicas, tabulares, estadísticas, gráficas) resultados de procedimientos rutinarios (por aplicación de algoritmos o propiedades, fórmulas, convenciones elementales, o un modelo que ya ha sido estudiado) que se desarrollan en la resolución de un problema ya estudiado.	COM2.2 Interpretar o seguir una secuencia de razonamientos matemáticos, que usan conceptos o procedimientos matemáticos estudiados (expresados de manera oral o escrita) en la resolución de un problema. COM2.4 Comunicar conclusiones mediante lenguaje natural en torno a acciones, razonamientos y resultados que ha desarrollado en la resolución de un problema.	COM3.1 Interpretar o seguir una secuencia de razonamientos matemáticos abstractos no estudiados y complejos. COM3.3 Comunicar sus argumentos en la resolución de un problema o la realización de una prueba, usando relaciones más abstractas entre conceptos, métodos o resultados matemáticos (en especial relaciones lógicas).	6 Indicadores *Comunicar*
R1.2 Usar solo una representación matemática para resolver o para modelar situaciones matemáticas o de un contexto real que han sido estudiadas. R1.3 Identificar dos más representaciones de objetos matemáticos en una situación dada.	R2.1 Interpretar y razonar sobre la información codificada en una representación matemática dada. R2.4 Usar dos representaciones matemáticas en la resolución de problemas estudiados.	R3.2 Usar tres o más representaciones matemáticas para aplicar en la resolución de problemas en contextos reales o matemáticos que no han sido estudiados y son complejos. R3.5 Evidenciar con claridad que se comprenden las ventajas y desventajas de cada representación en la resolución de problemas.	6 Indicadores *Representar*
10 indicadores Grado 1	10 indicadores Grado 2	10 indicadores Grado 3	**30 indicadores en total**

En general se propone que al seleccionar los indicadores de un problema se establezca el indicador del grado superior que refiera a una dimensión similar que se está valorando y por lo tanto no tenga el indicador del grado precedente. Por ejemplo en un problema donde se identifica “C2.1 Usar la conexión entre conceptos o procedimientos matemáticos y una situación de contexto real para resolver problemas similares a los ya estudiados” podría ser que también se involucre “C1.1 Identificar conexiones entre conceptos o procedimientos matemáticos y una situación de contexto real similar a las ya estudiadas”. La idea es que solo se quede el indicador C2.1.

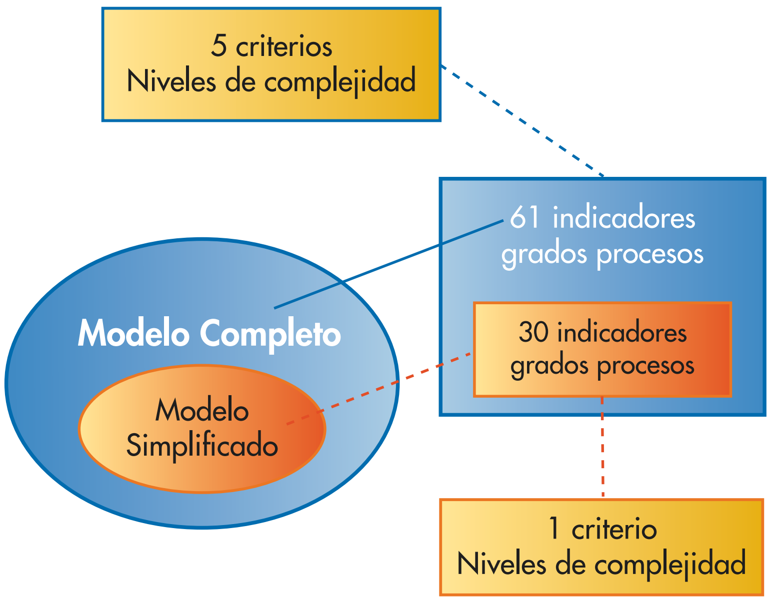


Figura 13. Modelos completo y simplificado para valorar procesos y niveles de complejidad.

Criterio simplificado para valorar niveles de complejidad

Este criterio plantea dos opciones:

- NCS1. Cuando en un problema hay al menos 3 indicadores de un grado N en los procesos se valorará el nivel de complejidad del problema de la siguiente manera:
  - ◊ N=1, nivel de complejidad *reproducción*.
  - ◊ N=2, nivel de complejidad *conexión*.
  - ◊ N=3, nivel de complejidad *reflexión*.

Si hubiera un problema en que los indicadores "empatan" en grados distintos, se asumirá el nivel de complejidad superior, por ejemplo: si se tuvieran 3 indicadores de grado 1 y 3 de grado 2 en dos procesos en cada caso, se valora el problema de *conexión*.

- NCS2. Cuando no se cumple NCS1 (de los 3 indicadores): se debe valorar la situación especial y tomar una decisión con base en los indicadores que se juzguen más decisivos para establecer el nivel de complejidad; por ejemplo, cuando en un problema no sea posible identificar 3 indicadores de un grado N.

Con este modelo la EIPP se puede consignar de la misma manera que se hace con el completo.

Este modelo simplificado podría ser instrumental para valorar niveles de complejidad en una cantidad de problemas, sin embargo inevitablemente es menos potente que el modelo completo. Puede verse también como un paso preliminar: cuando su utilización no aporte suficientes elementos para la valoración, se deberá acudir al modelo general.

En la figura anterior se representa los modelos completo y simplificado para valorar procesos y niveles de complejidad.

La estrategia “4 + 6” para la valoración de tareas matemáticas

La selección o diseño de las tareas matemáticas de acuerdo con el currículo es un proceso crucial. Ahora bien, lo que esto implica se puede beneficiar si se tiene a mano una estrategia para determinar la naturaleza de la tarea o el problema en términos del currículo; es lo que llamamos “valoración”. Ya sea que se haya encontrado la tarea en un texto, en un medio audiovisual, o se haya inventado o elaborado, la misma debe ser objeto de una valoración que permita establecer su pertinencia curricular. Esta valoración permitiría aportar elementos para seleccionar o incorporar la tarea en la acción educativa en la forma o en el momento adecuado, o brindar insumos para avanzar en el diseño de la tarea.

Empecemos por una clarificación de términos. Hemos usado “tarea matemática” y “problema” de manera flexible. Podemos afirmar que en un problema matemático aparece una o varias tareas matemáticas de menor complejidad; es decir: “tarea” matemática” puede verse como un componente de un problema, aunque el lenguaje puede permitir considerar un problema completo como si fuera una sola tarea. En general, nos inclinamos por la primera aproximación. La valoración usando los elementos curriculares se podría efectuar incluyendo una o varias tareas. Si en una situación hay varias tareas, representadas por T_1, T_2, T_3, …T_n, es posible agruparlas de diversas maneras para diseñar un problema (T_1, T_2 y T_3, o T_2 con T_8, o solo T_5). La decisión sobre qué tareas matemáticas juntar y a las cuales aplicar la valoración debe ser decidida con base en las necesidades o los propósitos educativos y también con base en el sentido y pertinencia que posea en relación con la situación, no todo agrupamiento se vale.

Una representación de esta posibilidad de manipular las tareas lo representamos con la figura siguiente.

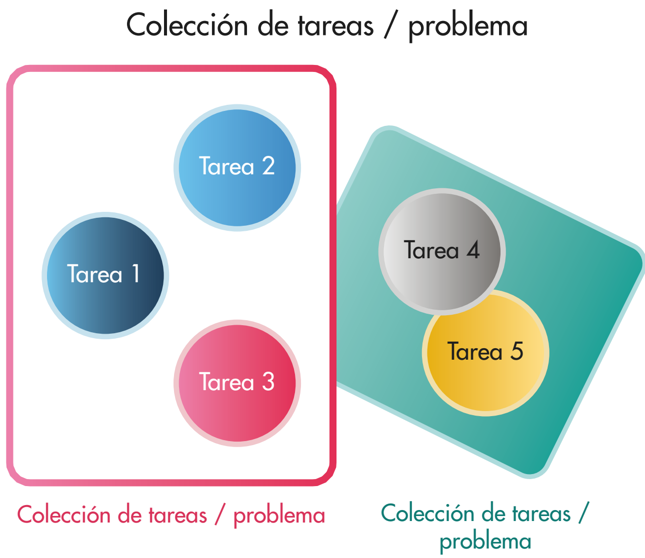


Figura 14. Agrupación de tareas matemáticas como problemas

Propuesta de la estrategia

Los elementos curriculares principales que deben ser considerados en el diseño-valoración de tareas matemáticas o problemas se pueden resumir con base en las siguientes preguntas:

1. ¿Cuáles son los *conocimientos* y *áreas matemáticas*?
2. ¿A cuál categoría pertenece el *contexto utilizado*? Cuando sea pertinente: ¿hay *contextualización activa*?
3. ¿Cuáles son las *habilidades generales* involucradas? ¿Cuál es el escenario de interacción de las habilidades?
4. ¿Cuáles son las *habilidades específicas* que participan?
5. ¿Cuál es la *intervención de los procesos* en el problema o tareas matemáticas?
6. ¿Cuál el *nivel de complejidad*?

Estos elementos se pueden representar con una figura.

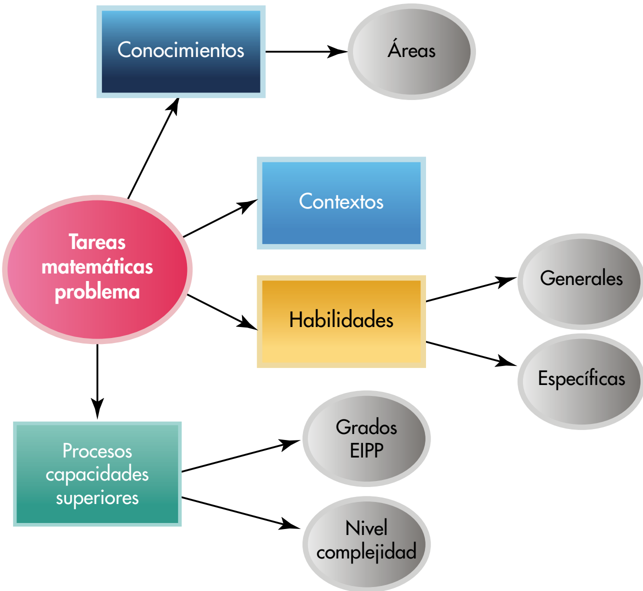


Figura 15. Componentes para la valoración de tareas matemáticas

Obsérvese que los cuatro elementos curriculares generales que se apuntan son: conocimientos, contextos, habilidades y procesos.

La valoración inicia con "enunciar" la tarea (una vez que se ha seleccionado, diseñado). En segundo término "resolver" la tarea que invoca ofrecer una o varias soluciones de la misma. Este paso es muy importante pues permite ver la argumentación que se realiza y pone en movimiento los objetos curriculares que luego se procederá a precisar. El tercer paso es "identificar" algunos de los elementos curriculares que participan en la tarea: conocimientos, contextos y habilidades. Al hacerlo se muestran en detalle: los conocimientos y las áreas a los que pertenecen (según el currículo), el tipo de contexto que usa la tarea (de acuerdo a los cinco categorías que señalamos en este trabajo) y si este plantea la contextualización activa o no. Finalmente: "valorar", que refiere a analizar los procesos y niveles de complejidad, de acuerdo a los 61 indicadores de grados de procesos y cinco criterios para establecer niveles de complejidad consignados en este documento (o los 30 indicadores y un criterio del modelo simplificado).

Dos observaciones:

- Al responder si la tarea incluye la contextualización activa se requiere un cierto nivel de valoración, pero en aras de simplificar este modelo hemos preferido dejar "contextos" en el paso "identificar".

- Este modelo no constituye un procedimiento para construir o diseñar las tareas matemáticas, solamente para valorarlas, pero puede ayudar significativamente en ese diseño.

El modelo que se seguirá para realizar un análisis o la valoración de tareas matemáticas se podría representar por la siguiente figura.

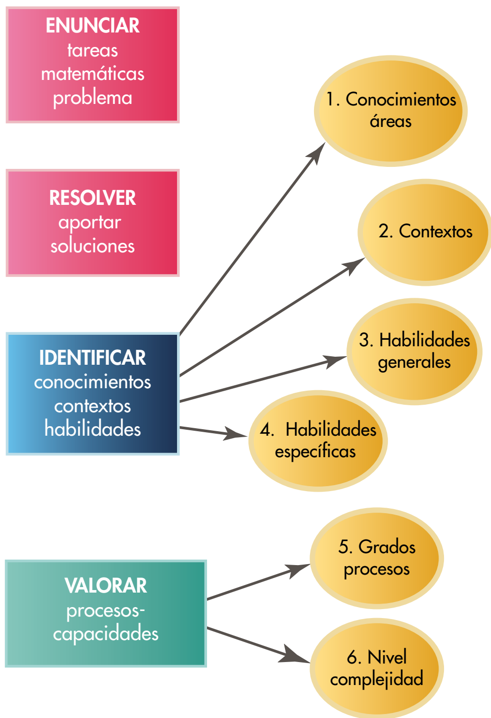


Figura 16. 4 + 6: Estrategia para la valoración de tareas matemáticas: cuatro pasos y seis elementos

En esta valoración no se incluyen directamente las cinco actitudes positivas que se proponen promover en el currículo. ¿Por qué? Se interpreta que al valorar los otros elementos curriculares de alguna manera se aporta alimentación sobre el eje disciplinar asociado a las actitudes y creencias. Por ejemplo, la valoración sobre contextos y contextualización activa contribuye a brindar información sobre el potencial de una tarea para favorecer la *Confianza en la utilidad de las Matemáticas* y *Respeto, aprecio y disfrute de las Matemáticas.* Una valoración de los procesos y niveles de complejidad permite visualizar indirectamente que una tarea permite potenciar *Autoestima en relación con el dominio de las Matemáticas* o por otro lado *Perseverancia*.

Ya en general: las actitudes son difíciles de instrumentalizar en la valoración de un problema o una tarea aislada. El eje disciplinar es un componente curricular muy importante pero se plasma de una manera global, y mucho se obtiene en la estrategia de desarrollo de la lección. En una prueba, por ejemplo, colocar en una gran medida ítems de conexión y reflexión si bien permitiría suponer potenciar la *persistencia*, también podría provocar pérdida de *autoestima* (una demanda cognitiva no equilibrada). Algo similar sucede con los ejes disciplinares relacionados con el uso de historia de las Matemáticas y las tecnologías: en los tres ejes su incorporación en el currículo y su implementación deben verse de manera global con múltiples elementos.

Vamos a ofrecer a continuación cuatro ejemplos de cómo este modelo teórico se puede aplicar. En estos se incluyen algunos códigos:

- E10.1, p. 432: Estadística, nivel educativo 10, habilidad específica 1 en la página 432 de MEP (2012)
- G8.8, p. 311: Geometría, nivel educativo 8, habilidad específica 8 en la página 311 de MEP (2012)
- G10.6, p. 386: Geometría, nivel educativo 10, habilidad específica 1 en la página 386 de MEP (2012)
- G10.11, p. 389: Geometría, nivel educativo 10, habilidad específica 11 en la página 389 de MEP (2012)
- G10.13, p. 389: Geometría, nivel educativo 10, habilidad específica 13 en la página 389 de MEP (2012)
- G10.14, p. 389: Geometría, nivel educativo 10, habilidad específica 14 en la página 389 de MEP (2012)
- G10.15, p. 389: Geometría, nivel educativo 10, habilidad específica 15 en la página 389 de MEP (2012)
- G10.16, p. 391: Geometría, nivel educativo 10, habilidad específica 16 en la página 391 de MEP (2012)
- G11.4, p. 399: Geometría, nivel educativo 11, habilidad específica 4 en la página 399 de MEP (2012)
- G11.17, p. 399: Geometría, nivel educativo 11, habilidad específica 17 en la página 399 de MEP (2012)
- P10.6, p. 436: Probabilidad, nivel educativo 10, habilidad específica 6 en la página 436 de MEP (2012)
- RyA7.3, p. 329: Relaciones y Álgebra, nivel educativo 7, habilidad específica 3 en la página 329 de MEP (2012)

- RyA7.4, p. 330: Relaciones y Álgebra, nivel educativo 7, habilidad específica 4 en la página 330 de MEP (2012)
- RyA10.12 p. 410: habilidad específica 12 de Relaciones y Álgebra, nivel educativo 10, en la página 410 de MEP (2012)

De manera general:

- Ei.j, p. N: Estadística, nivel educativo i, habilidad específica j en la página N de MEP (2012)
- Gi.j, p. N: Geometría, nivel educativo i, habilidad específica j en la página N de MEP (2012)
- Pi.j, p. N: Probabilidad, nivel educativo i, habilidad específica j en la página N de MEP (2012)
- RyAi.j p. N: Relaciones y Álgebra, nivel educativo I, habilidad específica J en la página N de MEP (2012)

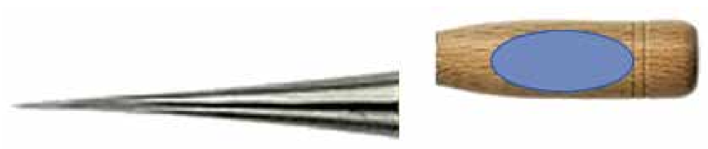
En el ejemplo 1 se involucrará solo una habilidad general del área de Geometría, es decir se trata del escenario E_1. En el ejemplo 2, se incluirán una habilidad general del área de Geometría y dos del área de Relaciones y Álgebra, es decir se trata del escenario E_5. En el ejemplo 3: dos de Estadística y probabilidad y una de Geometría, por lo que aplica E_5. En el ejemplo 4 tenemos un proyecto con un escenario E_4 (aparecen tres áreas cada una con una habilidad), y dos sub-problemas con E_5 pues se trata en los dos casos de dos áreas, en una de ellas más de una habilidad general, pero solo una de la otra. En este último caso, una situación da lugar a tres problemas: uno general y otros más particulares que se pueden usar para otros tipo de acción de aula o evaluación. En cada caso se proporciona el análisis y valoración de las tareas matemáticas que se plantean.

Ejemplo 1: Construir un punzón[14]

Enunciar

Un carpintero requiere construir un punzón como el que se observa en la siguiente figura:

Para ello cuenta con dos piezas separadas, las que se observan a continuación:



El corte en la pieza de madera, donde debe unirse con la parte metálica, es una circunferencia de 1 cm de diámetro. La pieza metálica es un cono de 6 cm de altura y radio de la base igual a 1,5 cm, de modo que no calza con la parte de madera por lo que hay que cortarlo. Indíquele al carpintero a qué distancia, en centímetros, del vértice del cono debe hacer el corte para que ambas piezas calcen y se pueda construir el punzón.

Resolver

Solución

Debe cortarse el cono de modo que el resultante tenga una altura (distancia del vértice a la base) y una base circular de 1 cm de radio. El original tiene altura 6 y una base de 1,5 cm de radio. De tal manera, $x/1=6/1,5$ y por lo tanto $x=4$ cm.

[14] Este ejemplo y su análisis fueron elaborados por Hugo Barrantes.

Identificar

1. Conocimientos y áreas incluidas

Geometría

- Visualización espacial: base, radio, diámetro, sección plana, cono circular recto

2. Habilidades generales

Visualizar y aplicar características y propiedades de figuras geométricas tridimensionales (MEP, 2012, p. 385) del área de Geometría.

Aplicar diversas propiedades y transformaciones de las figuras geométricas (MEP, 2012, p. 301) del área de Geometría.

Es decir es el escenario de interacción de habilidades es el E_2.

3. Habilidades específicas

Identificar la superficie lateral, la base, la altura, el radio y el diámetro de la base y el vértice de un cono circular recto. (G11.4, p. 399).

Plantear y resolver problemas que involucren secciones de un cono mediante planos paralelos a la base. (G11.17, p. 399).

Aplicar los criterios de semejanza: lado lado lado, lado ángulo lado y ángulo ángulo ángulo para determinar y probar la semejanza de triángulos (G8.8, p. 311).

4. Contextos

Este problema posee un contexto “ocupacional”.

Las tareas matemáticas son necesarias para resolver el problema, hay claramente contextualización activa.

Valorar

5. Participación de los procesos

Razonar y argumentar

Debe saber que el radio de la base del cono es 1 resultante del corte debe ser igual a 1, esta información no está dada explícitamente (indicador RA2.1). Por tal motivo el proceso se da en grado 2.

Plantear y resolver problemas

El problema se resuelve mediante un algoritmo que consiste en la aplicación de una semejanza de triángulos (indicador PRP1.2). Esto corresponde al grado 1 del proceso.

Conectar

Se conectan conceptos matemáticos (semejanza, cortes planos en un cono) y una situación de contexto real (indicador C2.1). El proceso se da en grado 2.

Comunicar

La información matemática que aparece en el texto es similar a la estudiada de modo que se puede identificar e interpretar fácilmente (indicadores COM1.1 y COM1.2), la respuesta se proporciona de forma breve. El proceso se da en grado 1.

Representar

La información sobre el radio de la base del cono resultante después del corte aparece codificada en el enunciado (indicador R2.1). El proceso aparece en grado 2.

6. Nivel de complejidad

Puesto que hay tres indicadores de grado 2 en los diferentes procesos, el nivel de complejidad del ítem se puede considerar como "*Conexión*" (por criterio NC2).

Resumen de indicadores de los procesos y nivel de complejidad

EIPP: RA2.1, PRP1.2, C2.1, COM1.1, COM1.2, R2.1

Conexión (NC2)

Ejemplo 2: Una recta corta una circunferencia[15]

Enunciar

La ecuación de una circunferencia C es $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 9$. *Una recta L pasa por los puntos* $\left(-\frac{2}{3}, -3\right)$ *y* $(6, 2)$.

El número de puntos en que se cortan la circunferencia C y la recta L corresponde a ____

Resolver

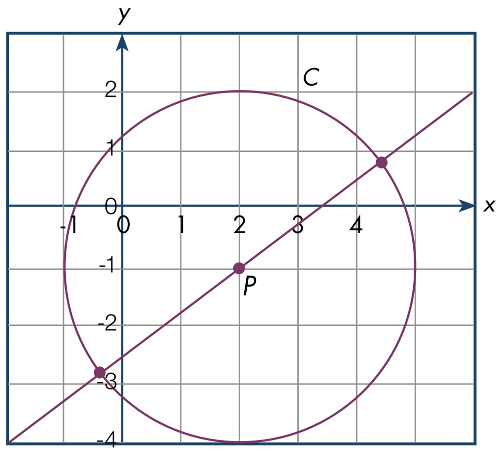
Solución

La ecuación de L es $y = \frac{3x - 10}{4}$. Esta ecuación es equivalente a la forma usual: $y = \frac{3}{4}x - \frac{5}{2}$, pero puede resultar más sencillo utilizar la primera forma que dimos. La circunferencia y la recta se cortan en el punto de abscisa *x* para el cual $(x-2)^2 + \left(\frac{3x - 10}{4} + 1\right)^2 = 9$ que es equivalente a $25x^2 - 100x - 44 = 0$, cuyo discriminante es $14\,400 > 0$. Se concluye que la ecuación tiene dos soluciones en R, por lo tanto, se cortan en dos puntos. Si no se observa que el discriminante es positivo y se sigue resolviendo la ecuación se llega a la solución mediante el uso de la fórmula general para resolver ecuaciones de segundo grado: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Sustituyendo en este caso los valores correspondientes $a=25$, $b=-100$, $c=-44$, y realizando los cálculos correspondientes, se obtiene dos valores para x: $x_1 = \frac{22}{5}, x_2 = \frac{-2}{5}$. Luego, se cortan en dos puntos. Respuesta: 2,00

Otra posible estrategia consiste en trazar la recta y la circunferencia en un sistema de ejes. Recordamos que esta estrategia puede complicarse según sean los datos del centro y el radio de la circunferencia y de la recta involucrados.

[15] Este ejemplo y su análisis fueron elaborados por Hugo Barrantes.



Identificar

1. Conocimientos y áreas incluidas

Geometría

- Centro - radio - recta secante - recta tangente - recta exterior

Relaciones y Álgebra

- Función lineal

2. Habilidades generales

Geometría:

- Analizar relaciones de posición relativa entre rectas y circunferencias (MEP, 2012, p. 385).

Relaciones y Álgebra

- Utilizar distintas representaciones de algunas funciones algebraicas y trascendentes (MEP, 2012, p. 405).
- Utilizar las ecuaciones de primer y segundo grado para resolver problemas (MEP, 2012, p. 328).

El escenario de interacción de las habilidades generales es el E_5.

3. Habilidades específicas

- Determinar si una recta dada es secante, tangente o exterior a una circunferencia (G10.6, p. 386).

- Determinar la ecuación de una recta utilizando datos relacionados con ella (RyA10.12 p. 410).
- Plantear y resolver problemas utilizando ecuaciones de segundo grado con una incógnita (RyA9.12, p. 341), como conocimiento previo.

4. Contextos

Es un contexto matemático.

Valorar

5. Intervención de los procesos en el problema

Razonar y argumentar

Para resolver el ítem se debe identificar información matemática que no está dada explícitamente; en este caso, la ecuación de una recta. Por tal motivo el proceso se da en grado 2 (indicador RA2.1).

Plantear y resolver problemas

Por otra parte, una vez identificada la ecuación de la recta, lo que sigue es la aplicación de un algoritmo que consiste en sustituir el “y” de la ecuación de la circunferencia por el valor de “y” en términos de “x” dado por la ecuación de la recta y luego determinar el número de soluciones de la ecuación cuadrática que se obtiene. Esto corresponde al grado 1 (indicador PRP1.2).

Conectar

La solución relaciona claramente procedimientos matemáticos del área de Geometría (identificación de la ecuación de una circunferencia) con procedimientos del área de Relaciones y álgebra (determinación de la ecuación de una recta y resolución de ecuaciones de segundo grado -conocimientos previos). Esto corresponde al grado 2 (indicador C2.2).

Comunicar

En cuanto a “Comunicar”, se da en el grado 1, pues se identifican e interpretan situaciones matemáticas similares a las ya estudiadas y los resultados se comunican de manera breve (indicadores COM1.1 y COM1.2). También se debe comunicar en forma breve el resultado (indicador COM1.4).

Representar

Este proceso aparece en el grado 2. Se debe razonar e interpretar sobre información codificada, particularmente la información que se puede obtener a partir del conocimiento de dos puntos de una recta (su pendiente y su y-intersección) (indicador R2.1). También se pasa de una representación a otra: de la información dada verbalmente para la recta a su representación algebraica (su ecuación) (indicador R2.2).

6. Nivel de complejidad

Se dan cuatro indicadores de grado 2, luego, el nivel de complejidad del ítem se puede considerar como "*Conexión*" (por criterio NC2).

Resumen de indicadores de los procesos y nivel de complejidad

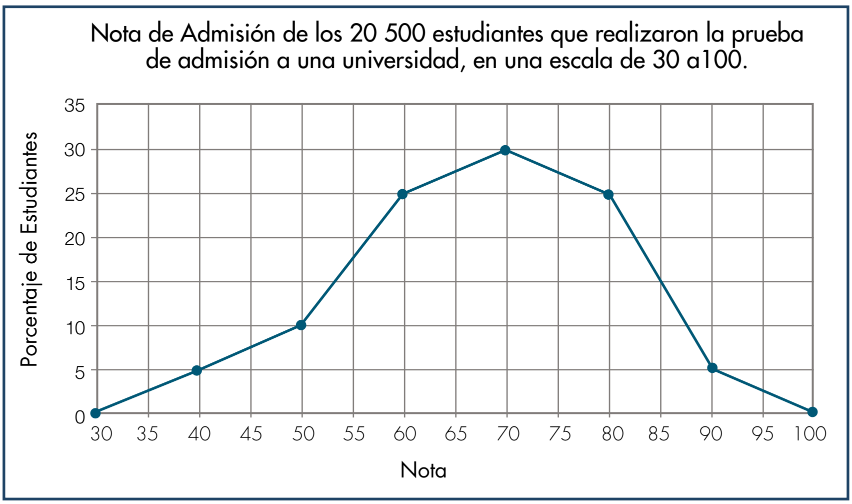
EIPP: RA2.1, PRP1.2, C2.2, COM1.1, COM1.2, COM1.4, R2.1, R2.2.

Conexión (NC2)

Ejemplo 3: Examen de admisión a una universidad[16]

Enunciar

Supongamos que 20 500 estudiantes realizaron el examen de admisión a una universidad. Las calificaciones fueron resumidas en el siguiente polígono de frecuencias.



[16] Este ejemplo y su análisis fue aportado por Edwin Chaves.

En el polígono de frecuencias el área encerrada con el eje x representa el 100% de los estudiantes que realizaron el examen y la nota mínima de admisión es de un 70. Considere las siguientes proposiciones:

I. El porcentaje de estudiantes que fue admitido fue aproximadamente de 45%

II. Aproximadamente 9225 estudiantes no fueron admitidos

De las proposiciones anteriores son verdaderas:

a) Ambas

b) Solo la II

c) Ninguna

d) Solo la I

Resolver

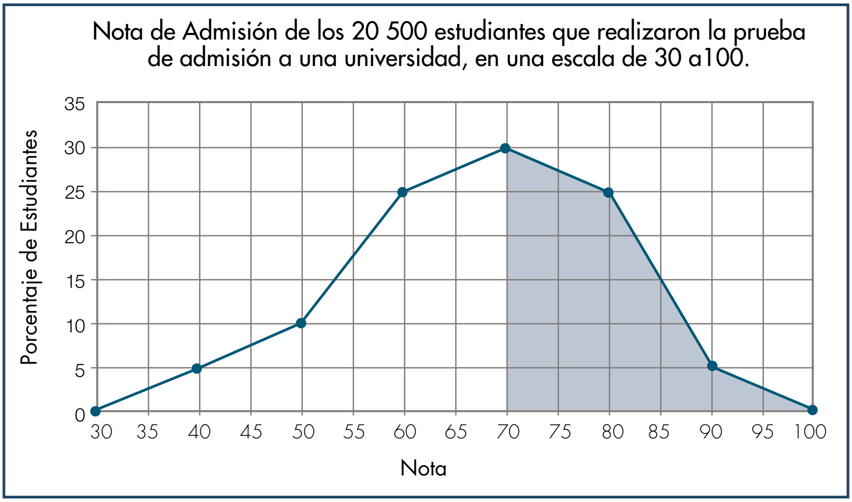
Solución

La representación gráfica corresponde a un polígono de frecuencias porcentual, no se tiene información de los datos individuales, pero se sabe que el área total encerrada por el polígono con el eje x incluye el 100% de los estudiantes que realizaron el examen de admisión. La distribución de los datos es la siguiente:

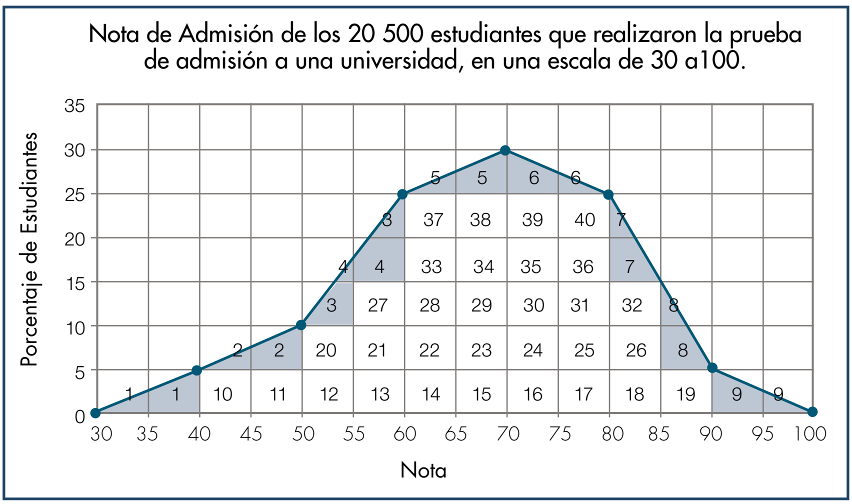
Nota		Porcentaje de estudiantes	
De 35 a menos de 45		5	
De 45 a menos de 55		10	
De 55 a menos de 65		25	
De 65 a menos de 75		30	
De 75 a menos de 85	60	25	30
De 85 a menos de 95		5	
Total		100	

Si se acumulan los porcentajes, puede notarse que el 30% de los estudiantes tuvo notas superiores o iguales a 75 y un 60% tuvo notas mayores o iguales a 65. Quiere esto decir que el porcentaje de estudiantes que aprobó estaría entre el 30% y 60%, lo que ocurre es que esto es muy poco preciso, porque se requiere estimar el porcentaje aproximado de estudiantes que tuvo notas superiores a 70, esto debe realizarse mediante la estimación de áreas, tal como se describe seguidamente.

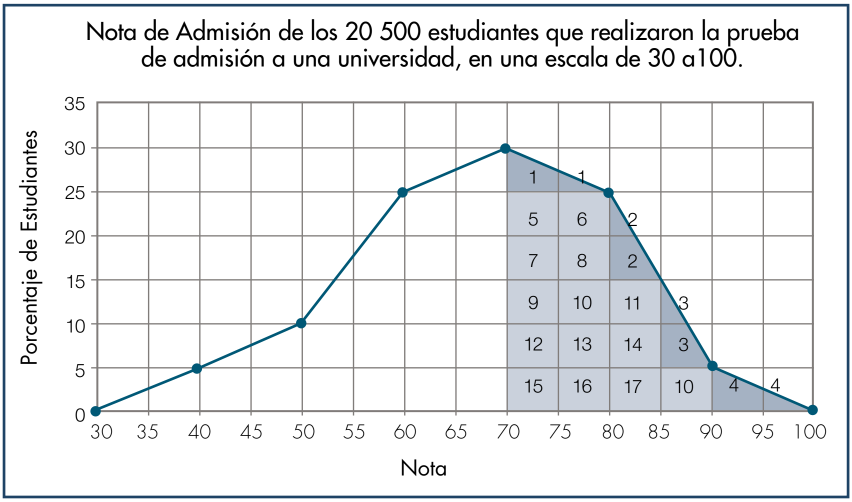
Como el área total representa el 100%, entonces el porcentaje del área de la región que se muestra, que representa la proporción de estudiantes con notas superiores o iguales a 70:



Para realizar este análisis, primeramente se estima el área total tal como se describe en la siguiente imagen:



El polígono en total incluye aproximadamente 40 cuadrados (de 25 unidades cuadradas cada uno), por su parte para la región de interés para el problema se tiene:



Incluye aproximadamente 18 cuadrados; por ello el porcentaje correspondiente los estudiantes que aprobaron el examen sería de $\frac{18}{40} \cdot 100\% = 45\%$. Entonces la proposición I es correcta.

Se tendría también que aproximadamente el 55% de los estudiantes que aplicaron la prueba no obtuvo la nota mínima de admisión, esto equivale aproximadamente a $0{,}55 \cdot 20500 = 11\ 275$. Por ello la proposición II es falsa, observe que 9225 sería el número estimado de estudiantes que aprobó el examen.

Identificar

1. Conocimientos y áreas incluidas

Estadística y Probabilidad

- Representaciones tabulares y gráficas

Geometría

- Polígonos: área

2. Habilidades Generales

Estadística y Probabilidad.

- Utilizar diferentes representaciones para analizar la posición y variabilidad de un conjunto de datos (MEP, 2012, p. 431).

- Resolver problemas vinculados con el análisis de datos y el manejo de la aleatoriedad dentro del contexto estudiantil (MEP, 2012, p. 431).

Geometría

- Calcular áreas y perímetros de polígonos (MEP, 2012, p. 385).

El escenario de interacción de las habilidades generales es el E_5.

3. Habilidades específicas

Estadística y Probabilidad.

- Utilizar diferentes tipos de representaciones gráficas o tabulares para el análisis de datos cualitativos y favorecer la resolución de problemas vinculados con diversas áreas (E10.1, MEP 2012, p. 432).

Geometría.

- Calcular perímetros y áreas de polígonos no regulares utilizando un sistema de coordenadas rectangulares (G10.14, p. 389).
- Resolver problemas que involucren polígonos y sus diversos elementos (G10.15, MEP 2012, p. 389).
- Estimar perímetros y áreas de figuras planas no poligonales utilizando un sistema de coordenadas rectangulares (G10.16, p. 391).

4. Contextos

Es un contexto social. Hay contextualización activa.

Valorar

5. Intervención de los procesos

*Razonar **y argumentar***

La información no está dada en forma explícita, se requiere interpretar muy bien la redacción del texto y del ítem para proceder a plantear la estrategia que ayuda a resolver el problema (RA2.1). Se requiere poner en práctica la estrategia establecida, la cual es novedosa e involucra diferentes aspectos que deben aplicarse secuencialmente: en primer lugar la estimación de áreas, en segundo lugar determinar el peso relativo del área de una región entre el área del polígono total. Este valor relativo debe utilizarse para estimar el número de personas que o fue no fue admitido (RA2.2). Grado 2.

Plantear y resolver problemas

Para la solución del ítem se implementa la conexión entre los procedimientos geométricos y los conceptos estadísticos para determinar el valor de verdad de las proposiciones (PRP3.1). Grado 3.

Conectar

Según el contexto que se plantea, se debe conectar el análisis gráfico correspondiente al polígono de frecuencias porcentuales del área de Estadística, con la estimación de áreas en polígonos de Geometría y un análisis algebraico relativo o porcentual (C3.1). Grado 3.

Comunicar

Debe identificar el significado del mensaje que comunica un polígono de frecuencias porcentual y contexto del problema, para utilizar la Geometría como herramienta en la resolución del ítem (COM2.1). Grado 2.

Representar

La representación matemática por medio del polígono de frecuencias porcentual que tiene un propósito gráfico, debe ser utilizada para estimar el porcentaje de estudiantes que ha sido admitido en la universidad y, a la vez, este valor debe permitir determinar el total de estudiantes que no fueron admitidas (R3.1). Grado 3.

6. Nivel de complejidad

De acuerdo con las consideraciones del apartado previo, para los procesos se presentó una mayoría de indicadores en el grado 3, entonces el nivel de complejidad del ítem se puede considerar como: reflexión (por criterio NC3).

Resumen de indicadores de los procesos y el nivel de complejidad

EIPP: RA2.1, RA2.2, PRP3.1, C3.1, COM2.1, R3.1

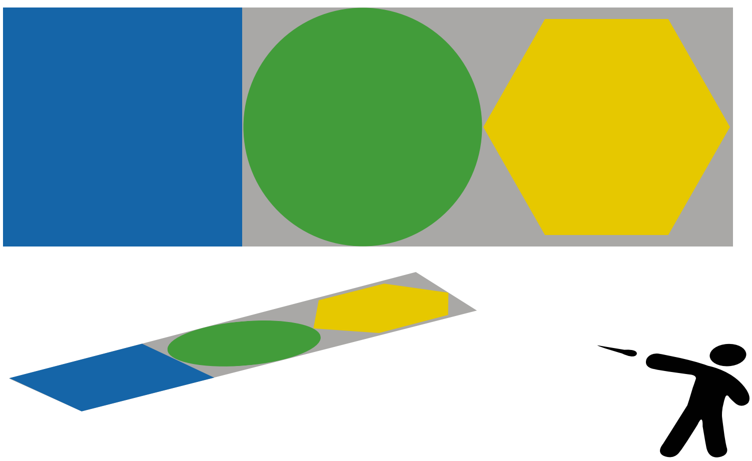
Reflexión (NC3)

Ejemplo 4: Lanzamiento de un dardo[17]

Enunciar

Esta situación o problema está concebido para desarrollarse mediante un proyecto.

Considere un juego que consiste en lanzar un dardo a la siguiente figura que se encuentra sobre el piso a una distancia de 10 metros. La figura está constituida por un rectángulo de 50 centímetros de ancho por 150 centímetros de largo. Las figuras internas son un hexágono regular, un círculo y un cuadrado.



Supuestos

1. *Si el dardo cae fuera de la figura se repite el lanzamiento*
2. *Es igualmente probable que el dardo caiga en cualquier punto del tablero (no se toma en cuenta la pericia de quien lanza)*

Si tuviera que establecer un puntaje entre cero y cien a cada color (o figura) dentro del rectángulo de manera que el juego sea equitativo (probabilísticamente honesto) para quienes jueguen, ¿cuáles serían los valores correspondientes?

[17] Este ejemplo y su análisis fueron aportados por Edwin Chaves.

Resolver

Solución

De acuerdo con las dimensiones dadas para las regiones y con los supuestos establecidos, para que exista equidad o justicia en el puntaje que se asigne a cada color (o región dentro del rectángulo), el mismo debe estar en una escala inversamente proporcional a la probabilidad de que el dardo caiga en cada una de las regiones o (lo que es equivalente) a la proporción de área que representa cada región. Por esta razón, para resolver el problema, primeramente se requiere determinar el área de cada una de las regiones.

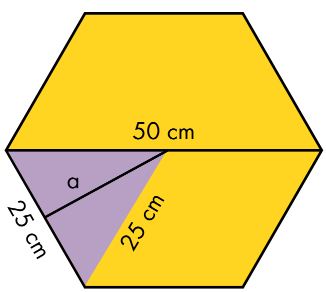
Las dimensiones del rectángulo son 50 cm de ancho y 150 cm de largo. Por esta razón, la figura de color azul corresponde a un cuadrado de 50 cm de lado, por lo que su área viene dada por:

$$50 \text{ cm} \cdot 50 \text{ cm} = 2500 \text{ cm}^2$$

Por otro lado, la figura de color verde es un círculo de 50 cm de diámetro, por ello su área viene dada por:

$$\pi \cdot 25^2 \text{ cm}^2 \approx 1963{,}49 \text{ cm}^2$$

Para el hexágono se sabe que las diagonales miden 50 cm, al tratarse de un hexágono regular, el lado del rectángulo mide 25 cm



La medida de la apotema del hexágono viene dada por:

$$a = \sqrt{25^2 - 12{,}5^2} \text{ cm} \approx 21.65 \text{ cm}$$

El área del hexágono aproximadamente sería:

$$\frac{6 \cdot 25\text{cm} \cdot 21{,}65\text{cm}}{2} = 1623{,}75 \text{ cm}^2$$

Finalmente, el área de la región gris corresponde al complemento de la suma de las áreas de las tres figuras con respecto al área de la región rectangular que las incluye.

El área de las tres figuras (cuadrado, círculo y hexágono) es aproximadamente:

$$2500 \text{ cm}^2 + 1963{,}49 \text{ cm}^2 + 1623{,}75 \text{ cm}^2 = 6087{,}24 \text{ cm}^2$$

El área total del rectángulo en donde se incluyeron las figuras es:

$$150 \text{ cm} \cdot 50 \text{ cm} = 7500 \text{ cm}^2$$

El área de la región gris sería aproximadamente:

$$7500 \text{ cm}^2 - 6087{,}24 \text{ cm}^2 = 1412{,}76 \text{ cm}^2$$

De acuerdo con lo anterior y según establece la definición clásica de probabilidad, se tendría:

Región	Área en cm^2	Probabilidad de ocurrencia $\left(\frac{\text{Área de región}}{\text{Área total}}\right)$
Azul (cuadrado)	2500,00	0,333
Verde (círculo)	1963,49	0,262
Amarilla (hexágono)	1623,75	0,217
Gris	1412,76	0,188
Total	**7500,00**	**1,000**

Seguidamente se deben utilizar estos valores para determinar los puntajes correspondientes a cada región, los cuales deben estar en relación inversa a las probabilidades:

Región	Relación inversa a la probabilidad $\left(\frac{1}{\text{Probabilidad}}\right)$	Peso relativo por región	Puntaje por región en escala 0 a 100
Azul (cuadrado)	3,00	0,179	17,9
Verde (círculo)	3,82	0,228	22,8
Amarilla (hexágono)	4,61	0,275	27,5
Gris	5,32	0,318	31,8
Suma	**16,75**	**1,000**	**100**

Identificar

1. Conocimientos y áreas incluidas

Estadística y Probabilidad

- Reglas básicas de las probabilidades:
  - ◊ $0 \leq P(A) \leq 1$, para todo evento A

- ◊ Probabilidad del evento seguro es 1 y del evento imposible es 0
- ◊ $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ para eventos A y B mutuamente excluyentes

- Otras propiedades
  - ◊ Probabilidad de la unión: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$
  - ◊ Probabilidad del complemento: $P(A^c) = 1 - P(A)$
- Resolver problemas vinculados con el análisis de datos y el manejo de la aleatoriedad.

Geometría

- Polígonos: área

Relaciones y Álgebra

- Proporcionalidad inversa

2. Habilidades generales

Estadística y Probabilidad

- Emplear las propiedades básicas de la probabilidad en situaciones concretas (MEP, 2012, p. 431).

Geometría

- Calcular áreas y perímetros de polígonos (MEP, 2012, p. 385).

Relaciones y Álgebra

- Identificar y utilizar distintas representaciones para relaciones de proporcionalidad. (MEP, 2012, p. 328).

El escenario de interacción de áreas es E_4.

3. Habilidades específicas

Estadística y Probabilidad

- Aplicar los axiomas y propiedades básicas de probabilidades en la resolución de problemas e interpretar los resultados generados (P 10.6, p. 436).

Geometría

- Determinar la medida de perímetros y áreas de polígonos en diferentes contextos (G10.11, p. 389).
- Determinar la medida de la apotema y el radio de polígonos regulares y aplicarlo en diferentes contextos (G10.13, p. 389).

Relaciones y Álgebra

- Identificar relaciones de proporcionalidad inversa en diversos contextos reales. (RyA7.3, p. 329)
- Analizar relaciones de proporcionalidad directa e inversa de forma verbal, tabular, gráfica y algebraica. (RyA 7.4, p. 330)

4. Contextos

Personal. Hay contextualización activa.

Valorar

5. Participación de los procesos

Razonar y argumentar:

La información no está en forma explícita, esto obliga a los estudiantes a plantear e implementar diferentes argumentos vinculados con el cálculo de áreas y con la proporcionalidad inversa. En este sentido el problema la situación resulta novedosa para los estudiantes (RA3.1). Por esta misma razón, se requiere desarrollar argumentos que utilizan integradamente distintos conceptos o métodos matemáticos para resolver el problema (RA3.2). Grado 3

Plantear y resolver problemas

El problema planteado resulta novedoso, se requiere implementar diferentes estrategias que incluyen: el análisis visual, el cálculo de áreas, la identificación de la probabilidad de las regiones, la identificación del inverso multiplicativo de las probabilidades y su uso para determinar como el peso relativo de cada región (PRP3.1). Grado 3

Conectar

Se debe realizar la conexión entre diferentes matemáticos y una situación de un contexto lúdico, para resolver un no estudiado y relativamente complejo (C3.1).Grado 3

Comunicar

Se ponen en juego diferentes conceptos que tienen gran trascendencia dentro de los análisis matemáticos. En primer lugar, la idea de equiprobabilidad de los puntos dentro del rectángulo (uniformidad probabilística), el cálculo de las áreas para determinar directa o indirectamente la probabilidad que el dardo caiga en cada región, la identificación de que los valores buscados están en proporción inversa con estas probabilidades y su determinación posterior. Por ello, se requiere seguir una secuencia de razonamientos matemáticos abstractos y complejos que no han sido estudiados (COM 3.1), además expresar ideas, acciones, argumentos y conclusiones usando lenguaje matemático y precisión matemática (COM3.2). Grado 3.

Representar

En el desarrollo del proyecto se debe hacer una adecuada lectura de la información textual y visual para la determinación de áreas de cada región, pasar luego a las probabilidades o las proporciones correspondientes del área de cada región en relación al rectángulo que las incluye, luego deben convertir estos valores en nuevas representaciones que son sus inversos multiplicativos y finalmente determinar los pesos relativos de cada región en la escala de 0 a 100. (R3.1 y R3.2) Grado 3.

6. Nivel de complejidad

De acuerdo con las consideraciones del apartado previo, para todos procesos los indicadores son de grado 3, por todo ello el problema es de Reflexión (NC3).

Resumen de indicadores de los procesos y el nivel de complejidad proyecto completo

EIPP: RA3.1, RA3.2, PRP3.1, C3.1, COM3.1, COM3.2, R3.1, R3.2

Reflexión (NC3)

Acción de aula

El desarrollo de este proyecto mediante el trabajo colaborativo permite llegar a un nivel superior de razonamiento. Este es un claro ejemplo por medio del cual se relacionan conceptos geométricos, algebraicos y probabilísticos para resolver un problema que, aunque hipotético, ejemplifica una situación lúdica que requiere de mucha destreza matemática y del dominio de diferentes habilidades para encontrar la solución.

Aunque los cálculos no son complejos, el mayor reto se enfoca en la identificación y planificación de la estrategia matemática que se debe implementar para encontrar la solución. Por esta razón, es necesario otorgar el tiempo necesario para que los estudiantes puedan debatir en la interpretación del problema y en la búsqueda de una estrategia de solución. Es posible que inicien con estrategia de ensayo y error que les ayude a identificar la ruta correcta. El docente debe estar atento para apoyar este proceso.

Dada la complejidad del problema que se ha incluido en el proyecto, no es adecuado utilizarlo para la generación de conocimiento nuevo sino para una etapa posterior que permita la movilización y aplicación de las habilidades adquiridas en diferentes áreas matemáticas.

Descomposición del problema en dos sub-problemas

Si se desea evaluar un problema de esta naturaleza, el mismo debe ser descompuesto en problemas menores que puedan ser incluidos dentro de una prueba o examen matemático. Seguidamente se presentan dos ítems que se vinculan directamente con el problema original, pero que son de un nivel de dificultar menor:

Sub-problema 1

Enunciar

Considere el contexto "Lanzamiento de un dardo" y las siguientes proposiciones:

I. Bajo el supuesto que el dardo cae en la figura, la probabilidad que el dardo caiga en la región circular es mayor a que lo haga en la región cuadrada.

II. Bajo el supuesto que el dardo cae en la figura, resulta más probable que el dardo no caiga en alguna de las regiones a que lo haga en la región hexagonal

De las proposiciones anteriores son verdaderas:

a) Ambas

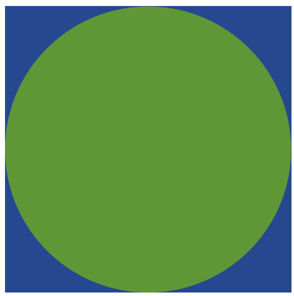
b) Solo la II

c) Solo la I

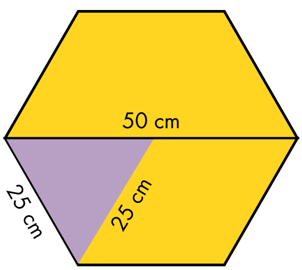
d) Ninguna

Resolver

Para determinar el valor de verdad de las proposiciones, en el entendido de que es igualmente probable que el dardo caiga en cualquier punto de la figura, se requiere valorar la medida de las áreas correspondientes. Para la proposición I simplemente basta con observar que la medida del lado del cuadrado es de 50 cm igual que el diámetro del círculo, en estas condiciones el círculo tiene menor área debido a que su circunferencia podría circunscribirse en el cuadrado. La proposición I es falsa.



Sin embargo, para la proposición II se requiere calcular el área de las tres figuras. En primer lugar el área del cuadrado es 50·50 cm2 = 2500 cm^2. Para el círculo, debido a que el radio mide , entonces su área es π· 252 cm^2 ≈ 1963,49 cm^2. Para el hexágono se sabe que las diagonales miden 50 cm, al tratarse de un hexágono regular, el lado del rectángulo mide 25 cm.



La medida de la apotema del hexágono viene dada por:

$$a = \sqrt{25^2 - 12{,}5^2}\ \text{cm} \approx 21.65\ \text{cm}$$

El área del hexágono aproximadamente sería:

$$\frac{6 \cdot 25\text{cm} \cdot 21{,}65\text{cm}}{2} = 1623{,}75\ \text{cm}^2$$

Entonces el área de las tres figuras mide aproximadamente:

$$2500\ \text{cm}^2 + 1963{,}49\ \text{cm}^2 + 1623{,}75\ \text{cm2} = 6087{,}24\ \text{cm}^2$$

El área total del rectángulo en donde se incluyeron las figuras (región lila) es:

$$150\ \text{cm} \cdot 50\ \text{cm} = 7500\ \text{cm}^2$$

El área del rectángulo que no está incluido en las figuras sería aproximadamente:

$$7500 \text{ cm}^2 - 6087{,}24 \text{ cm}^2 = 1412{,}76$$

Entonces la proposición es falsa.

Identificar

1. Conocimientos y áreas incluidas

Estadística y Probabilidad

- Reglas básicas de las probabilidades:
  - ◊ $0 \leq P(A) \leq 1$, para todo evento A
  - ◊ Probabilidad del evento seguro es 1 y del evento imposible es 0
  - ◊ $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ para eventos A y B mutuamente excluyentes
- Otras propiedades
  - ◊ Probabilidad de la unión: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$
  - ◊ Probabilidad del complemento: $P(A^c) = 1 - P(A)$

Geometría

- Polígonos: área

2. Habilidades generales

Estadística y Probabilidad

- Emplear las propiedades básicas de la probabilidad en situaciones concretas (MEP, 2012, p. 431).
- Resolver problemas vinculados con el análisis de datos y el manejo de la aleatoriedad.

Geometría

- Calcular áreas y perímetros de polígonos (MEP, 2012, p. 385).

El escenario de interacción de áreas es E_5.

3. Habilidades específicas

Estadística y Probabilidad

- Aplicar los axiomas y propiedades básicas de probabilidades en la resolución de problemas e interpretar los resultados generados (P10.6, MEP 2012, p. 436).

Geometría

- Determinar la medida de perímetros y áreas de polígonos en diferentes contextos (G10.11, p. 389).
- Determinar la medida de la apotema y el radio de polígonos regulares y aplicarlo en diferentes contextos (G10.13, p. 389).

4. Contextos

Personal. Hay contextualización activa.

Valorar

5. Participación de los procesos

Razonar y argumentar

Para el análisis de la primera proposición basta con observar las regiones amarilla y verde para identificar que el área de la verde es mayor y por ende va a tener mayor probabilidad, pero para la segunda proposición se requiere realizar un cálculo de áreas en las diferentes regiones. En general, la información no está en forma explícita y además se requiere utilizar los cálculos de las áreas para deducir el análisis probabilístico (RA2.1). En la segunda proposición la respuesta al problema no es directa, se requiere realizar el análisis descrito en el punto anterior para proceder a determinar su valor de verdad (RA2.2). Grado 2.

Plantear y resolver problemas

El problema planteado resulta novedoso, se requiere implementar diferentes estrategias que incluyen: el análisis visual, el cálculo de áreas y la identificación de la probabilidad de las regiones como el peso relativo del área de cada región sobre el área total del rectángulo (PRP3.1). Grado 3.

Conectar

En el contexto del juego, se debe conectar el cálculo de áreas y el cálculo de probabilidades para llegar a la solución (C2.1). En la solución del ítem interviene el cálculo de áreas vinculado con geometría y la determinación de probabilidades en eventos particulares (C2.2).Grado 2.

Comunicar

Desde el punto de vita de la redacción del ítem, se ponen en juego diferentes conceptos que tienen gran trascendencia dentro de los análisis matemáticos. En primer lugar, la idea de equiprobabilidad de los puntos dentro del rectángulo (uniformidad probabilística), además el vínculo de la medida de las áreas con respecto al concepto clásico o laplaciana de probabilidad (COM2.1). Grado 2.

Representar

Lo que se tiene en este ítem son tres figuras geométricas incluidas en una figura mayor (un rectángulo con dimensiones dadas). La información proporcionada por estas figuras debe fundamentar la identificación de las probabilidades para determinar la validez de las proposiciones (R2.1). En la solución del ítem se requiere pasar de la identificación del área de las regiones con la representación de la probabilidad bajo el enfoque clásico o laplaciano (R2.2). Grado 2.

6. Nivel de complejidad

De acuerdo con las consideraciones del apartado previo, para los procesos la mayoría de los indicadores son de grado 2, aunque el indicador de *Plantear y resolver problemas* es de grado tres. Sin embargo, se debe observar que la solución del ítem incluye una combinación de procedimientos que aumentan el nivel de dificultad, por ello se puede catalogar como un ítem de Reflexión (NC5).

Resumen de indicadores de los procesos y el nivel de complejidad sub-problema 1

EIPP: RA2.1, RA2.2, PRP3.1, C2.1, C2.2, COM2.1, R2.1, R2.2

Reflexión (NC5)

Sub-problema 2

Enunciar

Considere el contexto "Lanzamiento de un dardo", la probabilidad aproximada que el dardo caiga en el círculo es:_____

Resolver

Solución

Debido a que es igualmente probable que el dardo caiga en cualquier punto de la figura, entonces la probabilidad de que el dardo caiga en el círculo se determina por medio del valor relativo que tiene el área de círculo en relación con el área de la figura completa.

El diámetro del círculo es de , por ello su área es:

$$\pi \cdot 252 \text{ cm}^2 \approx 1963{,}49 \text{ cm}^2$$

Del mismo modo el área del rectángulo es:

$$150 \text{ cm} \cdot 50 \text{ cm} = 7500 \text{ cm}^2$$

Entonces la probabilidad que el dardo caiga en el círculo es

$$\frac{1963{,}49 \text{ cm}^2}{7500 \text{ cm}^2} \approx 0{,}262$$

Identificar

1. Conocimientos y áreas incluidas

Estadística y Probabilidad

- Reglas básicas de probabilidad y otras propiedades

Geometría

- Polígonos: área

2. Habilidades generales

Estadística y Probabilidad.

- Emplear las propiedades básicas de la probabilidad en situaciones concretas (MEP, 2012, p. 385).
- Resolver problemas vinculados con el análisis de datos y el manejo de la aleatoriedad dentro del contexto estudiantil (MEP, 2012, p. 385).

Geometría.

- Calcular áreas y perímetros de polígonos (MEP, 2012, p. 385).

El escenario de interacción de áreas es E_5.

3. Habilidades específicas

Estadística y probabilidad

- Aplicar los axiomas y propiedades básicas de probabilidades en la resolución de problemas e interpretar los resultados generados (P10.6, p. 436).

Geometría

- Determinar la medida de perímetros y áreas de polígonos en diferentes contextos (G10.11, p. 389).

4. Contextos

Personal. Hay contextualización activa.

Valorar

5. Participación de los procesos

Razonar y argumentar

La información no está en forma explícita para el cálculo de la probabilidad, se requiere determinar las áreas correspondientes y luego determinar el valor relativo que corresponde a la probabilidad (RA2.1). La respuesta al problema no es directa, se requiere realizar el análisis descrito en el punto anterior para proceder a determinar el valor de la probabilidad (RA2.2). Grado 2.

Plantear y resolver problemas

Para encontrar el valor de la probabilidad se requiere plantear la estrategia descrita en el análisis del proceso anterior, el procedimiento podría ser novedoso aunque de simple aplicación (PRP2.1). Grado 2.

Conectar

Se debe conectar el cálculo de áreas y el cálculo de probabilidades para llegar a la solución (C2.1). En la solución del ítem interviene el cálculo de áreas vinculado con geometría y la determinación de probabilidades en eventos particulares (C2.2). Grado 2.

Comunicar

En este proceso se debe hacer una lectura del contexto y de la figura, se espera que el procedimiento por aplicar (COM1.1). Se debe interpretar la redacción del contexto y de la figura para establecer la estrategia de solución, como se indicó antes este procedimiento debería ser conocido por el estudiante (COM1.2). El ítem solicita que se comunique en forma breve la repuesta como una probabilidad (COM1.4). Grado 1.

Representar

Se requiere aquí interpretar y razonar sobre la información que proporcionan las figuras geométricas y sus respectivas áreas (R2.1). También se debe convertir la información que proporcionan las figuras geométricas y sus respectivas áreas a la representación matemática de la probabilidad como un cociente de áreas (R2.2). Grado 2.

6. Nivel de complejidad

De acuerdo con las consideraciones del apartado previo, la mayoría de los indicadores para los procesos son de grado 2, entonces el nivel de complejidad del ítem es Conexión (NC2).

Resumen de indicadores de los procesos y el nivel de complejidad sub-problema 2

EIPP: RA2.1, RA2.2, PRP2.1, C2.1, C2.2, COM1.1, COM1.2, COM1.4, R2.1, R2.2

Conexión (NC2)

El currículo de Matemáticas y la política curricular en Costa Rica

El Consejo Superior de Educación de Costa Rica aprobó a finales del 2016 (Acuerdo 07-64-2016) una *Política curricular* “en el marco de la visión ‘educar para una nueva ciudadanía’” (CSE, 2016). La misma se afirma como orientadora de todos los currículos de la educación nacional desde Preescolar hasta la Educación Diversificada y Técnica: “…ofrece el fundamento teórico y filosófico de la política curricular, desarrolla para cada una de las dimensiones las habilidades y los indicadores con el fin de facilitar la puesta en práctica en los diferentes contextos educativos” (pp. 31-33).

El componente principal de esta política se condensa en el documento MEP (2015).

Es relevante subrayar que esta política asume las “habilidades” como objeto curricular vertebral, las cuales define de la siguiente manera: “la capacidad para solucionar problemas y realizar tareas diversas, dentro de una pluralidad de condiciones, ambientes y situaciones. Para ello, la persona necesita un bagaje de conocimientos, así como de destrezas, además la guía basada en una serie de valores” (MEP, 2015, p. 24; CSE, 2016, p, 33).

Entonces: esta nueva visión plantea que todos los programas de estudio deben estar basados en capacidades, las cuales pueden ser cognitivas, sociales y actitudinales. Al igual que en Matemáticas, se separa de formulaciones curriculares basadas estrictamente en conocimientos y sus objetivos asociados. En esto hay una convergencia directa con los Programas de Matemáticas aprobados en el 2012, basados, además de conocimientos, en habilidades, capacidades transversales y competencia general. En ese sentido el currículo de Matemáticas se ve cobijado por estos nuevos planteamientos curriculares nacionales. Pero veamos con mayor detalle hasta dónde llegan las convergencias y también identificar algunos matices distintos.

La nueva perspectiva asume tres ejes generales para la sociedad en el escenario actual:

1. Fortalecer la ciudadanía planetaria con arraigo local.
2. Educación para el Desarrollo Sostenible.
3. Ciudadanía digital con equidad social. (CSE, 2016, p. 32)

Esta visión se inscribe dentro de planteamientos de la UNESCO (2003, 2014a, 2014b); véase también FOD (2012). Se definen 4 dimensiones que integran las habilidades:

- **Maneras de pensar:** se refiere al desarrollo cognitivo de cada persona, por lo que implica las habilidades relacionadas con la generación de conocimiento, la resolución de problemas, la creatividad y la innovación.
- **Formas de vivir en el mundo:** es la dimensión que conlleva el desarrollo sociocultural, las interrelaciones que se tejen en la ciudadanía global con el arraigo pluricultural y la construcción de los proyectos de vida.
- **Formas de relacionarse con otros:** se relaciona con el desarrollo de puentes que se tienden mediante la comunicación y lo colaborativo.
- **Herramientas para integrarse al mundo:** es la apropiación de las tecnologías digitales y otras formas de integración, así como la atención que debe prestarse al manejo de la información. (MEP, 2015, p. 25)

La siguiente imagen esquematiza estos componentes e incluye las diversas habilidades, que se conceptúan como indicadores de las dimensiones.

Figura 17. Dimensiones y habilidades de la política curricular oficial de Costa Rica. Tomada de MEP (2015)

Estas dimensiones y las habilidades propuestas se formulan para todos los niveles escolares, por lo tanto: es un planteamiento integrador. Por ejemplo en relación con “maneras de pensar” y “resolución de problemas” indica:

Tabla 11. Distribución de la habilidad “resolución de problemas” en los ciclos educativos

	Preescolar	I ciclo	II ciclo	III ciclo	Ciclo Diversificado y Técnico
Resolución de problemas	Identifica una situación que demanda una respuesta de su parte.	Comprende la presentación de un problema concreto que debe ser solucionado.	Interpreta apropiadamente la información disponible, a fin de problematizar la realidad.	Analiza un problema a partir de lo conocido y de la necesidad de encontrar información adicional.	Enfoca un problema desde varias perspectivas, a partir de preguntas que debe responder con una investigación.
	Recuerda la información que necesita ante un problema ya conocido.	Sigue los pasos para la solución clara de problemas.	Comprende que existen diversas formas de solucionar un problema.	Organiza los conocimientos, los recursos y las actividades de forma conveniente para llegar a una solución.	Justifica las alternativas seleccionadas a partir de principios y conceptos aprendidos.
	Responde exitosamente con acciones aprendidas en situaciones que le son familiares.	Compara su trabajo y el de otros de acuerdo con las normas establecidas.	Identifica qué aspectos fueron exitosos y qué aspectos requieren mejorarse.	Determina la eficacia y la viabilidad de lo hecho, con el fin de ajustarlo al contexto.	Formula un nivel de logro de una alternativa de acuerdo con su impacto en la solución de un problema.

Fuente: MEP (2015, p. 38)

Hay aquí un tratamiento progresivo de lo que se desea de las habilidades para cada ciclo educativo.

Vayamos a Matemáticas: en el currículo (MEP, 2012) de esta asignatura si bien no se incorporó Preescolar por razones de oportunidad histórica (entre otras, los tiempos reducidos para elaborar estos programas), se ofrece un tratamiento integrador para la Primaria y Secundaria: áreas matemáticas y sus enfoques, procesos-capacidades y niveles de complejidad, ejes disciplinares iguales para todos los ciclos. Se propuso desarrollar todo de una manera progresiva, muy precisa de acuerdo con las condiciones cognitivas y pedagógicas en cada ciclo educativo.

Algunos fundamentos de la política curricular en MEP (2015):

> … se basa en teorías educativas que centran su interés en el estudiante y la estudiante y que visualizan al personal docente como facilitador de los procesos requeridos para construir conocimiento. Considera además que ese conocimiento debe tener un significado para el estudiantado y, por lo tanto, incorpora, en el aprendizaje, las situaciones, entornos y condiciones de la comunidad en donde se desarrollan los procesos educativos. (p. 22)

> … es preciso establecer nuevos y diversos ambientes de aprendizaje, tanto presenciales como virtuales, que fortalezcan la creatividad, el espíritu de asombro en el estudiantado que faciliten la interacción lúdica, comunitaria y colectiva, y que propicien el desarrollo de las nuevas habilidades requeridas para enfrentar los retos del siglo XXI. En este sentido, la incorporación de tecnologías móviles bien orientadas, con programas diseñados para fortalecer el desarrollo de la nueva educación, así como una amplia gama de ambientes para generar aprendizajes, son elementos fundamentales. (p. 23)

La visión global que esta política curricular sostiene está en congruencia con la que poseen los Programas de Matemáticas. En primer lugar: el enfoque principal, una estrategia pedagógica, busca crear un ambiente de aula que motive al estudiante, mediante el concurso de situaciones atractivas y demandantes asociadas en gran medida a contextos reales, donde se asume un papel activo y central del estudiantado en la construcción de sus aprendizajes con fuerza en la fase de trabajo estudiantil independiente como en aquella colaborativa y comunicativa.

El docente aquí posee un papel de “facilitador” de ese proceso también, aunque se debe introducir un matiz: no solamente se concibe como un simple instrumento o escalera para la acción estudiantil, en el currículo de Matemáticas el papel del docente es comprendido como complejo y cuidadoso donde la calidad de las situaciones propuestas, las intervenciones de aula y la clausura deben ser planificadas y realizadas con un gran sentido educativo. El enfoque del currículo de Matemáticas imbrica los insumos constructivistas tanto en su vertiente “piagetiana” (preponderancia del sujeto cognitivo) como “vygotskyana” (preponderancia del influjo sociocultural), y todo se plama en la resolucióndе problemas como estrategia. En ese sentido hay un foco hacia la clase como espacio de construcción cognoscitiva.

En estos ambientes, concebidos como espacios de mini-comunidades científicas que se enfrentan a situaciones de cierta complejidad, es posible desarrollar capacidades cognitivas, socio afectivas y el cultivo de actitudes y valores. Las capacidades que se privilegian son sin duda las cognitivas, pero desde el marco curricular de esta asignatura se ofrecen vías para apuntalar las otras que se señalan en la nueva política curricular.

Antes de proceder a analizar las relaciones entre la nueva política curricular y la reforma matemática deben recordarse los ejes transversales específicos que esta última formula:

1. La resolución de problemas como estrategia metodológica principal.
2. La contextualización activa como un componente pedagógico especial.
3. El uso inteligente y visionario de tecnologías digitales.
4. La potenciación de actitudes y creencias positivas en torno a las Matemáticas.
5. El uso de la Historia de las Matemáticas. (MEP, 2012, p. 35; numeración añadida)

Estos fueron establecidos con una finalidad precisa:

> Los ejes buscan responder a debilidades existentes pero también posicionar la Educación Matemática que se desarrolla en el país con estándares internacionales. La acción de los cinco ejes en todos los años educativos contribuye a la integración vertical del currículo, especialmente por medio de la resolución de problemas y la contextualización activa que buscan articular todo el plan de estudios. El efecto sinérgico de estos ejes disciplinares busca favorecer una formación matemática de calidad que ayude a generar personas competentes, racionales, responsables y críticas para la construcción de una sociedad culta, justa y democrática. (p. 36)

En lo que sigue veremos cómo estos ejes se asocian o convergen con orientaciones o habilidades consignadas en la política curricular.

Maneras de pensar

Varios objetos curriculares dentro del programa de Matemáticas convergen plenamente con las habilidades que se formulan en la política curricular como pensamiento sistémico, pensamiento crítico, aprender a aprender, resolución de problemas y creatividad e innovación (MEP, 2015, p. 26). Analicemos cada uno de esos elementos en su relación con Matemáticas.

En lo que refiere a pensamiento sistémico, hay elementos del currículo de Matemáticas que permiten nutrir las habilidades consignadas:

- La colocación de *problemas* como medio para articular los quehaceres de la acción educativa, se distancia de estrategias que visualizan las tareas matemáticas de una manera aislada, desconectada, o que fomentan realizar las mismas mediante secuencias lineales de acciones (como si hace el conductismo); en este currículo se favorece la integración de sus múltiples objetos, se potencia el tratamiento de situaciones "complejas" (situaciones como sistemas de interrelaciones) que se proponen abordar mediante intervenciones también "complejas". Por ejemplo, "plantear problemas" que implican integraciones de habilidades específicas o generales, no puede menos que acudir a formulaciones globalizadoras y sistémicas.
- El proceso "representar" se propone fortalecer aquellas capacidades para la selección de una representación de objetos de acuerdo a la conveniencia de un contexto o tarea (representación múltiple), traducir unas en otras o integrar diversas representaciones dentro de una estrategia cognoscitiva; en los programas se usan aquellos de naturaleza matemática pero la capacidad de asumir la multiplicidad de las representaciones de objetos cognoscitivos se ve favorecida con este proceso.
- El proceso "conectar" busca apuntalar capacidades para relacionar objetos dentro de las Matemáticas, fuera de las mismas y en relación con los contextos reales: hay una invocación de interacción y de visión no compartimentalizada que favorece el cultivo de un pensamiento holístico, sistémico.

MEP (2015) consigna tres indicadores de desarrollo de habilidades en el caso del pensamiento crítico:

- Evalúa los supuestos y los propósitos de los razonamientos que explican los problemas y preguntas vitales.
- Fundamenta su pensamiento con precisión, evidencia enunciados, gráficas y preguntas, entre otros.
- Infiere los argumentos y las ideas principales, así como los pro y contra de diversos puntos de vista. (p. 30)

¿Cómo se apoya el pensamiento crítico desde el currículo de Matemáticas? En primer lugar mediante el proceso "razonar y argumentar", el cual no puede restringirse al dominio de la técnica de "silogismos" lógicos, especialmente cuando esta acción educativa se plantea en contextos reales, sino que incluye el cuestionamiento de la información de partida, de las técnicas y estrategias por usar, y el desenvolvimiento del pensamiento.

MEP (2015) articula "Aprender a aprender" como "Resolución de problemas, capacidad de conocer, organizar y autorregular el propio proceso de aprendizaje" (p. 30). Y para "Resolución de problemas" los indicadores de progreso que brinda son:

- Formula preguntas significativas que aclaran varios puntos de vista para la mejor comprensión de un problema.
- Analiza la información disponible para generar alternativas que aplican en la resolución de problemas para la solución de situaciones de la vida cotidiana.
- Evalúa los intentos de solución y monitorea su eficacia y viabilidad según el contexto. (p. 31)

En ambas habilidades se consigna la resolución de problemas, aunque con elementos distintos y complementarios.

Vayamos a los Programas de Matemáticas: los procesos "razonar y argumentar" y "plantear y resolver problemas" son vehículos precisos para provocar esos resultados. En particular, "plantear y resolver problemas" incorpora *metacognición*, es decir el monitoreo de las acciones por el sujeto en la solución de los problemas.

"Creatividad e innovación" se define por MEP (2015) como la habilidad "para generar ideas originales que tienen valor en la actualidad, para interpretar de distintas formas las situaciones y para visualizar una variedad de respuestas ante un problema o circunstancia" (p. 31). Los tres grados de intervención de los procesos y los tres niveles de complejidad de MEP (2012) invocan capacidades distintas, nuevas ideas y contrastación de su pertinencia, estrategias múltiples, soluciones alternativas, etc. Crear e innovar son propósitos necesarios conforme se avanza con tareas de demanda creciente.

Para el desarrollo de todas estas habilidades dentro de las Matemáticas es crucial que el estudiante tenga actitudes positivas hacia la asignatura y su enseñanza, algo que establece uno de los ejes específicos del currículo de esta materia.

De igual manera, mediante el uso de la Historia es posible generar habilidades en pensamiento sistémico y crítico.

Formas de vivir en el mundo

La política curricular plantea la dimensión "formas de vivir en el mundo". Esta es una categoría significativa. Cuando se diseñó el actual currículo de Matemáticas fue necesario incluir lo que se llamó ejes curriculares, que hacían referencia a valores generales nacionales (que se habían introducido en las ediciones anteriores de los programas nacionales). En los currículos anteriores, sin embargo, se incluían frases u objetivos en relación con ellos de una manera totalmente artificial e ineficaz, era prácticamente para cumplir con un requisito formal. En los nuevos programas la ruta que se siguió fue cualitativamente diferente: usar los contextos reales para introducir muchos de esos valores nacionales y sociales. Puesto de otra forma: los contextos se identificaron como el medio para desarrollar capacidades en los estudiantes para vivir en el mundo de la manera más plena, individual y colectivamente responsable y respetuosa.

Por otra parte: la participación del uso de la Historia como otro eje disciplinar constituye un vigoroso recurso para trasmitir el sentido humano, social, terrenal, de los quehaceres matemáticos, y fomentar perspectivas globales humanistas. El desarrollo sostenible, una premisa de la política curricular oficial, es la forma más apropiada de interpretar y dar sentido al humanismo en el siglo XXI.

Hay mucho más: el área de Números enfatiza una visión práctica útil y lo mismo sucede con Medidas, Geometría y Estadística y Probabilidad. La Estadística busca generar comprensión y criticidad sobre los datos y su tratamiento, representación e interpretación; Probabilidad apunta hacia habilidades para tomar decisiones. Todos estos son elementos que no se restringen a las Matemáticas sino que, con total deliberación, buscan preparar al ciudadano para intervenir con mejores condiciones en la vida en los diversos contextos en los que se enfrenta.

Formas de relacionarse con otros

MEP (2015) en la dimensión "formas de relacionarse con otros" plantea la "colaboración" como una habilidad para "trabajar de forma efectiva con otras personas para alcanzar un objetivo común, articulando los esfuerzos propios con los de los demás" (p. 34). Y propone para la habilidad "comunicación" indicadores de progreso como: "Interpreta diferentes tipos de mensajes visuales y orales de complejidad diversa, tanto en su forma como en sus contenidos" (p. 34).

Hay varios elementos del currículo de Matemáticas que apuntalan ese tipo de habilidades:

- la estrategia central de aula (primer eje disciplinar), pues la fase colaborativa y comunicativa conceptúa explícitamente un espacio donde se expresan y contrastan colectivamente las estrategias, conocimientos, ideas y actitudes dentro del aula
- una de las actitudes y creencias positivas sobre las Matemáticas (tercer eje disciplinar) incluye el desarrollo del trabajo colaborativo: "participación activa y colaborativa"
- el proceso "comunicar" que precisamente apela a capacidades de articulación en diferentes formas (verbal, escrita, etc.).

Herramientas para integrarse al mundo

Para la dimensión "herramientas para integrarse al mundo", MEP (2015) formula dos habilidades:

- Habilidad para entender y analizar las tecnologías digitales, a fin de crear nuevos productos que puedan compartirse.
- Habilidad para acceder a la información de forma eficiente, evaluarla de manera crítica y utilizarla de forma creativa y precisa. (p. 35)

Uno de los cinco ejes disciplinares en Matemáticas es precisamente "uso intenso e inteligente de tecnologías" que sin duda se encuentra en la misma frecuencia de onda que las habilidades consignadas. Se planteó en Matemáticas un uso de las TIC con múltiples propósitos (como se ha consignado en este trabajo), pero de una manera lúcida que permita provocar capacidades en particular para seleccionar el tipo de tecnología necesaria para abordar una situación, para resolver una tarea.

En el currículo de Matemáticas las "tecnologías" se vislumbran como *herramientas* que si bien pueden ser digitales también pueden no serlo (como la regla y el compás). Estimular la capacidad para discernir la pertinencia del uso de estas herramientas es crucial.

Aquí se debe introducir un matiz: las capacidades en torno a las TIC que se pueden desarrollar desde la disciplina deben partir de esta, en ese sentido es crucial introducir su uso en torno a los elementos establecidos del currículo. La mejor manera de aprehender un uso apropiado de las tecnologías no puede darse en el vacío o en contextos artificiales o distanciados del quehacer educativo específico, debe poseer sentido pedagógico. La tecnología por la tecnología en sí misma no sería la mejor ruta. En una convergencia apropiada: TIC y Matemáticas apuntalan las capacidades matemáticas y las tecnológicas de manera armónica.

La contextualización: una herramienta para las habilidades de varias dimensiones

El eje disciplinar de la “contextualización activa”, no artificial, proactiva, enriquecedora, es una herramienta poderosa para vincular los quehaceres cognitivos que provee las Matemáticas a la realidad de un mundo que demanda otro tipo de medios intelectuales distintos a los del siglo XIX y XX. Este potente instrumento curricular permite incorporar los temas y habilidades de las dimensiones: maneras de pensar, formas de vivir en el mundo y herramientas para integrarse al mundo. Los procesos transversales y los niveles de complejidad actúan en los contextos que se usan para colocar las tareas matemáticas específicas, y dentro de este *mileu* se pueden desarrollar las habilidades deseadas, aunque en pertinencia con la naturaleza de la situación.

Si bien todas las áreas matemáticas del currículo plantean el trabajo con contextos de manera activa, con mucha fuerza lo hace Relaciones y Álgebra: un territorio privilegiado para ver, comprender, usar y elaborar modelos en todos los niveles educativos (aunque de manera gradual).

La siguiente tabla resume la mayoría de las asociaciones analizadas entre *Política curricular* y programas de Matemáticas. En la columna izquierda se coloca el aspecto dentro de la política, y en la segunda los elementos del currículo que se le asocian (convergencias) o mediante los cuales cada aspecto se puede materializar.

Tabla 12. *Política curricular* (2016) y Programas de Matemáticas (2012)

Política curricular nacional	Currículo de Matemáticas
Aspectos generales	
Currículo integrado para todos los ciclos educativos mediante habilidades agrupadas en cuatro dimensiones	Currículo integrado para todos los ciclos educativos (salvo preescolar) mediante habilidades de áreas matemáticas, procesos-capacidades superiores transversales y competencia matemática general
Organización progresiva del desarrollo de las habilidades	Organización progresiva del desarrollo de habilidades, procesos y competencia general
Foco: estudiante su construcción cognoscitiva y el docente como facilitador	Foco: la clase con el estudiante como principal protagonista que construye sus aprendizajes y un papel activo del docente ajustado a las demandas de esa construcción.

Política curricular nacional	Currículo de Matemáticas
Maneras de pensar	
Desarrollo del *Pensamiento sistémico*	Mediante problemas concebidos como sistemas complejos de interrelaciones para plantear y abordar en la acción educativa. Mediante proceso "representar" de múltiples maneras objetos cognoscitivos, traducirlos, integrarlos en situaciones complejas, así como mediante el proceso "conectar" que desarrolla habilidades de interacción dentro y fuera de las Matemáticas y en relación con contextos y sistemas complejos reales.
Desarrollo del *Pensamiento crítico*	Mediante proceso "razonar y argumentar", que incluye cuestionamiento de premisas y métodos y argumentos. También mediante enfoques pedagógicos en las áreas que fomentan ese tipo de habilidades: por ejemplo en Estadística y probabilidad.
Desarrollo de *Aprender a aprender*, que subraya resolución de problemas para conocer y auto-regular el aprendizaje	Mediante los procesos "razonar y argumentar" y "plantear y resolver problemas" que incorpora la *metacognición* (auto monitoreo)
Desarrollo de *Creatividad e innovación*	Mediante tareas de complejidad creciente en cuanto a las demandas de los procesos-capacidades y la comprensión de los contextos suministrados
Formas de vivir en el mundo	
Desarrollo de habilidades en dimensión "Formas de vivir en el mundo", en particular hacia el desarrollo sostenible	Desarrollo de habilidades y actitudes para potenciar valores, vida saludable, democracia, desarrollo sostenible mediante el uso de contextos reales apropiados y las tareas matemáticas formuladas en relación con ellos.
Formas de relacionarse con otros	
Desarrollo de habilidades en dimensión "Formas de relacionarse con otros", que incluyen trabajo cooperativo y la comunicación	Mediante el proceso "comunicar" y la fase "colaborativa y comunicativa" de la estrategia pedagógica fundamental del currículo.

Política curricular nacional	Currículo de Matemáticas
Herramientas para integrarse al mundo	
Desarrollo de habilidades en dimensión “Herramientas para integrarse al mundo”, que subraya entender y analizar tecnologías, y valorar y usar con criticidad la información	Desarrollo de habilidades para uso intenso e inteligente de herramientas, en particular tecnologías digitales, a partir de los objetos del currículo de Matemáticas. Enfoque para áreas matemáticas que potencia el tratamiento inteligente de la información.
Formación continua	
Formación continua de los agentes educativos, en especial los docentes	La implementación de la reforma curricular ha incluido: indicaciones puntuales en el currículo para docentes, instalación gradual, documentos y cursos de formación continua desde 2011 a 2017; y la perspectiva es que estos procesos sean permanentes.

Reforma matemática y *Política curricular*

Los ejes disciplinares y la estructura de procesos-capacidades, así como los enfoques específicos sobre las áreas del currículo de Matemáticas, permiten materializar las habilidades formuladas en la *Política curricular* nacional vigente. Las relaciones entre dimensiones y ejes matemáticos se pueden representar mediante la figura siguiente.

Figura 18. Dimensiones de la *Política curricular* y ejes disciplinares en Matemáticas

La figura representa cómo el eje "resolución de problemas" está implicado en las cuatro dimensiones, "contextualización activa" y "uso de tecnologías" cada uno en tres, y "actitudes y creencias positivas" y "uso de historia" cada uno en dos. Dada la intersección de las dimensiones entre sí por un lado y entre los ejes entre sí, debe entenderse que las asociaciones mediante las líneas de la figura consignan solamente aquellas más fuertes.

Más allá del tejido interno del currículo de Matemáticas, la visión que ha impregnado su implementación se encuentra sintonizada con otros propósitos, en especial: la innovación radical en los medios para fortalecer ese proceso de reforma, en especial aquellos ligados a las TIC. Cursos bimodales, virtuales MOOC, Mini MOOC, recursos multimediales, documentos en línea, una comunidad virtual de Educación Matemática que incluye sitios web y páginas en diversas redes sociales, y Apps, han sido ofrecidos a la comunidad educativa durante el periodo 2011-2017. Con su uso lúcido, las TIC son un mecanismo privilegiado para apoyar los planes de una preparación docente y estudiantil con mayor calado social y nacional y, ya en una perspectiva más amplia aun: crear oportunidades que en el pasado no existían para una mayor inclusión social y el progreso colectivo.

La reforma de las Matemáticas que arrancó hace ya varios años, mucho antes de que cristalizara y se oficializara la nueva política curricular por el Consejo Superior de Educación, no solo encuentra un soporte de esta nueva perspectiva curricular nacional, sino que constituye también una posible plataforma para apoyar los nuevos planteamientos, cuya columna vertebral son capacidades esenciales para este escenario histórico planetario.

Evaluación transformadora

Finalmente, otro de los lineamientos que declara MEP (2015) refiere a la evaluación:

> La Educación del Siglo XXI requiere una evaluación transformadora, que se base en la auto revisión continua, a fin de que cada persona identifique sus propias lagunas conceptuales, los enlaces faltantes en los procesos por desarrollar, sus propias falencias para consolidar su propio (nuevo) proceso de aprendizaje. Una evaluación transformadora, que se asuma como una forma de identificar la complejidad de los retos y los nuevos elementos que se integran a los nuevos aprendizajes. Por eso, es necesario incorporar la evaluación continua a los diversos procesos educativos como parte de la mediación pedagógica, en donde la evaluación constituye un proceso sistemático de revisión integrado a la construcción de conocimientos, que aprovecha los errores como parte del aprendizaje y La Educación del Siglo XXI requiere una evaluación transformadora, que se base en la auto revisión continua, a fin de que cada persona identifique sus propias lagunas conceptuales, los enlaces faltantes en los procesos por desarrollar, sus propias falencias para consolidar su propio (nuevo) proceso de aprendizaje.

> Una evaluación transformadora, que se asuma como una forma de identificar la complejidad de los retos y los nuevos elementos que se integran a los nuevos aprendizajes. Por eso, es necesario incorporar la evaluación continua a los diversos procesos educativos como parte de la mediación pedagógica, en donde la evaluación constituye un proceso sistemático de revisión integrado a la construcción de conocimientos, que aprovecha los errores como parte del aprendizaje y que lleva a la comprensión, reconceptualización y reconducción de la apropiación de los aprendizajes. Más que pensar en una nota o en una cifra, la evaluación ha de servir para contribuir a generar y fortalecer el propio aprendizaje. (p. 23)

El propósito de las siguientes partes de esta obra es realizar una propuesta teórica para la evaluación nacional de aula y de gran escala; esto se formulará con mucha precisión intelectual, con la idea que asuma ese carácter *transformador* en el escenario histórico “que lleva a la comprensión, reconceptualización y reconducción de la apropiación de los aprendizajes”.

Sobre la primera parte

En esta parte se ha avanzado en la conceptualización y precisión de algunos de los principales elementos del currículo escolar de Matemáticas en Costa Rica. Para comenzar, su enfoque principal "resolución de problemas con especial énfasis en contextos reales" se ha visualizado en términos de la "selección adecuada de problemas o diseño de tareas matemáticas para la construcción de aprendizajes, con especial énfasis en contextos reales", lo que permite subrayar lo que consignó el currículo: la resolución de problemas como una estrategia metodológica.

Tanto la selección adecuada de problemas o tareas matemáticas como la contextualización activa son consecuencias de la naturaleza de la competencia matemática general, el constructo, que se asume como el propósito que engloba la preparación matemática escolar. Esta competencia, que se busca incrementar significativamente en la población costarricense, solo puede desarrollarse mediante una fórmula equilibrada integradora que incluya conocimientos, habilidades asociadas a las áreas matemáticas y capacidades cognitivas superiores transversales a esas áreas, así como el trabajo con contextos reales y la utilización de modelos matemáticos sencillos, mediante tareas matemáticas con diferentes niveles de complejidad.

En particular, se consignaron 5 categorías de contextos para las tareas matemáticas.

Se suman al propósito de fortalecer esa competencia matemática, dentro de la estrategia metodológica la afirmación de cuatro fases en la construcción de aprendizajes, así como sus ejes: el uso inteligente de tecnologías y de la historia de las matemáticas, y el cultivo, declarado explícitamente, de actitudes y creencias positivas sobre las Matemáticas y su enseñanza.

En esta parte se propuso una estrategia "4 + 6" para valorar las tareas matemáticas. Esta estrategia incluye a su vez un marco intelectual en el cual se plantea un modelo para identificar seis "escenarios" de relaciones entre las habilidades generales (en donde también existen interacciones entre las cinco áreas matemáticas), cinco contextos distintos, un modelo con 61 indicadores para valorar la participación de los procesos matemáticos (cada uno visualizado en tres grados), lo cual se cristaliza como EIPP, y cinco criterios para ayudar al proceso de valorar el nivel de complejidad de un problema (con base en los grados de los procesos). También se ofreció otro modelo simplificado de valoración de grados de procesos y niveles de complejidad.

Una sección final concluye que los Programas de Matemáticas del 2012 se inscriben muy bien dentro de los lineamientos de la *Política Curricular* de Costa Rica para todas las asignaturas en todos los ciclos educativos, aprobadas por las autoridades en noviembre del 2016, y que más aun: pueden servir de apoyo a la materialización de esos lineamientos.

Con base en estos elementos, ahora procedemos a estudiar la naturaleza de la evaluación de los aprendizajes con base en un currículo que enfatiza las capacidades superiores.

2. La evaluación para el currículo costarricense de Matemáticas

Una vez formulado el marco teórico en el cual considerar las capacidades superiores y definida una estrategia para valorar tareas matemáticas, podemos ir a la evaluación. Si duda la evaluación no puede quedar incólume si se cambia el paradigma curricular fundamental. Y eso refiere a los instrumentos que se usan en el día a día pero especialmente refiere a consideraciones más bien generales epistemológicas y a elementos teóricos de la educación. Aquí ofreceremos una visión donde incluiremos aspectos colocados en largo plazo pero también insistiremos en el corto plazo. Recorreremos el territorio de las teorías del aprendizaje donde daremos especial atención al conductismo, e incluiremos elementos generales sobre algunos enfoques curriculares. Esto nos resultará útil pues varias características del conductismo han influido en la práctica educativa nacional.

Como ha existido bastante distorsión sobre el significado de las habilidades en el currículo actual, consideramos conveniente entrarle al tema de frente: se analizan las convergencias y divergencias entre los "objetivos" de los programas anteriores y las "habilidades" del actual.

El énfasis en capacidades superiores replantea el papel de las funciones de la evaluación. En primer lugar, sin duda, la formativa deberá ocupar un papel crucial en la enseñanza-aprendizaje pero a la vez afirmaremos la necesidad de que se establezca un equilibrio entre la formativa y la sumativa. También se argumentará con fuerza que este currículo requiere una evaluación multidimensional, con la aplicación de diversos instrumentos para la valoración del desempeño estudiantil. En ese escenario se mencionará como un elemento cada vez más relevante la introducción de TIC en la valoración de las capacidades del siglo XXI. Sin embargo, tanto el equilibrio entre las evaluaciones formativas y sumativas como la intervención de varios instrumentos evaluativos, incluyendo TIC, requiere de consideraciones de oportunidad histórica ancladas en la realidad nacional. Se afirmará, en ese sentido, que en el corto plazo en Costa Rica no sería posible prescindir de un énfasis en las pruebas, aunque se insistirá que es crucial que estas sean diseñadas en congruencia plena con el currículo.

En esta parte se conceptualizará una convergencia en el diseño de tareas matemáticas para la acción de aula y para la evaluación y pruebas nacionales: la valoración específica de las capacidades que se involucran (con indicadores de los grados de los procesos-capacidades). El papel de la selección-diseño de tareas matemáticas se apuntala y se vuelve a invocar la valoración de las mismas mediante la estrategia “4 + 6”. El diseño de tareas se colocará en la perspectiva más general de acuerdo a conclusiones planteadas en la comunidad internacional de Educación Matemática. Se ofrecerá una estrategia para que de manera colectiva progrese en el país el diseño de tareas matemáticas en consistencia con el currículo oficial.

Una sección especial analiza el *Reglamento de Evaluación de los Aprendizajes* y otra documentación formal que el Ministerio de Educación Pública de Costa Rica ha generado en los últimos años. Se sostiene que la evaluación que corresponde al nuevo currículo de Matemáticas deberá distanciarse de los esquemas y perspectivas que nutrieron currículos anteriores basados en contenidos o esquemas en esencia lineales. Se proponen cambios en la reglamentación y sobre todo en la visión educativa nacional que existe.

La evaluación

La evaluación es una parte muy importante del proceso educativo. Hay por un lado evaluación *de los* aprendizajes y aquella *para* apoyarlos, así como la evaluación en busca de identificar la implementación de un currículo o brindar insumos para mejorar el sistema educativo en general. En inglés se acostumbra identificar estos dos propósitos con dos palabras distintas, respectivamente: “*assessment*” y “*evaluation*”. En el segundo sentido suelen incluirse instrumentos de naturaleza diagnóstica. En este documento especificaremos cuando nos refiramos a una u otra evaluación, y cuando no se hace la distinción es porque las consideraciones aplican a ambas.

En Costa Rica, la Dirección de Gestión y Evaluación de la Calidad (DGEC) del Ministerio de Educación Pública (MEP) es la responsable de la evaluación “sistémica”, actualmente es encargada de pruebas diagnósticas en varios niveles de carácter nacional e internacional (incluyendo las pruebas PISA de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos o las de Laboratorio Latinoamericano de Evaluación de la Calidad de la Educación LLECE de la UNESCO), sin embargo durante muchos años su labor ha tenido un énfasis en la acreditación estudiantil (certificaciones para diversos segmentos de población). La evaluación de aula, por otra parte, se realiza en todas las unidades educativas basada en lineamientos precisos emanados desde oficinas centrales del MEP (Departamento de Evaluación de los Aprendizajes, Dirección de Desarrollo Curricular). Hay una relación particular evidente entre la evaluación de aula y las pruebas nacionales de certificación como las del Bachillerato (que cierran la educación secundaria y son requisito para acceder a la superior). Para la implementación efectiva del currículo de Matemáticas en el futuro, resultaría muy importante lograr mayores convergencia y coherencia en todas estas dimensiones de la evaluación educativa que se realiza en el país.

La evaluación, para empezar, debe diferenciarse de dos procesos con los que tiene íntima relación: la calificación (ofrecer una representación codificada sobre los aprendizajes, usualmente mediante números, letras o categorías), y las pruebas. En ocasiones se distorsiona el sentido de la evaluación considerando que su propósito es la calificación, y en otras el peso de las pruebas es tan poderoso que se promueve una visión limitada de la evaluación. La evaluación busca establecer valoraciones sobre los aprendizajes de los individuos dentro de procesos educativos que son siempre complejos y multidimensionales; si bien la consignación de calificaciones y la realización de pruebas forman parte de la evaluación esta tiene una naturaleza mucho más amplia y comprehensiva.

Normalmente se distingue entre *evaluación formativa* y *evaluación sumativa*. [18] Esta última busca determinar (medir) con la mayor objetividad posible los aprendizajes con propósitos de acreditación o certificación para avanzar en un grado escolar, un nivel o ciclo educativo, o toda una preparación escolar. La *evaluación formativa* puede verse *grosso modo,* si no incluimos la "diagnóstica", como aquella *evaluación que no es sumativa*. La esencia de la formativa refiere a la *realimentación* que esta ofrece: en 2005 la OCDE (citada por Harlen, 2016) señalaba que se trata de "evaluaciones interactivas frecuentes del progreso estudiantil y comprensión para identificar las necesidades educativas y ajustar la enseñanza apropiadamente" (p. 698).

La evaluación sumativa también puede aportar insumos para el aprendizaje de los estudiantes, y la evaluación en gran escala de igual manera (solo que cuando lo hace es de una forma totalmente distinta a la de la evaluación de aula). Existe un continuo entre ambos tipos de evaluación, o lo que es igual: tienen intersección múltiple.

[18] La distinción entre evaluación formativa y sumativa la estableció Scriven (1967). Como resume Escudero (2003): " (…) evaluación formativa para calificar aquel proceso de evaluación al servicio de un programa en desarrollo, con objeto de mejorarlo, y el término de evaluación sumativa para aquel proceso orientado a comprobar la eficacia del programa y tomar decisiones sobre su continuidad" (p. 18). Otra formulación de la formativa: "… como objetivo el seguimiento y la mejora del proceso de enseñanza-aprendizaje, así como ofrecer feedback tanto a los profesores como a los alumnos" (Red Eurydice, 2010, p. 11). Es intersante señalar que Scriven establecía su distinción en relación con evaluación del currículo; sería Benjamin Bloom quien extendería la distinción a la evaluación de aula (William, 2015, p. 249).

Las evaluaciones en gran escala pueden usarse para diagnósticos que permiten visualizar situaciones de interés educativo (por ejemplo rendimientos medios, desempeño en tópicos especiales, etc.), para apoyar el monitoreo o plantear ajustes de currículos, etc. Eventualmente los resultados de estas pueden realimentar el sistema educativo y, por ende, influir la acción de aula. Por supuesto este tipo de evaluación puede servir también para certificar si los individuos poseen las condiciones para avanzar a otro nivel escolar o completar la educación secundaria, como en las pruebas nacionales del Bachillerato costarricense en diversas modalidades.

La evaluación puede disponer de muchos instrumentos: pruebas largas o cortas, proyectos, portafolios, entrevistas, trabajo “extraclase”, observación del desempeño, simulaciones, etc. Algunos de ellos son más útiles en la evaluación formativa que en la sumativa, y viceversa. Cada uno de estos instrumentos puede poseer distintas características. Por ejemplo, las pruebas pueden contener ítems de diverso tipo: selección múltiple (una respuesta o más de una), respuesta cerrada (completar), correspondencia, falso o verdadero, respuesta construida que puede ser corta, mediana, larga. Los proyectos pueden estar orientados a evaluar los resultados o los procesos. Las entrevistas pueden ser estructuradas, semiestructuradas, aplicadas a individuos o a grupos de distinto tamaño; la observación puede ser de desempeño en habilidades cognitivas, sociales o de aquellas psicomotoras o afectivas, entre otras. Los portafolios pueden sistematizar proyectos, productos diversos, recuento de acciones desarrolladas, gráficos, audiovisuales, artefactos, etc. Las tareas pueden incluir partes de proyectos, respuestas a cuestionarios breves, o resolución de problemas especiales, … En resumen: existe una amplia variedad de instrumentos de evaluación de aula cuya elaboración dependerá mucho de los fines que la enseñanza suponga.

En la comunidad educativa internacional existe en los últimos tiempos una tendencia creciente a darle un peso preponderante a la evaluación formativa, basada en la conciencia de la necesidad de considerar la evaluación como un insumo esencial *para* el aprendizaje y no solo como un elemento que sanciona o brinda un “certificado de defunción” (Silver & Smith, 2015; Bay-Willimas & Kling, 2015; Fennell, Kobett & Wray, 2015). Algunos hallazgos señalan que: “la evaluación formativa mejorada ayuda a los estudiantes (llamados) de menor rendimiento que a los demás, por lo que reduce la difusión del logro y, al mismo tiempo, lo eleva en general” (Black & William, 1998, p. 4). Hay muchos otros hallazgos que se han generado sobre este tema: estrategias de anticipación (antes de la acción educativa) o luego de la reacción estudiantil, o que se realicen al inicio de una sesión o después, o estrategias más o menos interactivas (Harlen, 2016, p. 700). Lo que sí parece ser una conclusión válida es que más que asumir la evaluación formativa como un conjunto de acciones esta debe plantearse como un *marco* para usar la información que se desencadena en la acción educativa (Harlen, 2016, p. 700).

Uno de los elementos que, sin embargo, vuelve "compleja" la evaluación formativa es que depende mucho de la voluntad del docente y por ende de sus condiciones profesionales y de su actitud.

La evaluación sumativa, por otro lado, posee muchas ventajas:

- Provee reporte del logro y progreso del aprendizaje de los estudiantes individuales. Permite el monitoreo del logro de grupos de estudiantes (con rendimientos altos o bajos, grupos formados por género o etnia), ofreciendo información que puede ser usada para monitorear la equidad en las oportunidades educativas.
- Provee definiciones de términos operacionales y ejemplarizantes como la comprensión, aplicación del aprendizaje, uso de habilidades.
- Genera estándares y expectativas claras para los estudiantes, docentes y otros usuarios.
- Ayuda al aprendizaje en el largo y medio plazo.
- Apoya el proceso de evaluación formativa. (Harlen, 2016, p. 701)

Esta evaluación siempre codifica "cortes" en una actividad que es eminentemente continua, y por lo tanto resulta inevitable: genera que algunos elementos se pierdan de vista. Una prueba por ejemplo se elabora usando unos pocos ítems que corresponden a solo unos cuantos temas de los que se desarrollan en el aula, y además en tiempos relativamente cortos (por ejemplo 2 o 3 h en un día). Para realizar la evaluación sumativa adecuadamente se deben buscar estrategias que aseguren hasta donde sea posible: *validez* (que se evalúe lo que realmente se señala debe ser evaluado) y *confiabilidad* (que sea independiente del medio y los sujetos involucrados, sin por ejemplo distorsiones debidas al docente).[19]

La validez y confiabilidad sin embargo dependen del instrumento de evaluación que se utilice, es un asunto probablemente más complejo lograr estas condiciones en una observación del desempeño que en las pruebas. Existe una tendencia a favorecer el uso de pruebas para asegurar a todos, estudiantes, docentes y padres de familia, que se está realizando

19 Hay varios mecanismos para mostrar la confiabilidad, por ejemplo: "test-retest" cuando se administra la prueba a la misma población en dos momentos distintos, "formas equivalentes" cuando dos versiones del mismo examen se pueden comparar en longitud y dificultad, "consistencia interna" asegurando que los ítems correspondan a lo que fue enseñado (contenidos), "confiabilidad entre correctores" por ejemplo cuando una prueba es calificada por distintos correctores (Musial, Nieminen, Thomas & Burke, 2009, pp. 110-112).

una evaluación adecuada. Sin embargo, cuando la evaluación descansa mucho en pruebas formales se desatienden algunas otras capacidades, por ejemplo el trabajo en equipo y la construcción colectiva de aprendizajes (Harlen, 2016, p. 701).

Entre evaluación sumativa y formativa existen muchos puentes y no se pueden considerar disociadas absolutamente (Gardner & Galanouli, 2016, p. 712). Y por lo tanto debe haber consistencia entre ambas, con Black (2016):

> … la falta de coherencia entre los propósitos formativos y sumativos de la evaluación deben ser resueltos por un replanteamiento de sus roles dentro de la pedagogía para la cual cada una debe estar a su servicio (y no al contrario). Esta resolución debe satisfacer algunas condiciones. Una es que la validez de las evaluaciones no debe ser comprometida. Otra es que al realizar sus funciones dentro de la pedagogía las evaluaciones deben realizar contribuciones positivas al propósito global de fortalecer el aprendizaje de los estudiantes. Una tercera es que cualquier replanteamiento debe suponer prácticas que los docentes encuentren practicables y recompensadoras. (p. 725)

Aunque las comunidades educativas insisten crecientemente en que la evaluación formativa debería predominar en el aula, es apenas prudente sostener que para que ese propósito tenga éxito se requieren muchas condiciones sociales, culturales e históricas; la realización de este tipo de acciones no siempre es fácil de lograr por razones que van desde las limitaciones de tiempos de gestión, las condiciones de trabajo o debilidades en la preparación de los docentes. No hay reglas universales.

Un elemento que debería considerarse como deseable en todo caso es la participación de los estudiantes en el diseño de los instrumentos de evaluación. Esto no solo se aplica a la formativa, también a la sumativa: por ejemplo al discutir con ellos los criterios de preparación de una prueba, o al ofrecer al estudiante la oportunidad de sustituir los elementos que contienen un portafolio por aquellos que muestran sus mejores desempeños de acuerdo con estándares o criterios que definen el propósito de ese instrumento. No es, sin embargo, algo fácil de diseñar.

Ya sea que se dirija hacia la formativa o a la sumativa, en la comunidad educativa se ha dado un cambio en la evaluación desde “una visión (…) como una serie de eventos que objetivamente miden la adquisición de conocimiento” (Suurtamm et al, 2016, p. 4) hacia “una práctica social que proporciona información y conocimientos continuos para apoyar el aprendizaje del estudiante e influir en la práctica docente” (p. 4). Se enfatiza el proceso y no solo el resultado.

Este cambio ha impactado a los docentes:

> Los profesores han sido impulsados por políticas educativas, revistas de docentes e iniciativas de desarrollo profesional para incorporar nuevas prácticas de evaluación en sus salones de clases con el fin de desarrollar una mejor comprensión del pensamiento del estudiante y proporcionar una retroalimentación apropiada (Wiliam 2015). Los cambios en una amplia gama de prácticas de evaluación en el aula son estimulados tanto por la literatura de evaluación actual del aula (por ejemplo, Gardner 2006, Stobart 2008) como por el pensamiento reciente y la investigación en educación matemática (por ejemplo, NCTM 1995, 2000; Wiliam 2007). (Suurtamm et al, 2016, p. 13)

Un elemento que debe invocarse seriamente en esta ecuación es la utilización de tecnologías. Recientes investigaciones en evaluación basada en computadoras consignan que estos medios no solo sirven para evaluar capacidades superiores (pensamiento crítico, resolución de problemas, creatividad) sino que pueden proporcionar insumos para los docentes sobre los progresos o las necesidades de los estudiantes (Harlen, 2016, p. 705), es decir para apoyar una interrelación entre los propósitos evaluativos.

En una perspectiva aun de mayor calado, el uso de las TIC es crucial en el escenario que atravesamos. Nadie puede negar que las generaciones más recientes y las que vendrán son y serán *nativas* en el uso de las TIC, y que una enseñanza que no las invoque está llamada a provocar el aburrimiento y el desencanto con la formación escolar. ¿Por qué no pensar en el uso de portafolios digitales? ¿Experimentos conducidos usando diversos dispositivos (computadoras, tabletas y teléfonos inteligentes)? ¿Proyectos colaborativos en línea, que pueden sobrepasar las limitaciones geográficas y las distancias? ¿Cursos virtuales con modalidad MOOC que alimenten la acción de aula? ¿Asesoramiento a los estudiantes mediante plataformas tecnológicas en línea? ¿Redes sociales de estudiantes y docentes enfocadas a los aprendizajes?

Y por supuesto las TIC deben incluirse en el terreno de la evaluación de aula. ¿Usar las simulaciones y situaciones controladas en dispositivos para valorar desempeño? ¿Evaluaciones usando los laboratorios fijos o móviles informáticos que gracias a la Fundación Omar Dengo el país ha sabiamente construido desde hace muchos años? No se trataría solamente de que las preguntas de pruebas formales se suministren en una computadora, es ir mucho más lejos en una perspectiva de uso de las TIC que nos enlace con lo que el futuro ya demanda al presente.

Uno de los elementos más importantes para el diseño de la evaluación es la consistencia con su principal referente: el currículo escolar. La batería de instrumentos y sus características dependerán de la naturaleza del currículo. No podría ser igual la evaluación en el marco de un currículo enfocado a los contenidos que en uno en el que las capacidades ocupan un papel medular. Debe existir un alineamiento entre currículo y evaluación. Es lo que Nusche (2016) reafirma como resultado:

> La investigación ha revelado desafíos para asegurar que *curriculum*, estándares, enseñanza y evaluación sean consistentes (Looney, 2011). La lógica central de sistemas basados en estándares se da por el alineamiento de estos elementos clave. Si la evaluación no corresponde al currículo y a los estándares, entonces los resultados de evaluación tienen poco valor para juzgar cuán bien los estudiantes están aprendiendo. Esto, en su momento, volverá difícil el diagnosticar y responder a las necesidades de estudiantes e instituciones educativas. La política entonces necesita darle considerable atención a estrategias sólidas que evalúen el desempeño estudiantil en relación con el currículo y los estándares. (p. 842)

De igual manera, ha sido probado que las reformas curriculares aumentan sus posibilidades de implementación si se acompañan de innovaciones en evaluación que correspondan al tipo de constructo que sostiene el currículo (Nusche, 2016, p. 842).

Ahora bien, este alineamiento debe establecerse con pertinencia histórica. Se requiere un plan de acción con varias etapas.

Aquí debemos ir a consideraciones más generales antes de describir nuestra propuesta de evaluación.

Del conductismo al currículo

En la epistemología occidental han habido dos corrientes muy fuertes desde la Antigüedad Griega: el Racionalismo y el Empirismo. La primera enfatiza el papel de la razón y la mente en la construcción y validez de los conocimientos, la segunda el influjo del mundo externo, y con fuerza los sentidos. Razón *versus* sentidos. Platón, Descartes, Kant ilustran el primer punto de vista aunque con diferencias importantes entre ellos; F. Bacon o J. S. Mills el segundo. Dentro de las tiendas del Empirismo se coloca el Positivismo (A. Comte, E. Durkheim) e Inductivismo en el Siglo XIX, y el Neopositivismo y el Empirismo lógico de la primera mitad del Siglo XX. En los países anglosajones (Reino Unido y Estados Unidos) las perspectivas empiristas han tenido mucha influencia.

El conductismo emergió como reacción frente a visiones racionalistas que enfatizaban un "mentalismo" subjetivista en la comprensión de los fenómenos psicológicos. Esta aproximación teórica buscó ofrecer un sustento a la psicología con base en lo que se asumía eran las características de las ciencias naturales, en ese sentido enfatizar la observación, aspectos cuantitativos, la experimentación y la predictibilidad leída en aquellas. El conductismo planteó la conducta como el objeto de la psicología *versus* las vivencias psicológicas subjetivas difíciles de aprehender. Probablemente la figura fundadora más conocida fue John Watson (del cual su primera obra influyente fue *Psycology as the Behaviorist Views It,* 1913); aunque, años después, se suele señalar a Burrhus. F. Skinner como el conductista más prominente (*The Behavior of Organisms: An Experimental Analysis,* 1938). Sin duda, el enfoque conductista resultaba tremendamente prometedor para abordar el nuevo objeto de estudio. Estudiar los procesos de la mente de manera indirecta como se reflejan en la conducta era sin embargo un reconocimiento de las limitaciones de las mismas ciencias naturales y sociales para describir el funcionamiento de la mente, algo que hasta la segunda mitad del siglo XX empezó a mejorarse gracias a los avances extraordinarios de las tecnologías modernas.

Watson formuló la teoría de "estímulo-respuesta" dentro de un marco en el que se entendía que la conducta, su foco de estudio, representaba una adaptación del organismo al ambiente. La experimentación con animales sería crucial en sus ideas. Una de sus lecturas: el comportamiento complejo se podía desagregar en reacciones más simples (movimientos físicos), cuan moléculas que podrían estudiarse incluso por la fisiología o la física, una conjunción o ensamblaje. Aquí ingresaban también las respuestas condicionadas (como en el perro de Ivan Pavlov): los comportamientos complejos se podían ver como ensamblaje de condicionamientos simples. Esto poseía implicaciones: trabajar intencionadamente en un ambiente que construye simples condicionamientos permitiría ensamblar comportamientos deseados más complejos. Tal vez Skinner (Ferster & Skinner, 1957) fue más lejos sosteniendo lo manipulable del comportamiento por condicionamientos que se desarrollan por medio de "refuerzos" conscientes ("condicionamiento operante"). La idea de que una "recompensa" reforzaba una conducta es de Edward Thorndike, otro autor conductista que además concluyó de sus investigaciones con animales que el aprendizaje era gradual, no súbito o a saltos: y se llamó a esto "ley del efecto" (*The fundamentals of learning,* 1932).

Otra idea de Watson: el pensamiento solo se puede comprender por medio del lenguaje, el cual se puede reducir a emisión sónica de símbolos o a los movimientos corporales que los generan. El lenguaje se adquiere por condicionamientos aprendidos.

Los elementos teóricos que resumimos en esta sección permitieron sostener una posición sobre el aprendizaje y la educación, esquemáticamente: se enfatiza el ambiente, el diseño de estímulos y condicionamientos que generen respuestas adecuadas y cambios de conducta (se puede ofrecer "indicios" o pistas para realizar esos condicionamientos), las entidades más complejas se pueden reducir o desagregar en unidades simples observables y medibles, la construcción de los comportamientos deseados complejos (aprendizajes) es gradual. Una importante propuesta fue la del "aprendizaje programado" (Skinner): colocación en unidades o fragmentos de las materias para las cuales se plantean diversas preguntas o ítems (estímulos) que el estudiante responde (respuestas); cuando es correcta se brinda una "recompensa", todo en un proceso gradual, pedazo por pedazo. El influjo conductista permeó varios modelos curriculares estadounidenses muy influyentes desde mediados del siglo XX.

Uno de los teóricos más influyentes durante el siglo XX en la educación, el diseño curricular y en la evaluación fue el norteamericano Ralph Tyler, quien en su libro de 1949 *Basic Theory of Basic Principles of Curriculum & Instruction* ofreció un modelo basado en "objetivos". Su trabajo estuvo influenciado por autores que se consideran conductistas como Franklin Bobbit (obras de 1918 y 1924) y Werret Charters (obra de 1924).

Se considera el de Tyler un modelo *lineal* porque sostenía una secuencia de acciones: selección de objetivos, selección de experiencias educativas correspondientes a los objetivos, organización de las experiencias, evaluación de los resultados. Es decir: objetivos -> experiencias educativas -> evaluación. Puede añadirse que se trataba de un enfoque deductivo y prescriptivo, va de lo general (objetivos) a lo particular (evaluación de actividades), y afirma una secuencia que debe seguirse en todo currículo.

Otros currículos lineales fueron aportados por Kerr (1968) y Taba (1962). Todos integraban en diferentes proporciones un esquema por objetivos.

Wheeler (1967), sin embargo, ofreció un currículo "circular" con cinco etapas luego de las cuales había que volver a iniciar el proceso. No era exactamente lineal.

No todos los diseñadores curriculares aceptaron los esquemas por objetivos. Uno de sus críticos más reconocidos fue el británico Stenhouse (1975) que propuso lo que se suele llamar un modelo "por procesos", en el cual la secuencia o linealidad se rompe (se puede empezar por cualquier lado) y lo más importante: no se formulan "objetivos" preestablecidos. Stenhouse abogó por lo que se denomina "investigación-acción" en el proceso de enseñanza aprendizaje.

En el modelo de Tyler los objetivos deben implicar los conocimientos por utilizar. Tyler planteaba que en un objetivo educativo hay dos dimensiones: contenidos por un lado, elementos de conducta por otra. Afirma:

> Se puede concluir con seguridad que un establecimiento suficientemente claro de objetivos para ser usado como guía para seleccionar experiencia de aprendizaje y en la planificación de la instrucción indicará tanto la clase de conducta que se desarrollará en el estudiante como el área de contenido o de vida en la cual la conducta será aplicada. (Tyler, 1949, p. 47)

Incluso brinda un ejemplo usando una tabla con dos ejes (Tyler, 1949, p. 50). Aunque Tyler llamó a la segunda dimensión como algo conductual ("behavior", en convergencia con el vocabulario conductista de esa época), no se puede asumir drásticamente que seguía enteramente el influjo conductista. El enfoque conductista empujaría hacia un colección muy amplia de objetivos bajo la línea estímulo-respuesta y recompensa. Tyler se distanció de ese enfoque. En la misma obra citada Tyler expresó que no se inclinaba por la visión de Thorndike quien había establecido "más de 3000 objetivos específicos para la escuela primaria basado en que cada conexión específica como seis más tres o tres más seis tiene que ser construida como una respuesta específica separada de un estímulo específico" (p. 42). Decía: "tiendo a ver los objetivos como modos generales de reacción a ser desarrollados más que hábitos altamente específicos que deben ser adquiridos" (p. 43). Como comentan Anderson *et al* (2001), Tyler buscaba con los objetivos proporcionar un medio para que el docente pudiera visualizar mejor si el estudiante ha aprendido y no un instrumento para lograr ciertos propósitos (pp. 13-14).

Los elementos de conducta incluso pueden verse como habilidades o procesos mentales. En uno de los ejemplos que Tyler ofreció en ese texto de 1949 menciona entre otras: "Habilidad para interpretar datos" o "Habilidad para aplicar principios". Es decir: hay un juego entre conocimientos, habilidades y objetivos. Por el vocabulario que utilizó, muchos autores, asumiendo su propuesta curricular como si fuera simplemente un modelo conductista, lo criticaron ásperamente.

En una entrevista que concedió en los últimos años de su vida Tyler incluso se refirió a las limitaciones de los objetivos conductistas:

> Los objetivos deben ser lo suficientemente grandes para comprender. La capacidad del ser humano es generalizar, de modo que cuando tengas algo específico te ayude a generalizar el principio detrás de él como algo nuevo. De lo contrario, se convierte en un entrenamiento de una persona para hacer un trabajo, pequeñas cosas que no entienden comúnmente. Así que no obtenga objetivos conductuales que sean tan pequeños que no haya generalización. Eso no es humano. Los seres humanos generalizan de su experiencia. (Cordero y García, 2004, p. 11)

Tyler no planteó un currículo simplemente basado en los conocimientos y su lógica, tampoco propuso meros listados de contenidos, tenía un modelo mucho más elaborado. No es cierto, insistimos, que excluya las habilidades asociadas a estos, aquí lo decisivo no son condiciones mentales individuales ni entes demasiado generales e imprecisos sino conductas que pueden ser observadas. Sin embargo, la escogencia del vocablo "conducta" ("behavior") y la insistencia en observar, en esta época, no podía quitarle de encima la carga conductista. Tal vez el problema del enfoque lineal resida en que para la acción de aula es demasiado rígido: el proceso termina en la evaluación.

En el espíritu de esa época se buscó darle mayor precisión a la redacción de los objetivos, incluyendo el uso de verbos específicos que pudieran reflejar las acciones observables. Aunque el propósito original era elaborar un instrumento para la evaluación en la educación superior, luego de un proceso con la colaboración de muchas personas, Benjamin Bloom aportó en 1956 una "taxonomía" que ha ejercido una gran influencia en el mundo educativo. Bloom (quien fue discípulo de Tyler) estableció primeramente seis niveles en la categoría cognitiva: conocimiento, comprensión, aplicación, análisis, síntesis, evaluación. Las acciones y verbos aceptables se agruparon en torno a estos seis niveles. En algunos de estos niveles es posible encontrar habilidades que deben reconocerse como capacidades superiores.

Más recientemente, a fínales del siglo XX, discípulos (o amigos) de Bloom diseñaron una revisión de la taxonomía e incluso una representación (que incluye no solo un eje lineal o dimensión sino dos) con seis niveles cognitivos: recordar, entender, aplicar, analizar, evaluar, crear, colocados en una tabla bastante instrumental:

Tabla 13. La tabla de la taxonomía de Bloom revisada

La dimensión del conocimiento	La dimensión del proceso cognitivo					
	1. Recordar	2. Entender	3. Aplicar	4. Analizar	5. Evaluar	6. Crear
A. Conocimiento factual						
B. Conocimiento conceptual						
C. Conocimiento procedimental						
D. Conocimiento metacognitivo						

Fuente: Anderson et al, 2001, pp. 28-92.

Esta taxonomía "revisada" está planteada para diseñar objetivos e incluso tareas que involucran más procesos cognitivos. Anderson *et al* (2001) tratan de colocar un objetivo o tareas en una de las 24 celdas de la tabla de arriba. El modelo aquí busca incorporar más procesos mentales y con mayor precisión que lo que lograba Bloom. Usaron una distribución bidimensional: en las filas se colocan los tipos de conocimientos, y en las columnas los procesos cognitivos. De hecho, condensan 19 procesos mentales distintos (capacidades) articuladas con los seis procesos de base. Estos se podrían colocar en otra tabla, como a continuación:

Tabla 14. La dimensión del proceso cognitivo

Categorías y procesos cognitivos							
Recordar	Reconociendo	Recuperando					
Entender	Interpretando	Ejemplificando	Clasificando	Resumiendo	Infiriendo	Comparando	Explicando
Aplicar	Ejecutando	Implementando	Organizando				
Analizar	Diferenciando	Atribuyendo (deconstruyendo)					
Evaluar	Chequeando	Juzgando					
Crear	Generando	Planificando	Produciendo				

Fuente: Anderson et al, 2001, pp. 67-68.

Anderson *et al* (2001) buscan ofrecer espacios a las capacidades superiores, y tratan de escaparse del marco conductista, proponiéndose incluso integrar elementos del cognitivismo y el constructivismo. Por eso: "En parte para eliminar confusión, hemos remplazado 'conducta' con el término 'proceso cognitivo'. Este cambio refleja el hecho que la psicología cognitiva y la ciencia cognitiva se han convertido en las perspectivas dominantes en psicología y educación" (p. 14).

En nuestro criterio, estas taxonomías constituyen clasificaciones útiles para diseñar propósitos curriculares pero no deberían entenderse como una prescripción para la acción de aula. La taxonomía de Bloom es sin embargo más rígida y limitada.

Volviendo a Tyler: señalaba que uno de los insumos para el diseño de objetivos curriculares son las teorías psicológicas. Establecía un sentido histórico. Las teorías psicológicas dominantes en su época eran las conductistas, ahora hay otras y se dispone de muchos resultados científicos sobre los procesos mentales. A la larga, la prescripción de Tyler sigue siendo válida, solo que se deben incluir los hallazgos en las ciencias del aprendizaje de nuestra época.

Cuando un diseño curricular “por objetivos” se ve influido por algunos principios conductistas se provocan dificultades. En primer lugar, se potencia la desagregación de objetivos más generales en unidades más simples con la menor intersección posible, es decir: una “molecularización” o reduccionismo. Si se usan habilidades: se asume que las generales pueden descomponerse en colecciones de habilidades menores o prerrequisitos; se presupone que al lograrse estas habilidades menores o básicas entonces se podrían ensamblar aquellas generales.[20] Desagregar y ensamblar parecen aquí procesos muy mecánicos, casi equivalentes aunque en sentido contrario. En segundo lugar, no se promueven tareas que impliquen varios de los objetivos a la vez (una acción compuesta compleja), puesto que, siempre dentro de este tipo de esquemas, resultaría más difícil observar estos objetivos. Las unidades y su ensamblaje se establecen en esencia mediante una yuxtaposición de elementos separados: el todo es la suma de las partes. En tercer lugar, finalmente, se suele adoptar un *gradualismo* secuencial en la obtención de aprendizajes: de lo simple a lo complejo.[21] Los propósitos de gestión de aula se reducen a seguir líneas moleculares (objetivo -> situación -> evaluación) que dependiendo de lo

[20] Las realidades a estudiar o servir para rescribir acciones se basan en el conductismo en un reduccionismo a unidades de análisis donde se proponen estímulos y respuestas, los primeros manipulables, y las segundas a aquello que se puede observar y medir.

[21] La fuente de la que emergen estas limitaciones pareciera ser el considerar que los procesos mentales solo pueden estudiarse con rigor indirectamente usando métodos cuantitativos extraídos de las ciencias naturales (o de cómo se interpretaba era estos), y que por lo tanto fenómenos que, por las debilidades científicas de la época, no se pueden observar con claridad no se consideran objetos válidos para la investigación. Este fue un enfoque heredero de toda una etapa histórica caracterizada por un incipiente desarrollo de las ciencias sociales, el predominio de una visión casualista y mecanicista de las ciencias, y de un “empirismo sensualista” que tenía limitaciones para integrar todos los procesos cognitivos en un marco teórico comprehensivo. La educación sin embargo está directamente asociada a este tipo de procesos “invisibles”, mentales o incluso de naturaleza social.

que se acepte que sea observable o suficientemente molecular puede implicar currículos como colecciones muy grandes de estas líneas sin intersección (como sucedía con Thorndyke, lo que criticaba Tyler).

Una de las limitaciones de entrada de los esquemas estímulo-respuesta-recompensa es que no necesariamente un estímulo provoca una sola respuesta; es decir, un estímulo puede provocar respuestas R_1, R_2, …R_n. Y solo esta circunstancia ya vuelve complejo el proceso de gestión educativa.

¿Cómo se plantea la evaluación en esquemas lineales? Es una fase “terminal”, luego de todas las acciones que se realizaron para obtener la realización de un objetivo. El esquema secuencial-lineal entra en contradicción con una visión de la acción de aula que considera que se da una interrelación muy dinámica entre instrucción y evaluación, en la cual, por ejemplo, el papel de la evaluación formativa es decisivo. Con Stenhouse (1975): se puede iniciar por cualquier lado, pasar de un elemento instructivo a uno evaluativo, y viceversa, reajustar los propósitos y habilidades en juego, en una dialéctica que solo puede comprenderse con amplitud y flexibilidad.

Esquemas curriculares lineales pueden ser útiles en momentos precisos de la evaluación, en particular aquella sumativa o también en procesos de certificación estudiantil que evalúan etapas amplias de instrucción. O también en entornos virtuales de aprendizaje orientados a entrenamientos muy básicos; en este mismo territorio, propósitos educativos más profundos requerirían enfoques y diseños instruccionales multilineales e instrumentos tecnológicos avanzados.

Finalmente, Gronlund & Brookhart (2004) nos advierten sobre lo inadecuado del esquema lineal que inicia con un objetivo muy específico, sigue con un procedimiento de enseñanza y termina con una evaluación tipo prueba; un esquema que suele aplicarse en procesos más bien de “training” (p. 5). Es el tipo de modelo característico del conductismo: un énfasis en “tareas” simples a desarrollar más que en metas educativas (p. 6). Compartimos plenamente sus conclusiones:

> Avances en la psicología cognitiva han apoyado un cambio que se aleja del establecimiento de objetivos en términos de tareas de aprendizaje específico que se deben dominar hacia una aproximación holística enfocada en aprendizajes complejos. Pensar, razonar y resolver problemas complejos puede ocurrir en todos los niveles de aprendizaje si los estudiantes están activamente comprometidos en la construcción de significados a partir de sus experiencias. En lugar de un logro secuencial de logros de tareas específicas de aprendizaje de lo simple a lo complejo, uno desea que los estudiantes muestren un aprendizaje más integrado con un énfasis más amplio sobre resolución de problemas, razonamiento,

> habilidades de pensamiento, y otros tipos de resultados complejos en el desempeño. Este enfoque también favorece el uso de tareas más comprehensivas como aquellas que aparecen en el mundo real (e.g. cómo reducir la contaminación del agua). Obviamente, con este enfoque para la enseñanza, aprendizaje, y evaluación, usted no puede reducir los objetivos a una lista de tareas simples a dominar. Más bien, el establecimiento de las intenciones de aprendizaje se debe enfocar en los resultados más complejos (e.g. usos de conceptos matemáticos en la descripción de un problema). La enseñanza y evaluación de tareas específicas se ve reemplazada por un énfasis mayor en el aprendizaje holístico y una evaluación del desempeño de resultados muy complejos en el aprendizaje. (p. 6)

A continuación vamos a mirar cómo algunos de estos elementos teóricos han influenciado los currículos costarricenses de Matemáticas.

Currículos de Matemáticas en Costa Rica

En Costa Rica los currículos escolares de Matemáticas fueron desde el siglo XIX, en esencia, listados de conocimientos siguiendo la lógica que se creía correspondía a las disciplinas (matemáticas, ciencias físicas, historia, etc.).[22] Hay muchas razones para considerar ese enfoque inconveniente, vamos a señalar aquí solamente dos. En primer lugar: se solía trasmitir los contenidos codificados en los medios de presentación que estos poseen (textos, revistas, libros) al margen de los procesos de construcción individual y social (en ocasiones eran mera reproducción de índices de libros). Incluso cuando se ajustaban para el medio escolar mediante lo que Chevallard llama "transposición didáctica", al colocarse separados de las acciones de construcción cognoscitiva se pierde un significado crucial de la disciplina: las Matemáticas no con colecciones de resultados teóricos sino una práctica que pone en movimiento conocimientos, destrezas y capacidades. La preparación escolar no debe trasmitir solamente lo que Reichenbach (1938) llamaba "contexto de justificación" sino también el "contexto de descubrimiento", es decir: el de los procesos cognoscitivos que participan en la construcción de toda ciencia. No es que la lógica de los conocimientos no sea importante, pero es insuficiente para comprender el desarrollo cognoscitivo y en particular la acción educativa. En segundo lugar, porque solían estar desprovistos de todo tipo de consideraciones para la acción de aula: metodológicas, epistemológicas, psicológicas, etc.

Con el correr del tiempo los currículos experimentaron, en nuestro criterio, un desarrollo muy positivo en acuerdo con el progreso del diseño curricular internacional, se diseñaron en buena medida con influencia de los modelos curriculares por objetivos (lineales).[23] En el caso de Matemáticas, a partir de 1995 (con modificaciones posteriores no significativas en 2001 y 2005) aunque usando el lenguaje de los objetivos se propuso formalmente asumir una visión "constructivista" a la que la política educativa oficial añadía los términos "racionalista" y "humanista" (MEP, 2012, p. 485); sin embargo, muchos de los elementos intelectuales de currículos anteriores siguieron teniendo lugar especialmente en la organización de la malla curricular; una drástica separación entre las intenciones constructivistas declaradas en la fundamentación y esa malla. En realidad la comunidad docente

[22] Véase Ruiz & Barrantes (1995a, 1995b).

[23] Está aun por determinarse si en Costa Rica estos currículos que incluyeron el término "objetivos" respondieron plenamente al enfoque lineal o hasta dónde llegó la influencia conductista o, más bien, si siguieron preservando el viejo esquema que ofrecía un listado de contenidos. Esta sería una interesante investigación histórica.

siguió dándole un mayor valor a la malla curricular, y dentro de ella a los conocimientos, como había sucedido anteriormente. Los fundamentos que se declararon raramente fueron instrumentales para la acción de aula (véase MEP, 2012, p. 484).

El currículo del 2012 tiene un fundamento epistemológico distinto del conductismo. Aquí no se trata ya de identificar solamente entes observables, sino una amalgama de "observables" y "no observables". Aquí no solo interesan los procesos cognitivos involucrados sino que estos, de múltiples y complejas formas, son los que dan significado a la acción educativa. Lo que sucede, como plantearemos luego, es que los "no observables" solo se pueden aproximar, y para ello se requieren diversos instrumentos sociales. El aprendizaje no es un cambio de conducta, constituye un estado cognoscitivo, mental, real, en los sujetos.

El foco de la pedagogía aquí es la acción para generar el progreso de esos estados mentales. Si la humanidad tuviera un conocimiento científico mayor (por ejemplo otro nivel en las neurociencias) podría determinar la naturaleza física de los mismos: células, moléculas, átomos, flujos electromagnéticos, relaciones subatómicas ... No se trata de estados mentales como sentimientos o deseos que, también, se podrían determinar físicamente pero que son más efímeros. El ser humano acumula los aprendizajes en algunos territorios del cerebro que implican partes y procesos corporales múltiples, la mente y sus procesos no están disociados del mundo, el territorio de las capacidades no es simplemente subjetivo e individual. Las ideas y las capacidades poseen un substrato físico. Son reales aunque sean difíciles de visualizar. El conductismo tenía razón al tratar de comprender los procesos psicológicos yendo más allá de los instantes subjetivos individuales y también en afirmar que la conducta, aunque indirectamente, ayuda a *inteligir* algunos de esos procesos; esta es muy importante, pero resultaba insuficiente.

Para nuestra pedagogía, por otra parte, no basta reconocer que el mundo de las ideas y los procesos mentales (capacidades, acciones, aprendizajes) es real, es necesario dotarse de una visión que permita provocar su progreso. Asumimos que el estudiante *construye* su aprendizaje como individuo con base en sus propias condiciones mentales internas (conocimientos, creencias y capacidades), los elementos nuevos se incorporan, asimilan (Piaget); pero a la vez asumimos que lo realiza en un medio sociocultural donde el contacto con otros es esencial (Vygotsky). Por medio de un entorno social preciso la sociedad introduce su influjo (cultura, conocimiento) en el sujeto, quien lo incorpora brindándole un significado que es determinado por su estructura mental individual. Ya sea que se enfatice la dimensión psicológica o la social, se subraya la construcción de esos estados cognoscitivos; aquí es donde se invoca el *constructivismo*.

No obstante debe comprenderse que el currículo del 2012 no adopta “ninguna teoría o paradigma de una manera radical” (p. 488). Lo que plantea es: “. … asumir un criterio amplio, integrador aunque coherente, que utilice los elementos teóricos que se requieren en correspondencia con las necesidades educativas” (p. 488). Entonces los aprendizajes se visualizan: “… como resultantes dinámicas de construcciones cognitivas y de influjos socioculturales que provocan aprendizajes también por otros medios (imitación, repetición procedimental, etc.)” (p. 488).

Lo adecuado de esta aproximación es reconocido por la comunidad internacional:

> … dibujar desde una combinación de fundamentos teóricos puede presentar ventajas que podrían no estar disponibles cuando nosotros descansamos en solamente un marco teórico y sus instrumentos de diseño – ventajas como ser capaz de delinear no solamente un conjunto amplio de principios para el diseño de tareas o secuencias de tareas pero además un conjunto relacionado de principios para el diseño de una cultura instruccional en la cual la tarea va a ser integrada. (Kieran, Dorman & Ohtani, 2015, p. 72)

Se asume, además, que en la construcción de los aprendizajes se ponen en movimiento simultáneamente diferentes procesos mentales con distinto grado o complejidad. En el estudiante los procesos que puede realizar se asocian a capacidades. La pedagogía busca crear las situaciones para que esas diversas capacidades avancen.

Para efectos de sostener la acción pedagógica el currículo costarricense diferencia aquellas asociadas de manera directa a conocimientos de una área matemática (habilidades), y aquellas que trascienden esas áreas de forma transversal (capacidades superiores), pero se comprende que ambos tipos vienen juntos en un mismo “paquete”. Y el avance en estas capacidades posee una dirección: dotar al sujeto de condiciones para actuar en el mundo físico y social en el que le ha tocado vivir.

Objetivos versus habilidades

Aquí conviene retomar una discusión que se ha dado a veces en los medios costarricenses: ¿son equivalentes los "objetivos" de los currículos anteriores a las "habilidades" del nuevo?

En el currículo anterior al 2012, por ejemplo, se establecieron en la malla curricular: objetivos, contenidos, procedimientos, valores y actitudes, aprendizajes por evaluar (cada una de estas categorías se colocó en una columna). Véase la tabla siguiente que correspondía a algunos elementos para Sétimo año.

Tabla 15. Malla curricular de los Programas de Matemáticas 2005

Objetivos	Contenidos	Procedimientos	Valores y actitudes	Aprendizajes por evaluar
1. Aplicar las relaciones de medida existentes entre los diferentes tipos de ángulos en la solución de ejercicios y problemas.	Clasificación de ángulos por su medida. Clasificación de ángulos por su posición. Relaciones de medida entre los ángulos.	Identificación de ángulos conocidos, según su medida, usando los instrumentos geométricos y empleando grados sexagesimales. Reconocimiento de los diferentes tipos de ángulos según su medida. Clasificación de ángulos según su medida. Reconocimiento de ángulos según su posición en consecutivos, adyacentes, opuestos por el vértice. Descripción de los ángulos congruentes, suplementarios, complementarios. Establecimiento de relaciones entre los diferentes tipos de ángulo según su medida, indicando si son congruentes, suplementarios, complementarios. Utilización de las relaciones de medida entre los diferentes tipo de ángulos para resolver ejercicios y problemas.	Valoración de un proceso comunicativo donde se dé un intercambio de ideas y una formulación de conceptos. Orden en su trabajo, en aras de un mayor aprovechamiento de los recursos.	Resolución de ejercicios y problemas donde se apliquen las relaciones de medida existentes entre los diferentes tipos de ángulos.

Objetivos	Contenidos	Procedimientos	Valores y actitudes	Aprendizajes por evaluar
4. Aplicar la desigualdad triangular, en la determinación de tripletas correspondientes o no a las medidas de los lados de un triángulo.	Desigualdad triangular.	Reconocimiento, en ejemplos concretos, de la desigualdad triangular. Formulación de la desigualdad triangular. Utilización de la desigualdad triangular en la estimación de posibles medidas de un lado de un triángulo, conociendo la medida de los otros dos. Utilización de la desigualdad triangular en la identificación de tripletas que corresponden a las medidas de los lados de un triángulo.	Autoconocimiento en sus capacidades, sus potencialidades y limitaciones, al desarrollar actividades propias del quehacer escolar.	Resolución de ejercicios y problemas donde utilice la desigualdad triangular.
5. Aplicar los teoremas de las medidas de los ángulos de un triángulo, en la solución de problemas y ejercicios.	Teorema de la suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo. Teorema de la medida del ángulo externo de un triángulo. Teorema de la suma de los ángulos externos de un triángulo.	Adquisición de información de los teoremas detallados en el contenido. Comprobación experimental de los teoremas detallados en el contenido. Interpretación de los teoremas de las medidas de los ángulos de un triángulo. Utilización de uno o varios de los teoremas detallados en el contenido, para la solución de ejercicios y problemas.	Perseverancia en la utilización de procesos y en la búsqueda efectiva de soluciones.	Resolución de ejercicios y problemas en los que se aplica, uno o varios de los teoremas: - De la suma de la medida de los ángulos internos de un triángulo. - De la medida del ángulo externo de un triángulo. - De la suma de los ángulos externos de un triángulo.

Objetivos	Contenidos	Procedimientos	Valores y actitudes	Aprendizajes por evaluar
6. Aplicar las características y propiedades de los diferentes tipos de triángulos, para la solución de ejercicios y problemas geométricos.	Características y propiedades de triángulos isósceles, equiláteros, escalenos, rectángulos, acutángulos, obtusángulos.	Evocación de los diferentes tipos de triángulos, nombrándolos según la medida de los ángulos, o la medida de los lados. Reconocimiento de las características y de las propiedades de los diferentes tipos de triángulos. Utilización de las características y propiedades de los diferentes tipos de triángulos en la solución de ejercicios.	Tolerancia en la libre expresión del pensamiento. Seguridad al expresar ideas que han sido analizadas y discutidas entre compañeros.	Resolución de ejercicios y problemas en los que se aplican las características y propiedades de los diferentes tipos de triángulos.
7. Aplicar las características de las rectas notables de un triángulo en la solución de ejercicios y problemas.	Rectas notables de un triángulo, altura, mediana, bisectriz y mediatriz.	Descripción de las rectas notables de un triángulo, independientemente del tipo de triángulo. Construcción de las rectas notables de un triángulo. Ubicación del punto de intersección de cada uno de los tipos de rectas notables. Descripción de relaciones entre rectas notables en los diferentes tipos de triángulos. Utilización de las características de las rectas notables en la solución de ejercicios y problemas.	Compañerismo al ejecutar los trabajos de clase. Interés por desarrollar habilidades motoras finas, al utilizar instrumentos geométricos para el trazo de figuras y sus elementos.	Resolución de ejercicios y problemas utilizando las rectas notables y las relaciones entre ellas.

Fuente: MEP, 2005, pp. 63-68

En esencia se sigue el esquema de los modelos lineales, las dos primeras columnas reflejan la tabla de contenidos y conductas esperadas de Tyler; aunque para este último el objetivo sería más bien esa conjunción y no solo la conducta. La tabla incluye además valores y actitudes que corresponden a asuntos que el país decidió fueran transversales para todos los currículos. Una columna final identifica lo que se desea evaluar: para cada objetivo hay un aprendizaje por evaluar. Un importante aporte en este currículo es que se incluyen "procedimientos" para cada objetivo. En realidad más que procedimientos o métodos se pueden ver como acciones o conductas más específicas (más simples) del objetivo alrededor de los contenidos. Por ejemplo: "Identificación de los diferentes tipos de ángulos determinados por dos rectas y una transversal" se podría colocar en lenguaje de conductas como "Identificar los diferentes tipos de ángulos determinados por dos rectas y una transversal"; "Formulación de conjeturas sobre las relaciones métricas entre los ángulos determinados" como "Formular conjeturas sobre las relaciones métricas entre los ángulos determinados".

Un elemento por señalar es que los verbos que se utilizan en los objetivos corresponden en general a aquellos consignados en la taxonomía de Bloom, más o menos sucede igual en los procedimientos (si se convierten los sustantivos en verbos: formulación -> formular).

La columna final no añade mucho al objetivo, pues simplemente se pide que cuando se enuncia por ejemplo "Aplicar" en la primera columna, se plantee "resolver ejercicios y problemas" que muestren ese "aplicar" (con frases como "donde se apliquen", "donde utilice", "en los que se aplica", etc.). En general podría haberse eliminado esa columna, dando solamente algunas orientaciones generales.

En el currículo del 2012, estos tópicos se abordan de manera distinta. Véase la tabla siguiente.

Tabla 16. Malla curricular de los

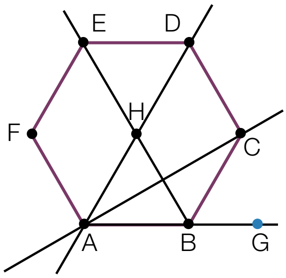
Conocimientos	Habilidades específicas
Ángulos • Llano • Adyacentes • Par lineal • Opuestos por el vértice • Congruentes • Complementarios • Suplementarios	8. Reconocer en diferentes contextos ángulos llanos, adyacentes, los que forman par lineal y los opuestos por el vértice. 9. Identificar ángulos congruentes, complementarios, suplementarios en diferentes contextos. 10. Determinar medidas de ángulos sabiendo que son congruentes, complementarios o suplementarios con otros ángulos dados. 11. Aplicar la relación entre las medidas de ángulos determinados por tres rectas coplanares dadas. 12. Obtener y aplicar medidas de ángulos determinados por dos rectas paralelas y una transversal a ellas, conociendo la medida de uno de ellos.

Programas de Matemáticas 2012

Indicaciones puntuales

- Se deben aprovechar estos contenidos para repasar el concepto de ángulo y la clasificación de los mismos ya estudiados en primaria. Se agregará el ángulo llano.
- Se pueden utilizar algunos conceptos desarrollados en primaria (polígonos regulares) para proponer problemas. Por ejemplo:

  Si el hexágono que se le presenta a continuación es regular, entonces determine las medidas de los ángulos: EHB, EHD, DAB, ABC, CBG.



- Puede también identificar una pareja de ángulos adyacentes, una pareja de ángulos opuestos por el vértice y un par lineal. Asimismo, se podría preguntar cuál es la relación de medida entre los ángulos $\measuredangle DEB$ y $\measuredangle EBA$, así como $\measuredangle EDA$ y $\measuredangle DAB$, y así buscar una correspondencia según la cual $\overline{ED}$ y $\overline{AB}$ son segmentos paralelos.

  Asimismo, se puede utilizar la tecnología con el uso de un software adecuado para obtener de forma dinámica (moviendo un lado del ángulo) la representación gráfica de varios ángulos y de sus medidas (grados sexagesimales). Esto con el fin de establecer clasificaciones y relaciones entre los mismos.

Conocimientos	Habilidades específicas
Triángulos • Desigualdad triangular • Ángulos internos • Ángulos externos	13. Aplicar la desigualdad triangular. 14. Aplicar la propiedad de la suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo. 15. Determinar medidas de ángulos internos y externos de un triángulo, conociendo medidas de los otros ángulos.

Fuente: MEP, 2012, pp. 303-305.

Indicaciones puntuales

▲ La desigualdad triangular se puede introducir por medio de un problema como el siguiente, que también puede servir para introducir los conocimientos relacionados con ángulos internos y con ángulos externos.

En la casa de Cristian luego de una remodelación sobraron cuatro pedazos de cerca de 3,8 m; 4,3 m; 7,3 m y 8,1 m. Cristian desea utilizar ese material que sobró para hacer una cerca triangular para su perro Colitas, pero no sabe cuáles tres pedazos escoger para formar un triángulo. Intente ayudarle a Cristian.

Se pide realizar dibujos tomando como escala al centímetro como metro. Luego se pueden plantear varias interrogantes:

a. ¿Cuáles escogencias sirven y cuáles no?

b. ¿Por qué algunas sirven y otras no?

De las opciones de escogencia que sirven, se solicita medir los ángulos internos y sumarlos.

¿Cuál ha sido la suma aproximada de los ángulos internos de los triángulos?

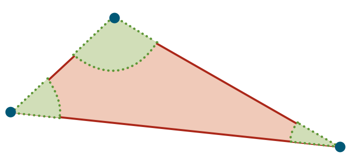
Como ejercicio se pueden proponer tripletas de números para determinar si corresponden a los lados de un triángulo.

▲ Luego, se pide proponer una estrategia para saber cuál de los triángulos encontrados le proporcionaría más área a Colitas.

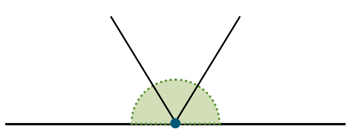
Por último, se realiza la etapa de clausura o cierre para establecer las propiedades de desigualdad triangular, suma de los ángulos internos y suma de los ángulos externos.

Con este tipo de problemas se busca la conexión con el área de *Medidas* y enfatizar en el proceso *Razonar y argumentar*.

▲ Para verificar que la suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a 180° (ángulo llano), se puede pedir que se construya en cartón un triángulo cualquiera y se recorte sus esquinas.



Luego, pueden comprobar el teorema uniendo las esquinas de la siguiente manera:



Aquí es importante que se comuniquen las conclusiones al resto de la clase.

Aquí hay diferencias formales: no hay objetivos, los contenidos se identifican como conocimientos, y desaparecen dos columnas del currículo anterior, se incluye una nueva con indicaciones sobre lo que aparece en las primeras dos columnas. Claramente la manera de organizar los contenidos y conocimientos es distinta a la anterior, hay tópicos que se quitan, y se colocan de otra manera, de entrada se evidencian mayores claridad y orden en la consignación de los elementos curriculares.

De una forma global para geometría (y otras áreas) en todo Sétimo Año hay temas que el currículo del 2012 eliminó de los anteriores programas, e incluye nuevos: por ejemplo, geometría analítica. Pero lo más importante es un cambio en el modelo de presentar los elementos curriculares y más aun de la perspectiva educativa. Las indicaciones puntuales señalan la relación de los conocimientos-habilidades con los ejes disciplinares que el currículo enuncia (por ejemplo: el uso de tecnologías) y otros elementos como los “procesos”. Y brinda las fronteras en las que se deben comprender los conocimientos. Hay más de 1600 indicaciones puntuales.

La malla curricular del 2005 refleja en su diseño la influencia del esquema lineal: objetivo--> contenidos> …--> evaluación, terminando cada fila de las tablas que usa con la evaluación (aunque debe reconocerse que ese currículo no aporta nada muy preciso en cuanto a estrategias de evaluación). En los programas del 2012, deliberadamente, no se incluyó ninguna evaluación asociada en forma directa y mecánica a cada habilidad; en cuanto a evaluación solo se incluyeron algunas recomendaciones generales separadas de la malla. Tanto en la fundamentación, en las secciones, iniciales de cada ciclo como en las secciones de metodología lo que brinda este nuevo currículo son elementos para tomar en cuenta en el diseño de la acción de aula. Es decir: desde la manera de organizar la malla curricular hay diferencias importantes entre los dos currículos.

Vayamos a la comparación entre “objetivos” (currículo 2005) y “habilidades” (currículo 2012). Para empezar, podríamos señalar que con las “habilidades” se subraya el significado de estas como capacidades que se pueden desarrollar en distintos grados, una capacidad se puede provocar o estimular de manera continua, aquí no se trata de una propiedad que se tiene o no se tiene (como si fuera un asunto “binario”, ceros o unos). ¿Y qué pasa con los objetivos? ¿Son necesariamente “binarios”? En nuestro criterio: no. Un objetivo, por ejemplo como: “Aplicar las relaciones de medida existentes entre los diferentes tipos de ángulos en la solución de ejercicios y problemas” representa una habilidad.

Algunos autores como Gronlund & Brookhart (2004), por ejemplo, utilizan el término “objetivo instruccional” precisamente como una habilidad que se desea lograr en los estudiantes: un “resultado esperado de aprendizaje”

(p. 4 y siguientes). Es posible, entonces, establecer una correlación directa entre habilidades y objetivos.

El currículo costarricense del 2005 además de contenidos incluye acciones ("objetivos" o "procedimientos"), sin embargo no provee elementos verdaderamente metodológicos. Esto genera una consecuencia: se ofrece una visión que es fácil de interpretar en un sentido no distante de los esquemas de currículos como listados de contenidos. No es lo que ese currículo formula pero no hay realmente una orientación hacia otro tipo de enfoque. No es extraño que esto sea lo que sigue teniendo gran peso en la comunidad educativa. En el currículo de 2012 los conocimientos son un elemento organizador (de hecho, incluso, apenas se enuncian como objetos, con poco detalle) pero todo se concentra en las habilidades y en los elementos curriculares novedosos que se incluyen en las indicaciones puntuales (metodológicas).

El uso de los términos "habilidades" y "objetivos" debe estudiarse tomando en cuenta que participan en marcos teóricos distintos. En este sentido, el punto de discordia entre los términos se manifiesta con fuerza cuando consideramos cómo se conceptúan las relaciones entre estas unidades curriculares. Por ningún sitio se afirma en el currículo del 2005 que los objetivos deben trabajarse integradamente. Recordemos que en la perspectiva conductista los objetivos deben tener la menor intersección posible entre ellos para favorecer su medición al observarse, prevalece una desagregación en unidades simples. Esto no ocurre con el currículo vigente en Costa Rica. En el nuevo currículo se establece como central que las "habilidades" *deben verse interrelacionadas*. Las "habilidades" se conceptúan como capacidades (asociadas a conocimientos de cierta manera) que se activan simultáneamente teniendo muchos elementos en común. ¿Cómo se expresa esto en la construcción de aprendizajes? En lugar de favorecerse la confrontación con tareas matemáticas simples y separadas unas de las otras, se potencia el trabajo con tareas complejas que, aunque sean abordadas desde distintos ángulos o con diversos órdenes, es preferible verlas integradamente. El aprendizaje no se propone realizar de una manera acumulativa lineal, secuencial, se asume que los sujetos aprenden organizando o estructurando en una forma nueva la multiplicidad de los elementos ya aprendidos y los nuevos.

En el nuevo currículo costarricense, además, las habilidades poseen diversos niveles de generalidad, las específicas pueden asociarse a más áreas matemáticas, en un problema pueden participar habilidades generales y especificas de más de una área. En lugar de linealidad o unidireccionalidad se invocan múltiples relaciones. Se concluye: construir las tareas matemáticas debe hacerse con una actitud flexible en relación con la intervención de las habilidades. Se requiere un diseño de tareas matemáticas con un nivel adecuado de complejidad.

Finalmente, hay otra característica que distancia "objetivos" y "habilidades", y que completa las condiciones a considerar para el diseño de las tareas matemáticas: el poderoso papel que atribuye el nuevo currículo al desarrollo de las capacidades superiores. El propósito de dominar un conocimiento y provocar una habilidad está en función de aquellas capacidades superiores que se desean. Repetimos: no es el interés esencial provocar habilidades, por ejemplo, en torno al Teorema de Pitágoras como, especialmente, las capacidades de razonar y argumentar, plantear y resolver problemas, comunicar, conectar o representar que este contenido puede plantear. Aunque no exactamente igual, es lo que Fujii (2015) reconoce está en la base de las estrategias japonesas:

> Los educadores japoneses distinguen entre "enseñar cómo resolver la tarea" y "enseñar matemáticas a través de resolver la tarea". Esto es por lo cual la mayoría de lecciones estructuradas mediante la resolución de problemas se enfoca solamente en una tarea. Si se ha escogido bien, una simple tarea permite que nuevas e importantes ideas matemáticas surjan en la discusión, y que tareas adicionales sean innecesarias. (p. 278)

Estableciendo un parangón: la habilidad de tener dominio de un balón encuentra un sentido distinto si lo que buscamos es anotar un gol o defender una posición. En el caso de capacidades la relación entre aquellas asociadas a un conocimiento y las superiores transversales es, probablemente, aun mayor que aquellas implicadas en el fútbol.

¿Conclusión? Detrás de los vocablos "habilidades" y "objetivos" hay una diferencia epistemológica importante. En particular, se enfrentan atomización versus integración, tareas simplificadas y compartimentalizadas versus tareas complejas integradoras. La resolución de problemas que consigna este currículo se debe colocar dentro de esta perspectiva. Cuando se plantea un problema (o una colección de tareas matemáticas) se busca desencadenar ese proceso. La naturaleza o el papel de los problemas se ven condicionados por esta visión: no solo se trata de tareas que demandan una acción cognoscitiva nueva (a diferencia de los "ejercicios") sino que además incluyen esta complejidad (interrelación de habilidades). No cualquier problema sirve a los propósitos de esta construcción de aprendizajes. Eso se puede apreciar en las indicaciones puntuales. Véase en la tabla anterior, por ejemplo, cómo las habilidades 13,14, 15 se trabajan todas juntas mediante un problema.

¿Implicaciones para la acción de aula y la evaluación? Si se desea correspondencia con el currículo costarricense vigente, se deben proponer en su mayoría situaciones complejas y tareas matemáticas en las que integradamente se activen las capacidades involucradas.

La evaluación de capacidades superiores

Mientras es posible más o menos evaluar si un sujeto puede identificar los catetos y la hipotenusa, así como la relación pitagórica entre ellos o su aplicación en un entorno, es mucho más difícil medir la capacidad de razonar y argumentar que interviene, la de múltiple representación, o aquella de conectar áreas matemáticas o distintas asignaturas. Es lo que Schoenfeld (2007) consigna:

> Aunque parezca sencillo medir cuánta álgebra, o geometría, o probabilidad un estudiante entiende, los asuntos implicados en la obtención de mediciones exactas de las comprensiones de contenidos por parte de los estudiantes son realmente complejas. Medir las habilidades de los estudiantes para resolver problemas, razonar y hacer conexiones matemáticas es mucho más difícil. Hay una miríada de cuestiones técnicas y matemáticas involucradas. (p. x)

Esta dificultad obedece a que no es posible “observar” las capacidades directamente sino a través de las acciones y el desempeño que realiza el sujeto, y las capacidades superiores tiene un grado mayor de “invisibilidad”; pero hay más: solo pueden evaluarse en situaciones específicas donde hay conocimientos y habilidades. Es decir: no se pueden extraer como si fueran entes aislados todos estos elementos (conocimientos, habilidades capacidades superiores), todos participan de diferente manera integradamente en la construcción cognoscitiva.

Ahora bien, precisamente por ese carácter invisible y complejo no es posible establecer juicios absolutos sobre la intervención de estas capacidades. Esto implica que en la evaluación siempre se obtendrá una aproximación: “la evaluación de las competencias siempre será una aproximación al grado de dominio alcanzado en un momento determinado y de ninguna manera una medición exacta de su consecución por parte del alumnado” (Moreno, 2012, p. 18). Esto de entrada introduce una advertencia fundamental:

> Ninguna forma e instrumento de evaluación es suficiente para evaluar válida y fiablemente todo el espectro de las competencias matemáticas. Por otra parte, a menudo una determinada actividad sólo da lugar a algunas de las competencias, y diferentes actividades implicarán diferentes conjuntos de competencias. (Niss, 2002, p. 11)

Por eso “para que la evaluación proporcione una cobertura justa y completa de todo el conjunto de competencias matemáticas. (…) se necesita un espectro de actividades” (p. 11). Hay evidencia de que solamente pruebas, especialmente aquellas que miden conocimientos factuales, memorísticas, no permiten evaluar capacidades superiores:

> Una prueba por sí sola no puede evaluar adecuadamente la naturaleza compleja del pensamiento matemático de los estudiantes. Por el contrario, se requieren diferentes tipos de evaluación para evaluar procesos complejos tales como la resolución de problemas, justificar o probar soluciones, o conectar representaciones matemáticas. Como forma de escuchar y responder al pensamiento del estudiante, se anima a los maestros a usar una variedad de formatos para la evaluación, tales como conferenciar, observación o tareas de desempeño. (Suurtamm et al, 2016, p. 13)

Las habilidades del siglo XXI:

> … no son fáciles de medir, lo que también es cierto de la amplia gama de factores que dan forma a los resultados del aprendizaje de los estudiantes. Entonces: las medidas del desempeño deben ser amplias, no estrechas, basándose en datos tanto cuantitativos como cualitativos, y un análisis de alta calidad. (OCDE, 2013, p. 15)

Por eso nuevas modalidades se han diseñado:

> Una buena cantidad de la investigación en evaluación se ha enfocado en años recientes en formas innovativas y "auténticas " de evaluación que son capaces de capturar el tipo de aprendizaje que se valora en las sociedades de hoy. Estas formas alternativas de evaluación son comúnmente mencionadas como evaluaciones basadas en el desempeño. Ellas pueden incluir tareas de final abierto como presentaciones orales, ensayos, experimentos, proyectos, presentaciones, tareas colaborativas, casos reales, asignaciones de resolución de problemas, y portafolios. Las principales características de las evaluaciones de desempeño es que ellas evalúan un rango de conocimientos y habilidades pidiendo a los estudiantes realizar una tarea más que dar una respuesta correcta. Y, así, estas son más efectivas para capturar logros más complejos que los formatos de final cerrado .... (Nusche, 2016, p. 842)

Es decir, un currículo que enfatiza capacidades superiores plantea la utilización lúcida de varias dimensiones y diversos instrumentos en la evaluación tanto en las aulas como en las de gran escala que certifican.[24]

---

[24] Para ejecutar esos instrumentos normalmente se vuelve necesario elaborar acciones o estrategias especiales, por ejemplo: uso de rúbricas (Arter & McTighe, 2001) y de tablas de valoración del desempeño de las diversas acciones, involucramiento de estudiantes y mayores niveles de interacción con quien evalúa (Stiggins, 2008), etc. De alguna manera, la aproximación que logra la evaluación es mejor si se dispone de más instrumentos y

En particular, la investigación internacional subraya que al darse la participación de acciones de aula para apuntalar las capacidades superiores se requiere de un papel relevante de la evaluación formativa (Silver & Smith, 2015, p. 6 y sgtes.).

Diseño de tareas matemáticas

Incluso en los países más avanzados económicamente, a pesar de que existen oportunidades para que los docentes realicen evaluaciones correspondientes con currículos que enfatizan capacidades superiores, estas se desarrollan de una manera desigual, y experimentan dificultades, esto como resultado de varios factores: “diseño pobre de políticas, falta de análisis de consecuencias no deseadas, poca capacidad para que los agentes educativos pongan en práctica los procedimientos, la falta de una cultura de evaluación o el uso deficiente de los resultados de evaluación” (OCDE, 2013, p. 17).

Tal vez una de las razones más fuertes es que, aunque se han establecido fines curriculares avanzados, no se brindan indicaciones precisas de cómo desarrollar la nueva acción de aula ni suficientes orientaciones específicas sobre la evaluación (Nusche, 2016, p. 846).

Es precisamente por eso que el currículo costarricense de Matemáticas ofrece de entrada una cantidad extraordinaria de indicaciones puntuales con ejemplos y comentarios que ilustran los propósitos de los elementos curriculares. En esa misma dirección, el *Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica* en el periodo 2012-2015 aportó (a) *documentos de apoyo curricular* y (b) *de integración de habilidades*; los primeros para ejemplificar ejes y elementos curriculares (uso de historia y tecnología, contextualización activa, actitudes y creencias, procesos), y los segundos para orientar y ejemplificar una acción de aula integrando habilidades (con indicaciones incluso hasta del número de sesiones para la “primera” y “segunda” etapas para desarrollar los diversos fragmentos de la malla curricular). Costa Rica dispone de bastantes recursos para implementar este currículo.

---

estos son aplicadas adecuadamente. En la acción de aula la observación ocupa un lugar privilegiado, por eso Moreno (2012) afirma que: “(…) se considera la técnica reina para la evaluación de las competencias porque permite dar cuenta del grado de dominio que un individuo posee de ciertas competencias mediante su actuación en contexto. Las competencias se desarrollan en un continuo en el tiempo; no se trata de constatar si una persona posee una competencia o carece de ella, sino de conocer el grado en que ésta se ha conseguido y para ello la observación resulta fundamental”. (p. 9).

En cuanto a la relación entre currículo y evaluación es que aportamos aquí un modelo con 61 indicadores de la intervención de los procesos o capacidades superiores y cinco criterios para apoyar la valoración de los niveles de complejidad de los problemas, y además una versión simplificada de ese modelo. El modelo completo se brindó a la DGEC del MEP en marzo del 2016 a través de varios seminarios con sus asesores nacionales y los constructores de ítems. Los elementos teóricos que suministramos buscan ofrecer orientaciones para que tanto en las aulas como en pruebas nacionales se tengan instrumentos que permitan la mejor implementación del currículo.

¿Cuáles pueden ser las pautas para abordar la evaluación en general con base en el nuevo currículo de Matemáticas? En primer lugar, en este documento plantearemos que el diseño de la acción de aula, la evaluación que realizan los docentes y la macroevaluación deben partir de la valoración multidimensional de las tareas matemáticas involucradas. Se pretende un modelo teórico que integre estos diversos propósitos de los quehaceres educativos y por lo tanto inevitablemente, en esta oportunidad, el tratamiento debe tener un cierto grado de generalidad.

El lugar del diseño de lecciones

El corazón de nuestro planteamiento es que la selección o diseño de las tareas matemáticas son el común denominador de la acción de aula, la evaluación y las pruebas nacionales. Y que la estrategia de valoración de tareas "4 + 6" puede ser un instrumento muy valioso para esa selección o diseño. Podemos consignar esto colocando selección-diseño-valoración como el nudo pedagógico a seguir para el diseño general y realización de las tareas matemáticas en la acción educativa con base en el currículo oficial de Matemáticas. Véase la siguiente figura.

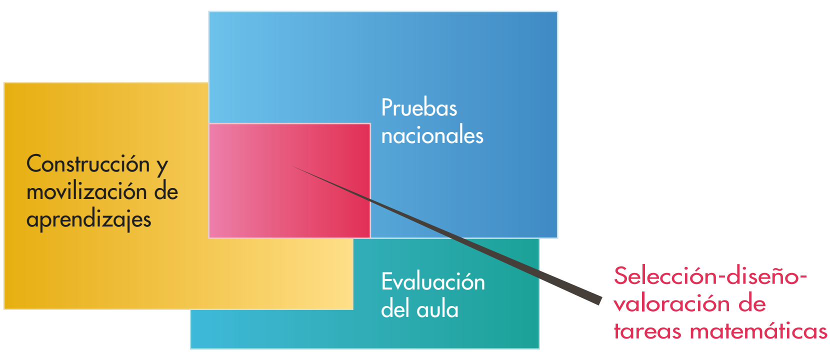


Figura 19. Selección-diseño-valoración de tareas matemáticas

También es necesario señalar que la selección-diseño-valoración no acaba la acción educativa. Es necesaria la ejecución, ya sea en la construcción o movilización de los aprendizajes o en la evaluación. La ejecución debe brindar insumos para mejorar la selección-diseño-valoración.

El currículo oficial de Matemáticas de Costa Rica supone una fuerte atención al diseño de las lecciones:

> (…) adquiere un lugar más relevante con este currículo que los anteriores. Demanda de los docentes una mayor preparación en los diversos aspectos pedagógicos y cognoscitivos presentes en la lección: dominio del currículo y no solo de la malla curricular, preparación matemática en los temas novedosos y también del enfoque correspondiente a cada uno de ellos. (Programa Estado de la Nación, 2015, p. 156)

En esa dirección la preparación inicial que haya recibido el docente es muy importante; si las instituciones formadoras no le aportaron competencias para el diseño de la lección (planificación), el docente tendrá más dificultades para realizar una selección adecuada de las tareas matemáticas.

La planificación a la que hacemos referencia aquí no es equivalente a lo que el MEP pide a los docentes con el término “planeamiento”. MEP (2017), por ejemplo, brinda indicaciones para elaborar un “planeamiento” mensual que adecuadamente afirma que es: “inherente a la labor docente conocer la fundamentación, el enfoque, la intencionalidad y la metodología del programa” (p. 3).

Se brinda una “Matriz de Planeamiento Didáctico”, en la que se incluyen “habilidades específicas” en relación con los “Aprendizajes”, las “Estrategias de mediación” y los “Indicadores”.

REPÚBLICA DE COSTA RICA
MINISTERIO DE EDUCACIÓN PÚBLICA

Despacho Viceministra Académica

Matriz de Planeamiento Didáctico

Dirección Regional de Educación: ______________ **Centro Educativo:** ______________

Nombre y Apellido del o la Docente: ______________ **Asignatura:** ______________

Nivel: ______________ **Período lectivo:** ______________ **Mes:** ______________

Aprendizajes esperados	*Estrategias de mediación*	*Indicadores*
Son los aprendizajes que se espera logren los y las estudiantes durante el proceso educativo. En esta columna se transcriben, de acuerdo con el programa de estudio vigente de la asignatura, los **objetivos, los contenidos procedimentales, las habilidades específicas y los criterios de evaluación,** según corresponda.	Consisten en la descripción detallada de las actividades didácticas para la mediación pedagógica. Se caracterizan por ser secuenciales, concatenadas, graduales y responden a los momentos que establece cada programa. Deben ser variadas, acordes con los estilos y ritmos de aprendizaje de los y las estudiantes; incluyen los recursos didácticos que se requieren para su desarrollo. Propician el desarrollo de **los objetivos,** los **contenidos procedimentales,** las **habilidades específicas** y **los criterios de evaluación,** según se indica en el programa correspondiente.	Corresponden a conductas observables que permiten recopilar información y valorar los aprendizajes adquiridos. Deben ser congruentes con las estrategias de mediación. Describen los niveles de desempeño y el logro de **objetivos,** los **contenidos procedimentales,** las **habilidades específicas y los criterios de evaluación** según corresponda en cada programa de estudio. Para su redacción se utiliza un verbo en primera persona del singular que describe de forma precisa y comprensible un único aspecto por observar.

Observaciones: Espacio designado para que la persona docente anote la información adicional relevante que considere pertinente.

Educar para una nueva ciudadanía

Figura 20. Matriz de Planeamiento Didáctico del Ministerio de Educación Pública. Fuente: MEP, 2017, p. 5.

Esta matriz aunque refiere también a los "objetivos" de otros currículos, al incluir "habilidades específicas" permite que se logre sintonía con el de Matemáticas del 2012, sin embargo no hay referencia a procesos o capacidades superiores salvo en una nota sobre evaluación que solamente incluye los términos “capacidad para la resolución de problemas” (p. 6). Por supuesto: habilidades específicas podrían tratarse de interpretar como capacidades que incluirían las superiores, pero al menos para Matemáticas se genera confusión con sus términos precisos.

Volvamos a la lección: su diseño es crucial, pero, de una manera general, volvemos a advertir que debe tenerse cuidado en no hacerlo parte de un esquema lineal secuencial (objetivo->…->evaluación). La perspectiva entre los componentes evaluativos invoca mucha interrelación. En particular, la evaluación nutre el diseño y el desarrollo o ejecución del mismo.

Capacidades matemáticas y no matemáticas

En los procesos de aprendizaje se visualizan o plantean capacidades no solo matemáticas: por supuesto cognitivas pero, también, psicomotoras, emocionales, sociales, algunas relacionadas con el trabajo en grupo o el trabajo autónomo del individuo, o bien para la correcta identificación de elementos informativos, el uso eficaz de bibliotecas o de Internet o de instrumentos tecnológicos, o la adecuada organización de las acciones. Toda una gama de capacidades intervienen en los procesos educativos de formas muy distintas dependiendo del nivel educativo, de la asignatura, del medio sociocultural. Cuando el sistema educativo enfatiza las capacidades, todas estas deben tomarse en cuenta para diseñar y conducir la acción de aula y la evaluación. Existen instrumentos para apoyar que los docentes realicen su labor valorando el desarrollo de todas esas capacidades en los estudiantes (reglamentos, rúbricas, paquetes especiales de software, *Apps, …*).

¿Qué implica esto para el diseño de tareas matemáticas? Que en dependencia del objetivo y el nivel educativo las tareas matemáticas se podrán asociar en menor o mayor grado a tareas de otras asignaturas o a asuntos educativos generales. En la acción de aula en la enseñanza primaria esto sucede con frecuencia (de hecho, se busca deliberadamente esta intervención múltiple); en el Ciclo Diversificado la situación no es la misma. Cuando se trata de una prueba nacional en una asignatura es aun menor el contacto con tareas asociadas a otras capacidades. En toda circunstancia, este tipo de elementos debe tomarse en cuenta. Sin embargo, nuestro propósito en este documento no es incidir en toda esa compleja situación y en cada uno de los posibles elementos que intervienen, nuestro objetivo aquí es enfocarnos en las tareas matemáticas presentes formuladas explícita o implícitamente. La primera indicación es entonces: identificar las tareas matemáticas.

Naturaleza distinta de tareas matemáticas

La tarea matemática estará determinada por el propósito educativo. Aunque sostenemos que la selección / diseño / valoración de tareas matemáticas puede verse como un punto de partida para el desarrollo de lecciones y también para la evaluación debe comprenderse que las características de las tareas son distintas:

- En una situación de construcción de aprendizajes en la clase la tarea debe considerar que habrá intervención del docente y un escenario social particular; esto no es el caso cuando no existe una intervención docente o no haya un entorno de aula.
- En la etapa de movilización de los aprendizajes, otro ejemplo, se trata de otra situación también diferente pues aquí el estudiante ya ha pasado por un proceso de aprendizaje, y tiene los elementos para aplicar o movilizar esos aprendizajes.
- Cuando se trata de evaluación la relación con las tareas seleccionadas también es distinta según sea formativa o sumativa.
- Es posible encontrar conexiones entre la selección de tareas matemáticas para desarrollar las lecciones y la evaluación formativa.
- La evaluación sumativa en general posee mayor asociación con la etapa de la movilización de aprendizajes, aunque siempre es posible, dependiendo de la modalidad evaluativa, que se construyan aprendizajes durante la misma; puede pensarse, por ejemplo, en proyectos que estimulen nuevas habilidades o aborden nuevos conocimientos.

Esta discusión implica que hay tareas matemáticas que bien pueden servir para el desarrollo de lecciones, pero que podrían resultar inadecuadas para una evaluación, y viceversa; un contexto o problema para trabajar en el aula con el docente y con otros estudiantes dentro de un entorno, no sería necesariamente igual de conveniente para introducirlo por ejemplo en un examen. En nuestro criterio es poco probable que los problemas del nivel de complejidad “reproducción” permitan desencadenar la construcción de aprendizajes, es decir sería conveniente suponer que para esta acción deban usarse problemas de “conexión” y “reflexión”. Y en pruebas, sin embargo, una cantidad de los ítems debe ser de “reproducción”.

En la evaluación cotidiana ejecutada por el docente este tiene un conocimiento muy cercano a lo que ha desarrollado en sus lecciones y del escenario en que se mueven sus estudiantes, y por eso debería estar en condiciones de realizar una selección apropiada de las tareas matemáticas. Aunque los sistemas educativos de apoyo, textos, asesoría o supervisión docentes pueden jugar un papel para que la evaluación sea apropiada, en gran medida el éxito en la selección de las tareas dependerá de las competencias profesionales que tenga el docente.

Conocimientos, habilidades, estrategias metodológicas para las tareas

Las tareas matemáticas seleccionadas obviamente deben corresponder a un conjunto de elementos curriculares que se deben determinar con mucha precisión. ¿Qué deben saber los estudiantes en el momento y nivel escolar planteados? ¿Qué habilidades deben tener? Para esto el currículo brinda información pero no es suficiente: este no puede sustituir la realidad. ¿Cuáles son los conocimientos y habilidades de que efectivamente disponen los estudiantes? Eso solo se puede determinar con un diagnóstico en el terreno (evaluación diagnóstica). Lo más probable es que en la misma clase haya individuos con diversos niveles de conocimientos y habilidades sobre un mismo tópico. En segundo lugar: ¿cuáles son los conocimientos y habilidades que se busca desarrollar? Cuando se trata de un enfoque por contenidos, con la valoración de esos elementos bastaría, pero no cuando el desarrollo de las capacidades matemáticas superiores constituye un propósito medular. ¿Cómo entonces diseñar la acción educativa? La responsabilidad del docente no es sencilla.

En el desarrollo de las lecciones, adicionalmente, la selección de las tareas matemáticas debe tomar en cuenta algunas estrategias metodológicas dentro de un escenario de clase: por ejemplo, la existencia de la acción estudiantil y la docente en las cuatro fases que plantea el currículo costarricense, y que esta selección se articule para que mediante la realización de las tareas matemáticas se pueda desencadenar la construcción o la movilización de aprendizajes.

La valoración de las capacidades superiores

Mediante el diseño de las tareas matemáticas y el desempeño general en las mismas obtenido por los estudiantes, se podrán aproximar los niveles de progreso en todos los elementos curriculares que participan de manera integrada (conocimientos, habilidades y capacidades superiores). Aquí, sin embargo, queremos resaltar la demanda para incorporar las capacidades superiores en la valoración, pues como señala Niss (2003):

> La realización de cualquier actividad matemática requiere el ejercicio de una o varias competencias matemáticas. Por lo tanto, se convierte

> en una tarea esencial identificar - tanto a priori como a posteriori - las competencias necesarias y suficientes competencias involucradas en una variedad de actividades matemáticas como resolver un problema matemático puro o aplicado, leer un texto matemático, probar un teorema, investigar la estructura de una teoría matemática, escribir un texto que contenga componentes matemáticos, dar una charla, etc. (p. 9)

¿Cómo valorarlas? Es mediante el uso de indicadores de la acción cognitiva que demanda una tarea matemática que es posible *a priori* estimar las capacidades superiores involucradas. Es lo que se ha consignado como la *Estructura de Intervención de los Procesos en un Problema* (EIPP) y el *Nivel de Complejidad* (NC).

La realización de las tareas matemáticas brindará una valoración de la intervención de las invisibles capacidades; es decir: como no es posible observar las capacidades directamente, la clave para aproximarlas reside en el diseño de instrumentos que al aplicarse consignen la intervención. Un estudiante que resuelve exitosamente un problema determinado habrá mostrado no solo su dominio de un contenido sino ciertas capacidades superiores.

Ahora bien, la resolución de las tareas matemáticas se da con diversos niveles de éxito según cada estudiante. ¿Qué significaría un 50, 70 o 90 porcentaje de éxito en esa resolución en cuanto a las capacidades? Un análisis más detallado (incluyendo más instrumentos) podría aportar más información acerca de si, por ejemplo, en esas tareas un 50% implica una participación de las capacidades de una forma y un 80% lo hace de otra. No es posible asegurar que un 50% de resolución significa que se usaron cada una de las capacidades a la mitad de lo que ocurriría cuando se resolvería al 100%. El asunto es complejo puesto que en el individuo la forma como se ensamblan las capacidades para realizar una tarea puede ser muy diferente.

Los instrumentos que se usen para la evaluación deben ser consistentes con el enfoque curricular, y en particular son relevantes las características específicas de la aplicación del instrumento. Por ejemplo, pruebas escritas pueden ser congruentes o no con el enfoque del currículo costarricense, todo depende de su diseño. Si estas pruebas se elaboran sin incluir lúcidamente los procesos matemáticos y niveles de complejidad o no utilizan los enfoques curriculares, el instrumento no sería congruente con este currículo. Y lo mismo sucede con las pruebas nacionales. En la experiencia de Costa Rica, en ciertos medios educativos, se ha vuelto bastante común deslegitimizar los exámenes como un instrumento valioso en la enseñanza aprendizaje. En nuestra visión lo que se enfatiza es que estos deben ser diseñados con calidad y pertinencia, aunque se invoque la participación de otros instrumentos.

En el caso de pruebas nacionales es posible que, aunque se apliquen instrumentos que brinden la información sobre la implementación curricular, sea más difícil tener certeza sobre esas condiciones, y esto vuelve más complejo encontrar los equilibrios entre demanda curricular y realidad educativa. Es por eso que la medición que se realiza en la prueba nacional que certifica siempre debe verse como un elemento a incluir en un escenario más amplio, en el cual, por ejemplo, la promoción de los estudiantes es un asunto de una naturaleza que trasciende esa medición y en la que las autoridades educativas tienen un papel que cumplir.

Hemos enfatizado en este trabajo el papel de las capacidades superiores, pero debe insistirse que en el diseño de tareas y en particular en la evaluación los conocimientos, las habilidades y esas capacidades participan integradamente. Coincidimos en que:

> La naturaleza y propósitos de una evaluación además influencian las actividades cognitivas específicas que son expresadas por el estudiante. (…) Caracterizar las evaluaciones en términos de componentes de competencia y de demandas de contenido y proceso de la materia brinda especificidad a los objetivos de evaluación como “pensamiento de alto nivel” y “comprensión profunda”. (…) Con objetivos articulados y una comprensión de la correspondencia entre las características de las tareas y las actividades cognitivas, las demandas de los contenidos y procesos se alinean con los objetivos de desempeño. (Bransford, A. L. *et al*, 2000, pp. 244-245)

En la evaluación es relevante incluir esta interrelación con la perspectiva de fortalecer las capacidades cognitivas.

Diseño de tareas en la Educación Matemática: perspectiva general

La valoración de los problemas y las tareas matemáticas que se ha propuesto en este trabajo se inscribe dentro de una perspectiva aun más general del diseño de tareas matemáticas (“task design”) que ocupa un lugar muy relevante en la comunidad internacional de enseñanza de las Matemáticas.

El tópico “tareas matemáticas” no es algo nuevo, siempre ha estado presente en la enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas. Al fin y al cabo lo que se hace en las prácticas educativas es colocar tareas a partir de las cuales provocar interacciones colectivas que pueden generar aprendizajes. El asunto es que ahora se plantea en el seno de una disciplina científica relativamente joven, que elabora constructos, posee mecanismos de construcción, validación y comunicación muy precisos. Por eso MEP (2012) señalaba:

> La Educación Matemática convoca, por un lado, un campo **independiente** de investigación y por el otro una profesión asociada a ésta (Kilpatrick, 1992; Sierpinska & Kilpatrick, 1998, pp. 527-548; Artigue, 2011). Y la independencia se subraya: la Educación Matemática no es ni matemática ni pedagogía general, ni una suma o yuxtaposición formal de ellas (Brousseau, 1997). Sus asuntos son distintos y propios, eso sí, con demandas formativas que involucran el dominio de las matemáticas y la pedagogía general, pero en una síntesis científica. (p. 480)

Esto ha implicado lo que Ruthven (2015) señala:

> En la última mitad de siglo, el campo de la Educación Matemática se ha vuelto indudablemente más ambiciosa en sus aspiraciones de coordinar el diseño de la enseñanza con la formulación de teoría a través de un proceso de desarrollo guiado más estrechamente por técnicas basadas en la investigación. (p. 313)

La investigación en Educación Matemática adquirió significado como ciencia independiente en los años sesenta y setenta del siglo pasado. Durante los setenta el énfasis en la nueva comunidad científica estuvo dado por las teorías del aprendizaje dominantes y los modelos que se derivaron de ellas. Prevalecía una reacción hacia los esquemas conductistas que habían dominado durante las décadas anteriores especialmente en los Estados Unidos. En esos años se dio una gran influencia de la psicología como un insumo central, y en particular de las ideas de Piaget sobre el aprendizaje de las Matemáticas (“epistemología genética”). Se trataba de un enfoque que privilegiaba las dimensiones cognitivas individuales (realizadas por el sujeto). Ya en los años ochenta y noventa otras influencias cobraron fuerza, en particular las ideas de Vygotsky (debido a traducciones desde el ruso de sus trabajos escritos varias décadas antes), que brindaban una gran importancia a los aspectos socioculturales y en particular al papel de educador. La temática del diseño de tareas matemáticas comienza a encontrar un lugar más relevante en la Educación Matemática probablemente cuando esas dimensiones sociales empiezan a pesar más en la nueva comunidad.

No obstante, consideraciones sobre "diseño instruccional" habían sido planteadas por R. Gagné (1965) en *The Conditions of Learning*, bajo el influjo conductista; y también la psicología cognitiva jugó un papel importante en reorientar el foco de atención más allá de los aprendizajes durante los años 60, en particular mediante el trabajo de H. A. Simon (1969) en su libro *The Sciences of the Artificial*, que sirvió de base al psicólogo R. Glaser para su trabajo *Components of a Psicology of Instruction*: *Towards a Science of Design* (1976) (Kieran, Dorman & Ohtani, 2015, pp. 21-22).

En la comunidad de Educación Matemática esta temática evolucionó en las dos últimas décadas del siglo XX desde una visión que, por ejemplo, enfatizaba el diseño de buenas prácticas docentes para generar aprendizajes (H. Freudenthal y A. Bell a fines de los años 70), o experimentos de enseñanza con base en la influencia de ideas "estilo Vygotsky", hasta diseños basados en teorías como la "ingeniería didáctica" (en los años 1980) a partir de la "teoría de situaciones didácticas" (TSD, que se asocia a G. Brousseau pero que ha sido desarrollada por muchos investigadores en Francia y otras latitudes).

En los últimos 20 años se han generado múltiples modelos de diseño de tareas con diferentes relaciones con teorías de aprendizaje, con planteamientos sobre la naturaleza de las Matemáticas o de su enseñanza y con diferentes grados de precisión (o de generalidad) en su intervención. Kieran et al (2015), por ejemplo, establecen tres niveles en los marcos teóricos que integran los modelos para diseñar tareas: grandes, intermedios y aquellos que refieren a un dominio específico. Los primeros serían por ejemplo el constructivismo, cognitivismo y el socioculturalismo; entre los segundos entrarían la TSD, el Estudio de la lección (EL), la Teoría de la Variación (TV), la Educación Matemática Realista (EMR) y otros (pp. 22-32). En el tercer nivel entrarían, por ejemplo, marcos para el desarrollo de la argumentación matemática en la resolución de problemas geométricos, o uno para problemas de demostraciones matemáticas mediante diagramas, o para el aprendizaje de conceptos y operaciones con números enteros (pp. 36-41); es decir, estos últimos orientados a tópicos específicos de contenido matemático (geometría, representaciones algebraicas, pensamiento numérico, …) o a procesos o capacidades que se dan en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (argumentación, plantear y resolver problemas, …). En realidad, en el diseño de una tarea intervienen varios niveles de marcos teóricos en una proporción determinada. En términos resumidos concordamos con Ruthven (2015) en que en esta comunidad: “la atención se ha cambiado en este periodo desde el diseño de currículos de gran escala a tareas de escala más reducida” (p. 313).

Según señalan Kieran et al (2015): una distinción realizada por Ruthven, Laborde, Leach y Tiberghien (2009) indica dos tipos de categorías para analizar los modelos de diseño de tareas: “diseño como intención” y “diseño como implementación” (p. 28). La primera corresponde a un énfasis en la formulación inicial, en la coherencia de la propuesta y tiende a estar asociada más estrechamente a una teoría. En la segunda el énfasis es el proceso mediante el cual la tarea es integrada en un ambiente de aula. En esta última el diseño puede sufrir modificaciones y refinamientos a través de la experiencia colectiva que se realice. Un ejemplo del primer énfasis es TSD: un fuerte marco teórico que desencadenó y ha sostenido el diseño de tareas. EL, por otro lado, no es respuesta o no representa una necesidad de un marco teórico específico, responde más bien a tradiciones relacionadas con la acción de aula en las que se invocan varios elementos: sentido de las Matemáticas y pedagogía, experiencias realizadas, articulación curricular, etc. (pp. 72-73). Sin duda existen múltiples relaciones entre ambos énfasis y en algunos casos sería difícil de establecer un juicio definitivo acerca de si se da un énfasis o el otro.

El asunto se podría colocar también en el terreno de la relación que tiene el diseño de la tarea con una teoría: ¿la teoría empuja hacia un diseño? ¿la ejecución de la tarea nutre la teoría? En todos los casos una tarea se verá influenciada por su implementación. De hecho, debe subrayarse que para que cualquier tarea matemática tenga un impacto en los aprendizajes debe analizarse más lejos de su formulación, es decir: se invocan indicaciones para su realización dentro de un entorno educativo particular. Como señala Artigue (2015) a las “tareas como objetos no puede dárseles sentido independientemente de su inserción en un escenario de implementación, un escenario que es dependiente del contexto considerado para su implementación y no solo de las perspectivas de aprendizaje” (p. 326).

La última distinción que hemos retrotraído nos va a servir para mostrar algunas dimensiones de la naturaleza de la propuesta sobre tareas matemáticas que realizamos en este trabajo.

El diseño de tareas matemáticas se ha convertido en un foco central de la comunidad de Educación Matemática: ¿qué es lo que debe hacerse en el aula o en los procesos de evaluación para propiciar el mejor desempeño de aprendizaje? Se ha dado una clara evolución de centrar la mirada en el aprendizaje y el estudiante de manera aislada, para volcarla hacia una acción conducida por el docente o provocada por el sistema educativo que logre apoyar el aprendizaje.

El diseño de tareas matemáticas que se plantea para Costa Rica en este momento histórico para la educación preuniversitaria, en nuestro criterio, debe usar como su sustento teórico principal el currículo nacional y estar asociado a su implementación de manera precisa, no se trata de un “diseño como intención”. Esto define sus fronteras: no se pretende generar prácticas para evidenciar una teoría de aprendizaje o un marco teórico “intermedio” del diseño de tareas, ni tampoco la construcción de tareas experimentales para buscar el progreso de la enseñanza de las Matemáticas en general. Aunque nuestro enfoque posee mayor acercamiento con la orientación del EL, que invoca explícitamente un currículo y también pretende influirlo, no se busca el diseño de una lección especial de corte investigativo, aquí se plantea la práctica hacia el diseño de tareas que la mayoría de los docentes puedan desarrollar. Lo que buscamos son instrumentos o estrategias para potenciar la reforma de la enseñanza de las Matemáticas que inició en el 2012. Por lo tanto: intervienen con mayor fuerza consideraciones sobre las características de la realidad local que atraviesa el país.

Una estrategia para el diseño de tareas matemáticas en Costa Rica congruente con el currículo

En el currículo costarricense se da un papel relevante a la fase inicial de *planeamiento* y se considera crucial la valoración de la intervención de cinco capacidades superiores y los tres niveles de complejidad. Las consideraciones, indicadores y criterios aportados en la primera parte de este trabajo pueden servir de base para nutrir esta fase. La forma en que esto muerda la realidad nacional, sin embargo, debe obedecer a una estrategia colectiva, que sugeriremos en lo que sigue. Antes, sin embargo, introduciremos una apreciación sobre un asunto que debe tomarse en cuenta dentro de esta ecuación.

En teoría, el diseño de tareas para el aula por parte de los docentes debería hacerse contando con recursos, como por ejemplo textos, que en acuerdo con el currículo aportaran problemas adecuados para un tópico en un nivel educativo. El medio usado debería ofrecer el problema, su valoración en términos de su pertinencia para el entorno de aprendizaje y un plan de implementación que incluya consideraciones para cada fase de la lección así como sugerencias para realizar la evaluación. En el caso de Costa Rica desafortunadamente las empresas e individuos que publican materiales escolares los han aportado con carencias importantes. A pesar de que algunos afirman una correspondencia de sus materiales con el currículo del 2012, la realidad es otra. ¿Por qué? No se aplica en este país un sistema oficial que asegure en los textos y recursos educativos la pertinencia, calidad y congruencia con el currículo oficial. De igual manera la preparación docente que ha predominado en los últimos años no aporta suficientes elementos para poder realizar un un diseño-implementación en los términos apropiados para poder desarrollar la enseñanza y aprendizaje con los mejores estándares de calidad. En contraste, en un escenario como el japonés, por ejemplo, hay seis casas editoriales que publican colecciones de textos los cuales cuentan con la revisión cuidadosa y la autorización por parte del poderoso Ministerio de Educación, Cultura, Deportes, Ciencia y Tecnología (Fujii, 2015, p. 281). Los docentes diseñan las lecciones teniendo a mano los diversos textos y utilizando aquellos cuyos enfoques les resultan más convenientes. Además poseen una fuerte preparación académica que se ve favorecida por importantes procesos de selección para poder ejercer su profesión.

¿Qué estrategia seguir entonces en Costa Rica para potenciar el diseño de tareas matemáticas con base en el currículo oficial? Como hemos propuesto, el nudo pedagógico fundamental sería la selección-diseño-valoración de las tareas, en donde el modelo “4 + 6” debe ocupar un papel privilegiado; sin embargo como la acción educativa invoca además la ejecución o implementación de las tareas, es necesario considerar una orientación múltiple con diversas acciones, que se pueden resumir en fases:

> Fase 1. Elaboración de tareas o problemas “prototipo” que consignen con bastante detalle las características de las tareas matemáticas planteadas utilizando el modelo “4 + 6”.
>
> Fase 2. Diseño de nuevas tareas o problemas a desarrollar por parte de una amplia comunidad de diseñadores: asesores de matemáticas nacionales y regionales, investigadores y estudiantes avanzados de las universidades, expertos en la construcción de ítems, casas editoriales o generadoras de recursos didácticos, así como docentes líderes en las diversas regiones del país.
>
> Fase 3. Validación de las tareas o problemas en la acción educativa incluyendo acciones de ejecución o implementación en las diferentes dimensiones: construcción o movilización de aprendizajes, evaluación de aula, pruebas nacionales.

Estas acciones poseen intersección. La idea es que con varios años de experiencia sistemática guiada cada vez más el país y en particular los docentes cuenten con recursos suficientes para nutrir los quehaceres educativos. El uso de TIC puede permitir que estas acciones se puedan desarrollar de una manera complementaria y sinérgica, pues como indica Artigue (2015): “La evolución tecnológica … difumina la distinción entre diseñadores y usuarios” (p. 322).

Para la planificación en el aula se puede empezar con selección-diseño-valoración y usar el modelo “4 + 6”, pero debe quedar claro que hay algunos otros elementos que deben incorporarse, al menos:

- Identificación precisa de la etapa: que sea de construcción o de movilización de los aprendizajes.
- Establecimiento de estrategias pertinentes para los propósitos de varias lecciones con base en los objetivos curriculares.
- Anticipación de dificultades u otros elementos cognoscitivos pertinentes.
- Participación específica del docente en cada una de las fases de la lección.

E insistimos: la experiencia obtenida en la ejecución deberá moldear las tareas.

En Costa Rica, como hemos visto, hay instrumentos administrativos de planeamiento que buscan apoyar la acción de aula (“matriz de planeamiento didáctico”). La acción de diseño de tareas y planes de implementación que invocamos aquí son, sin embargo, de una naturaleza más profunda y demandante.

En esta etapa histórica las acciones-fases 1 y 2 apuntadas podrían aportar los recursos (ejemplos) para ser usados por una colectividad amplia de docentes en la acción de aula. No necesariamente un docente debe poseer el dominio completo del instrumental teórico para implementar o rediseñar esos recursos, por ejemplo: no sería imprescindible manejar los 61 indicadores de grados de procesos y cinco criterios para los niveles de complejidad. Un docente puede usar estos recursos de manera “instrumental”. La versión simplificada que introducimos en la primera parte puede ser un paso preliminar.

El diseño de tareas matemáticas luego de su validación en la tercera fase debería, sin embargo, dar lugar a ajustes y refinamientos de las tareas, algo que deben realizar los diversos diseñadores. En esta fase también se esperaría que una cantidad mayor de docentes amplíe su experticia sobre los elementos teóricos que sustentan el diseño de las tareas.

Si usamos los términos introducidos anteriormente, por una parte se da un énfasis en el diseño de tareas no “como intención”, aunque con un sustento teórico muy preciso y fuerte: un conjunto de elementos plasmados en un currículo. Pero también, por la otra, hay una búsqueda de un diseño “como implementación” porque se espera que los resultados (las tareas) puedan ser modificadas por la acción en el aula y sus protagonistas, aunque dentro de una estrategia con momentos distintos y responsabilidades diferenciadas.

¿Será posible que este país logre desarrollar con éxito una estrategia de esta naturaleza? En nuestro criterio sí lo es. En el periodo 2010-2017 Costa Rica elaboró un nuevo currículo con los mejores estándares internacionales de calidad y pertinencia, su implementación ha permeado toda la sociedad, las diversas entidades del MEP se han ido sumando a un esfuerzo mancomunado, las universidades se han ido adaptando a la nueva realidad, y hasta ahora la población ve con buenos ojos esta reforma. Algo significativo: dos administraciones gubernamentales de signos políticos distintos han brindado continuidad a este proceso. Aunque en la vida social nunca es posible asegurar un progreso inevitable, el terreno parece estar abonado para poder responder positivamente a estos importantes desafíos.

La documentación oficial sobre evaluación en Costa Rica

Los anteriores elementos teóricos nos proporcionan un marco amplio para poder valorar documentación sobre evaluación que influye decisivamente en los quehaceres educativos de Costa Rica.

El Reglamento de Evaluación

El *Reglamento de Evaluación de los Aprendizajes* de Costa Rica (MEP, 2009)[25] tiene bastantes años de existencia y ha sufrido modificaciones parciales desde su aprobación inicial. Su primer articulo señala:

> 1º-Que mediante Decreto Ejecutivo Nº 31635 del 04 de febrero de 2004 se promulgó el Reglamento de Evaluación de los Aprendizajes.
>
> 2º-Que el Consejo Superior de Educación en la sesión ordinaria Nº 21-09 celebrada el 4 de mayo de 2009, acogió y aprobó en forma unánime y en firme la inclusión de las modificaciones realizadas por este Consejo desde el año 2004 a la fecha, en materia de evaluación de los aprendizajes, con el propósito de disponer de un documento completo y articulado en beneficio de la comunidad educativa.
>
> *(Así reformado por el artículo 1° del decreto ejecutivo N° 35480 del 10 de agosto de 2009).* (p. 1)

Varios de los últimos ajustes fueron realizados posteriormente al 2009.

El *Reglamento* incluye los tres tipos de evaluación: diagnóstica, formativa y sumativa, que consigna de la siguiente forma.

> Artículo 4º-**De las Funciones Básicas de la Evaluación de los Aprendizajes.** Las tres funciones básicas de la evaluación son la diagnóstica, la formativa y la sumativa. Estas funciones se definen en la forma siguiente:
>
> a) La función diagnóstica: detecta el estado inicial de los estudiantes en las áreas de desarrollo humano: cognoscitiva, socio afectiva y psicomotriz con el fin de facilitar, con base en la información que de ella se deriva, la aplicación de las estrategias pedagógicas correspondientes.

[25] Usamos el año 2009 para la referencia bibliográfica, a pesar de los cambios introducidos posteriormente.

> b) La función formativa: brinda la información necesaria y oportuna para tomar decisiones que reorienten los procesos de aprendizaje de los estudiantes y las estrategias didácticas utilizadas.
>
> c) La función sumativa: fundamenta la calificación y la certificación de los aprendizajes alcanzados por los estudiantes. (p. 2)

Este reglamento tiene el mérito de incorporar una visión que integra elementos cuantitativos y cualitativos y busca proporcionar un equilibrio en la acción evaluativa.

La propuesta del *Reglamento* establece diferentes componentes en los diversos procesos de evaluación: trabajo cotidiano, trabajo extraclase, pruebas, proyecto, concepto y asistencia. Las calificaciones en estos rubros brindan la nota, sin embargo no en todas las asignaturas o años escolares se articulan de igual manera.

Las definiciones de los mismos son consignadas así:

Trabajo cotidiano

> Consiste en todas las actividades educativas que realiza el estudiante con la guía y orientación del docente, según el planeamiento didáctico y el programa de estudios. Para su calificación se deben utilizar instrumentos técnicamente elaborados, en los que se registre información relacionada con el desempeño del estudiante. La misma se recopila en el transcurso del período y durante el desarrollo de las lecciones, como parte del proceso de aprendizaje y no como producto, debe reflejar el esfuerzo y el avance gradual del estudiante en sus aprendizajes. (pp. 9-10)

Trabajo extraclase

> Se entiende por trabajo extraclase las actividades planeadas y orientadas por el docente, o por éste en conjunto con los estudiantes, con el propósito de repasar o reforzar, según corresponda, los objetivos, contenidos curriculares, competencias o habilidades específicas consignadas en el planeamiento didáctico. (p. 10)

Pruebas

> Las pruebas, que pueden ser escritas, orales o de ejecución, son un instrumento de medición cuyo propósito es que el estudiante demuestre la adquisición de un aprendizaje cognoscitivo o motor, el dominio de una destreza o el desarrollo progresivo de una habilidad. (p. 10)

Proyecto

> …es un proceso que parte de la identificación de contextos del interés por parte del estudiantado, relacionadas con los contenidos curriculares, valores, actitudes y prácticas propuestas en cada unidad temática del programa de estudio. Incluye una serie de etapas organizadas que busca la incidencia de los y las estudiantes en contextos determinados del entorno socio cultural. (p. 10)

Concepto

> … constituye el juicio profesional valorativo y global que emite el docente con respecto al desempeño y actitud que demuestra el estudiante durante el proceso de aprendizaje en cada una de las asignaturas. (p. 11)

Asistencia

> … se define como la presencia del estudiante en las lecciones y en todas aquellas otras actividades escolares a las que fuere convocado. (p.11)

En el caso de Matemáticas, estos rubros se consignan en la siguiente tabla.

Tabla 17. **Componentes de evaluación sumativa en Costa Rica. Matemáticas. Porcentajes**

Nivel educativo	1*	2-3	4-6	7	8-9	10-12
Trabajo cotidiano		40	30	25	15	10
Trabajo extraclase		10	10	10	10	10
Pruebas		40	50	55	65	70
Proyecto						
Concepto		5	5	5	5	5
Asistencia		5	5	5	5	5

*En el primer año todos los insumos de los componentes son formativos, y se condensan en un Informe Cualitativo de Desempeño del estudiante.

Fuente: Ministerio de Educación Pública, 2009.

En este *Reglamento* no se incluyen “proyectos” para Matemáticas, lo cual en nuestro criterio es desafortunado, pues este tipo de instrumentos apoyaría bastante el desarrollo de muchas habilidades y procesos-capacidades. La perspectiva del trabajo con proyectos, que incluso integran varias asignaturas, es parte de la experiencia exitosa que han realizado muchas naciones (Estados Unidos, Francia y con mucha fuerza Finlandia). Por supuesto aquí no bastaría pensar en el instrumento como algo solamente restringido a la evaluación, sino como medio que permite desarrollar aprendizajes.

Otro elemento es que aunque el *Reglamento* admite la realización de pruebas cortas, aquí estas deben poseer un sentido formativo (o incluso diagnóstico); otro elemento desafortunado, pues las pruebas cortas en el caso de Matemáticas ofrecerían medios muy valiosos para sostener continuidad por parte de los estudiantes en el estudio de la asignatura (e incluso equilibraría el peso de las pruebas largas que suelen ser dos en cada periodo). Se trata de instrumentos que se desarrollan normalmente en las universidades locales, y en la educación preuniversitaria de otras latitudes.

Existen varios documentos emanados de la Dirección de Desarrollo Curricular y del Departamento de Evaluación de los Aprendizajes del MEP que complementan lo que el *Reglamento de Evaluación* sanciona: *La evaluación formativa* (2013), *La Evaluación Diagnóstica* (2013), *La prueba escrita* (2011), *Respuestas a las consultas más frecuentes en el proceso de evaluación de los aprendizajes* (2015).

En *La evaluación formativa* y *La evaluación diagnóstica* se ofrece una colección importante de definiciones, conceptos e instrumentos que pueden nutrir estas funciones educativas en el aula. Se afirma correctamente la importancia de la formativa y se toma nota de las dificultades que existen en un escenario en el que los aspectos sumativos imperan:

> En la práctica pedagógica es poco el uso que los docentes hacen de la evaluación formativa, como proceso que provee información para la toma de decisiones, ya que se ha creído que al no brindar datos cuantitativos, no tiene importancia, y por consiguiente se le invisibiliza. (MEP, 2013b, p. 1)

Esta evaluación se concibe como participante en los diversos componentes evaluativos: “permite establecer la relación entre cada uno de los componentes de la calificación” (p. 7).

Tabla de especificaciones para pruebas escritas

Como se puede observar, el papel otorgado a las pruebas escritas por el *Reglamento* es grande y creciente desde el comienzo de la enseñanza primaria hacia el final de la secundaria.

La prueba escrita se publicó en el 2011, es decir antes de la aprobación de los nuevos programas de Matemáticas y de la nueva *Política curricular* (CSE, 2016), por eso: es necesario valorar el documento con cuidado y no demandarle cosas que más bien emanan de este nuevo currículo. Este documento está elaborado con gran seriedad y rigor. Uno de los instrumentos que en este documento se afirma necesario para "garantizar la validez de contenido de la prueba" es una "Tabla de especificaciones" (MEP, 2011, p. 6).

Un modelo de esta tabla es el siguiente.

Tabla 18. Tabla de especificaciones para pruebas escritas

Objetivos Específicos o Contenidos Procedimentales	Número de lecciones	Puntos	Tipo de ítem seleccionado				
Total							

SU: Selección única RR: Respuesta Restringida RC: Respuesta Corta

RP: Resolución de problemas ID: Identificación RSC: Resolución de casos

E: Ensayo C: Correspondencia o apareamiento RE: Resolución de ejercicios

Fuente: Ministerio de Educación Pública, 2011.

Los elementos que incluye se describen como sigue:

Objetivos específicos. Representan los productos de aprendizaje desglosados en el planeamiento didáctico y logrados por los estudiantes durante la mediación pedagógica. Son redactados por el docente de acuerdo con los objetivos programáticos.

Contenidos procedimentales. Se refieren al conjunto de acciones ordenadas y orientadas que propician el logro de un aprendizaje y conlleva una serie de momentos interrelacionados de forma sistemática. Hacen alusión a la forma de actuar y resolver tareas. Se trata de conocimientos ligados al saber hacer mediante el desarrollo de destrezas y habilidades.

Número de lecciones. Corresponde al número efectivo de lecciones invertidas por el docente en el logro de cada objetivo específico o contenido procedimental seleccionado para la medición.

> Puntos. Son los puntos asignados para la medición de cada objetivo específico o contenido procedimental. Para realizar el cálculo se debe aplicar el procedimiento descrito bajo el título: ¿Cómo calcular la puntuación total de la prueba? El resultado obtenido se debe distribuir entre los tipos de ítems que mejor permitan medir cada objetivo específico o contenido procedimental según sea el caso.
>
> Tipo de ítem. Corresponde a los ítems seleccionados para la medición de cada objetivo específico o contenido procedimental, considerando: el planeamiento didáctico, la mediación pedagógica, habilidades mentales, destrezas y competencias logradas por los estudiantes. A cada ítem se le asigna la puntuación correspondiente de acuerdo con el tipo seleccionado.
>
> Total. Es el resultado de la sumatoria de las cantidades consignadas en cada columna. (MEP, 2011, p. 9)

Es necesario comentar que los “objetivos específicos” son “Redactados por el docente de acuerdo con los objetivos programáticos”, pero el documento no indica que deben ser idénticos a los del currículo; por ejemplo podría articularse una combinación de ellos de acuerdo al criterio del docente. Por otra parte, aunque el documento fue redactado con base en currículos que usaban la figura de “objetivos”, en el escenario en que ya no es así y se usan “habilidades” (por ejemplo) no sería incongruente que el desarrollo de varias habilidades se pudiera conceptualizar como un objetivo específico. Puesto en otra forma: el documento MEP (2011) hasta aquí no necesariamente estaría en contradicción con el nuevo currículo de Matemáticas.

La idea central en el cálculo de los puntos (cuyo mecanismo no describiremos aquí) es asociar de manera lineal el diseño de la prueba a las lecciones que cada tópico ha implicado, es decir: establecer una proporción de los contenidos en la prueba de acuerdo al tiempo tratado en el aula (p. 10 y siguientes). Esto tampoco estaría en contradicción con el currículo de Matemáticas: sin duda una prueba debe reflejar la actividad de aula.

El documento, sin embargo, brinda indicaciones para consignar los objetivos específicos de una manera más precisa: usar la taxonomía de Bloom. Es decir los niveles consignados por este autor en la categoría cognitiva: conocimiento, comprensión, aplicación, análisis, síntesis, evaluación, así como los verbos que se pueden usar. Por ejemplo en el caso del nivel “conocimiento”: identificar, enumerar, describir, definir, reconocer, citar, establecer, indicar, ordenar, relacionar, seleccionar (p. 13). No vamos a insistir aquí en que la taxonomía de Bloom del año 1956 incluso ya fue replanteada en el 2001 de una manera que busca responder a las limitaciones de aquella mediante un enfoque bidimensional

(Anderson *et al*, 2001). Vamos a enfocarnos en algunas dificultades que este asunto puede implicar.

Si se sigue esta taxonomía se vuelve más difícil la redacción de objetivos por el docente con base en los conocimientos y habilidades del currículo de Matemáticas. Esto sucede así porque este currículo no fue elaborado siguiendo la taxonomía de Bloom y sus verbos asociados, el docente tendría mayor dificultad para transcribir esos verbos de manera consistente o para interpretarlos y codificarlos de una manera que realmente corresponda a lo que pretende el currículo.

En el currículo costarricense no solo no se afirman los objetivos a la manera conductista, se utiliza una unidad distinta, la "habilidad". En particular en este currículo se busca un diseño de las tareas matemáticas con la participación integrada y simultánea de varias habilidades. Ahora bien, el documento no indica que es imperativo usar a Bloom, solo consigna "algunos verbos que **se pueden** utilizar para la redacción de los objetivos específicos" (énfasis añadido por nosotros, MEP, 2011, p. 13). En la práctica sin embargo es probable que lo que se afirma como posible se lea por los docentes como una prescripción.

La tabla de especificaciones de la prueba escrita se formula para intentar provocar validez en su diseño mediante la identificación y valoración de los conocimientos o procedimientos que se han suministrado en el aula. Sin embargo, el currículo costarricense de Matemáticas subraya de una manera muy precisa las capacidades superiores transversales a las áreas en la que se ha organizado. ¿Cómo se puede incluir aquí la intervención de los cinco procesos-capacidades? ¿Dónde incluir los tres niveles de complejidad? ¿La interacción e integración de habilidades? Es cierto que se podría pensar que "objetivo específico" podría incorporar integración de habilidades, procesos y niveles de complejidad, sin embargo resulta artificial ajustar el currículo a esta tabla, cuando lo que se debería pensar es seguir un camino diametralmente opuesto.

Hay otra dimensión en este asunto: ¿cuál puede ser el uso de la tabla en la realidad práctica de las aulas? En teoría es incluso posible que los docentes no utilicen la distribución que aportaría la tabla para sostener luego la distribución de contenidos en la prueba, sino hacer lo contrario: diseñar el examen y luego completar la tabla. Confeccionar esta tabla es como un requisito con un significado eminentemente formal. La realidad es que en la práctica la tabla se utiliza casi solo cuando se realizan apelaciones en relación con el examen.

La prueba escrita al introducir la tabla de especificaciones expresa la voluntad de que una prueba no se diseñe sin criterios y, además, no solo que no corresponda con lo que se desarrolle en el aula sino que, por ello mismo, resulte injusta para el estudiante. Es totalmente válido tratar de evitar, por otro lado, que una prueba se diseñe basada en las “pulsiones” o “gustos” particulares del docente y que no se refleje el trabajo realizado en la clase. Es un propósito totalmente acertado, sin embargo el instrumento así como fue planteado en el 2011 no es plenamente congruente con el currículo vigente de Matemáticas. Mientras exista este instrumento como la guía que debe seguir el docente en la elaboración de pruebas, difícilmente será posible incorporar con facilidad y conciencia procesos y capacidades superiores, niveles de complejidad, y las interacciones múltiples de las habilidades que plantea el currículo. Es cierto que el docente en la acción de aula puede “manipular” el instrumento un poco pues al fin y al cabo hay una autonomía que permite esto, pero, desafortunadamente, el mismo no logra aportar la orientación y las condiciones para favorecer la implementación del currículo de Matemáticas. Y dificlmente este instrumento servirá para los propósitos de materializar la política curricular nacional del 2016.

Las preguntas de fondo que emergen aquí no solo afectarían esta tabla específica: ¿hasta qué punto es pertinente seguir usando una “tabla de especificaciones”? ¿No habrá otros instrumentos más adecuados que podrían usarse para permitir el propósito de favorecer un diseño válido y consistente de las pruebas? En nuestro criterio, a partir de la aprobación del currículo de Matemáticas (y posiblemente en la otras asignaturas con énfasis en capacidades y una visión del aprendizaje distinta), se plantea una revisión cuidadosa de los instrumentos que se utilizan en la evaluación.

Otros tópicos particulares

Para las pruebas, la reglamentación indica el uso de ítems objetivos y de desarrollo. En los primeros: selección única, respuesta corta, correspondencia o apareamiento, identificación. En los segundos: respuesta restringida, resolución de ejercicios, resolución de problemas, resolución de casos, ensayo (MEP, 2011, 16 y siguientes). En este documento no se menciona la proporción que debe existir entre ambos tipos de ítems. No obstante en MEP (2015) se brindan dos indicaciones:

> Todo prueba escrita de aula, independientemente del nivel o asignatura en que se aplique, debe estar constituida al menos, por un tipo de ítem objetivo y un tipo de ítem de desarrollo. Excepto las pruebas que se aplican a los estudiantes con necesidades educativas especiales, en donde puede aplicar un solo tipo de ítem, si así se requiere.
>
> (…) No hay un peso porcentual previamente establecido para la parte de ítems objetivos y la parte de ítems de desarrollo que conforman la parte técnica, por cuanto esto se determina una vez que se haya confeccionado la tabla de especificaciones. (p. 16)

No está claro por qué una prueba debe contener al menos un ítem de cada tipo, sin embargo hasta aquí lo propuesto no resulta realmente limitante. En el caso de Matemáticas el nuevo currículo enfatiza mucho la resolución de problemas y la redacción de acciones para desarrollar los procesos "razonar y argumentar" y "comunicar". Y eso se puede hacer con este Reglamento y en acuerdo con lo planteado en MEP (2015).

Vayamos a un tema en nuestro criterio delicado. En MEP (2015) se consignó una respuesta a un tópico que, aunque fue suspendido en el 2016, en nuestro criterio no era afortunado. Se planteó:

> Después de aplicada una prueba si se observa que más del 10% de los estudiantes obtienen resultados inferiores a 65 ó 70, según corresponda a la Educación General Básica o a la Educación Diversificada, el docente y los miembros del Comité de Evaluación de los Aprendizajes en conjunto con el Director del centro educativo, deben realizar el análisis técnico de los ítems que conforman la prueba, así como el análisis de la coherencia entre la prueba, la tabla de especificaciones, las evidencias de la mediación pedagógica, de acuerdo con el planeamiento didáctico y los objetivos específicos, contenidos procedimentales, habilidades específicas o competencias, seleccionados para la medición.
>
> Una vez concluido el análisis, si se encuentran inconsistencias que pueden ser la causa del bajo rendimiento, procede la repetición de la prueba.
>
> Si en el análisis no se encuentran inconsistencias como las mencionadas anteriormente, el docente debe proceder a identificar los objetivos, contenidos procedimentales, habilidades específicas o competencias, en los cuales los estudiantes demostraron bajos niveles de logro y retomar los mismos, con el propósito de iniciar un proceso de acompañamiento y mejora, dirigido a subsanar las falencias observadas y repetir la prueba a los estudiantes que obtuvieron calificaciones inferiores a la mínima establecida para el nivel. (p.13)

Puesto en otros términos, si en una prueba menos del 90% de los estudiantes que la realizaron no obtienen o superan la nota promedio se debería activar el Comité de Evaluación de los Aprendizajes junto al Director para revisar la prueba, y si encontraran algo "inconsistente" se debería repetir a todos los estudiantes, y si no se encontrara algo "inconsistente" se repetiría a los estudiantes que tuvieron esa calificación menor. Aquí es necesario realizar algunos comentarios:

- Este criterio no encuentra sustento en el *Reglamento de Evaluación de los aprendizajes* ni en *La prueba escrita*. ¿De dónde salen esos números? ¿Por qué no 70, 85 o 95 %? ¿Cuál es el soporte jurídico, teórico o educativo para consignar ese 90%?

- En nuestro criterio no parece apropiado que un 90% o más deban pasar una prueba para no activar sendos procesos institucionales (desgastantes para el docente, otros profesores y la institución). En una clase de 25 estudiantes, con solo 3 que reprueben, ya se debe activar ese proceso. Lo problemático de esto resulta aun más evidente en el caso de Matemáticas, asignatura que lleva sobre sus hombros una fuerte carga sociocultural negativa (*matefobia)*, una asignatura en la cual los porcentajes de aprobación son más débiles, como se puede referenciar en las mismas pruebas nacionales. Muchas de las razones por las que en Matemáticas se vive esa situación adversa de entrada no responden a la calidad de una prueba, o a que los docentes no hayan diseñado un buen instrumento de evaluación.
- Una de las consecuencias de esta prescripción es que desafortunadamente favorece una actitud de buscar la promoción en una prueba de una manera que podría no coincidir con el desempeño y el esfuerzo estudiantiles invertidos; siempre sería posible para un docente "inflar" los resultados de una clase para no tener que realizar este proceso. ¿Quién perdería en esa condiciones? La respuesta: el mismo estudiante y el sistema educativo, debitando las demandas de calidad en el desempeño.

Esta indicación fue suspendida gracias a un acuerdo que se realizó con los sindicatos APSE y SEC el 21 de abril del 2016. El texto del acuerdo dice:

> Se acuerda la suspensión de los efectos de la pregunta Nº26 de la guía "Respuestas a las consultas más frecuentes en el Proceso de Evaluación de los aprendizajes" 2015 vigente, esto mediante comunicación del Despacho del Viceministerio Académico. A su vez, se conviene en la realización de una sesión de trabajo conjunta entre las partes técnicas del MEP y gremios para revisar el texto de la pregunta 26 (27 de la propuesta) de la guía.

Tal vez resulte útil, de cara al futuro, analizar algunos elementos presentes en este asunto. Lo que parece subyacía aquí era la promoción de decisiones administrativas con base en un análisis de acuerdo "*a la norma*" (como sucede en los enfoques psicométricos). Se usa un factor "comportamiento de la población" que se juzga inapropiado para desencadenar un proceso colectivo. Luego se pasa a instalar un comité que no necesariamente será integrado por expertos en la asignatura (esto por supuesto variará mucho ya sean instituciones de primaria o de secundaria). Dentro de este tipo de escenarios no sería difícil debilitar el funcionamiento "*por criterio"*: es decir que el instrumento mida los estándares deseados en esta materia. Por otro lado: no negamos que pueda ser útil usar un comportamiento poblacional para sostener decisiones, aunque en este tipo de situaciones tal vez no debería usarse solamente la figura del “promedio”, cuando se desea acudir a este tipo de medios se podrían incorporar otros elementos estadísticos que ofrecen muchos mayores insumos para estudiar el comportamiento de una población frente a un evento (en este caso una prueba): mediana, moda, desviación estándar, etc.

Vayamos directamente al corazón del tema. La prescripción pretendía algo totalmente válido: aumentar las probabilidades de que una prueba no se confeccione mal lesionando así a una cantidad de estudiantes de una clase. Es importante promocionar una aplicación idónea, técnicamente correcta y justa de instrumentos de evaluación, especialmente si juegan un papel relevante en la certificación de un estudiante. Pero tal vez no debería plantearse el asunto de una manera unilateral tan específica con las pruebas, y solo acudiendo a una “receta psicométrica”, sino tomando en cuenta otros mecanismos que, por ejemplo, incluyan instrumentos de evaluación sumativa adicionales o complementarios. Es cierto que es necesario marcar fronteras para que en el accionar docente no se cometan injusticias que pueden lesionar el aprendizaje y aprovechamiento estudiantil, pero también debe considerarse relevante que el docente posea la autonomía académica suficiente para poder realizar su labor con el mayor sentido de profesionalismo.

Desde la óptica que nos proporciona el nuevo currículo de Matemáticas, que ha escapado de aquellos con influencia del conductismo o basados en la lógica de los contenidos, y desde la *Política curricular* nacional: parece razonable una revisión del actual *Reglamento de los Aprendizajes* para integrar nuevos elementos; no pareciera que estos ajustes en el corto plazo deban resultar muy fuertes, pero sí se podrían reforzar algunas perspectivas sobre el significado de las capacidades del siglo XXI. Otra normativa también debería ser revisada y ajustada. Tal vez otra deba crearse. Y en esa dirección sería pertinente pensar no solo en instrumentos demasiado generales aplicables *urbi et orbe*, sino en generar una reglamentación más específica y flexible para cada asignatura, pues hay importantes diferencias entre ellas tanto en la acción de aula como en la evaluación.

La reforma de la evaluación con visión histórica

Decía Bachelard que el presente ilumina el pasado, refiriéndose a que el escenario desde el que un pensador vislumbra la historia afecta la comprensión de los fenómenos históricos. Podríamos nosotros añadir que "el futuro ilumina el presente". Lo que nos propongamos hacer de cara a lo que sigue en los siguientes años afectará lo que hagamos en el presente. En esta sección queremos ofrecer un equilibrio pragmático y orientador sobre lo que consideramos debe ser una hoja de ruta con mirada en el largo o mediano plazos, y lo que debemos abordar en el plazo más cercano. En el interflujo e intersección entre ambas perspectivas esperamos encontrar mayor iluminación para nuestros pasos.

Perspectiva estratégica

Las tendencias internacionales en la acción de aula y en la evaluación han trastocado los modelos educativos dominantes en el pasado y se debe replantear las perspectivas.[26] Al introducirse las capacidades en el currículo costarricense se ha vuelto necesario transformar la evaluación. Un currículo así que se sintoniza con las demandas de habilidades o competencias del siglo XXI (comunicación, pensamiento crítico, resolución de problemas, …) invoca una evaluación que no podrá ser realizada usando solamente los medios que correspondían a otro momento histórico y a otro tipo de currículos.

Se requiere una evaluación a la vez cuantitativa y cualitativa (Harlen, 2016, p. 706). Es importante potenciar la evaluación formativa en la acción de aula. Sin duda, se deberán articular mejor los propósitos formativos y sumativos y de forma abstracta asumir siempre como ideal un "equilibrio" entre ambos tipos de evaluación y, por ende, también en el uso de los instrumentos que se utilicen. Pero este "equilibrio" se debe dar a veces hacia lo formativo y en otras ocasiones hacia lo sumativo, en dependencia de múltiples elementos. Será relevante ensamblar la participación de una mayor cantidad de instrumentos y sobre todo ofrecer nuevos criterios para

[26] Es lo que Moreno (2012) recoge de la siguiente manera: "La escuela del siglo XXI debe transitar de un modelo de pedagogía unidireccional centrado en la figura del profesor, cuya tarea principal ha sido la transmisión de conocimientos, hacia una pedagogía multidireccional y diferenciada que posibilite al alumno el desarrollo de una constelación de competencias tanto cognitivas como sociales, con las que haga frente de forma efectiva a los diversos problemas actuales (y futuros) caracterizados por ser abiertos, no estructurados y contradictorios, propios de la posmodernidad". (p. 6).

brindar mejores insumos sobre el desarrollo de esas capacidades. En la sumativa, creemos que será necesario reconsiderar el peso excesivo de las pruebas formales escritas, abrir espacios mayores a la evaluación del desempeño por medio de observación, portafolios, entrevistas, y muchos otros medios, incorporar una mayor participación de los estudiantes en estos procesos. Esto se deberá reflejar en los reglamentos de evaluación y en sus medios auxiliares.

En estos propósitos será importante vislumbrar el papel de las tecnologías con un calado superior congruente con el escenario histórico. Están en el orden del día evaluaciones basadas en computadoras, el uso de plataformas tecnológicas en la gestión y ejecución de tareas estudiantiles, las telecomunicaciones, las simulaciones.

Otro elemento dentro de esta perspectiva estratégica es la presencia cada vez más fuerte de otros factores aparte de la evaluación estudiantil: la evaluación de las instituciones educativas, la valoración del rendimiento de docentes y de directores educativos, y el uso de la información obtenida en el desempeño (OCDE, 2013). Y con claridad: el papel de los marcos de referencia internacionales y en particular los estudios comparativos. Puesto de otra manera: se deberá potenciar una visión más multidimensional y especialmente internacional en las orientaciones educativas.

Es importante que el futuro no nos caiga encima de súbito alienándonos de posibilidades importantes para avanzar en la preparación de nuestra juventud.

Perspectiva inmediata

Para que esos cambios de fondo en la evaluación resulten pertinentes y beneficiosos para la enseñanza aprendizaje se debe, sin embargo, contar con las condiciones para ello, y entender que ese tipo de cambios no son independientes del momento histórico. Hay que colocar en el horizonte los propósitos e ideales, pero comprender que dependerán de otras condiciones nacionales (e internacionales) que no controlamos necesariamente. En el nuevo escenario educativo que vivimos resulta fundamental reconstruir los instrumentos “a la medida”, como se elaboraban los vestidos de antes, y crear nuevos pero siempre ajustados a nuestras realidades regionales o nacionales muy diversas y que se encuentran dentro de un mundo en cambio perpetuo. Hay que tener cuidado en no equivocarnos en los tiempos, estos son más importantes en la vida social que en la gramática.

No es posible evadir la discusión sobre pruebas que siguen ocupando un lugar central en la evaluación nacional. Hemos sostenido que para un currículo como el de Matemáticas se debe migrar hacia un modelo de evaluación en que se utilicen con creciente valor instrumentos distintos de las pruebas formales. Sin embargo, esto no podría avanzar significativamente si no se progresa en varias condiciones:

- un escenario laboral que ofrezca espacios suficientes para que el docente pueda aplicar instrumentos distintos a las pruebas
- múltiples recursos educativos que sostengan un nuevo tipo de evaluación (documentos, videos, infraestructura y medios tecnológicos)
- una cultura nacional de evaluación con las nuevas perspectivas, un ambiente sociocultural en el cual no predomine el facilismo y el imperativo de que los estudiantes deben ser promovidos independientemente de su esfuerzo y desempeño, un medio cultural en el cual el juicio y la labor de los docentes y su estatus reciban respeto social[27]
- una apropiada calidad profesional que incluya una sólida preparación en evaluación de capacidades (aportada por la formación inicial y aquella en servicio).[28]

Evidentemente, algunas de estas condiciones trascienden al MEP y al sistema educativo, e incluso lo que sucede en el país. Mientras Costa Rica avanza en estas condiciones, dentro del escenario internacional, inevitablemente las pruebas seguirán ocupando un lugar privilegiado. Y en ese escenario es fundamental que estas sean elaboradas con los mejores estándares en correspondencia con el currículo nacional. Puesto en otros términos: potenciemos el uso pertinente de todos los instrumentos posibles de evaluación, pero como prioridad en el corto y mediano plazos fortalezcamos la calidad de las pruebas y su congruencia con el currículo nacional.

---

[27] Las dificultades en un entorno sociocultural no son exclusivas de Costa Rica, como informan Suurtamm et al (2016): "Muchos docentes se enfrentan a dilemas culturales, ya menudo estos son vistos como los más difíciles de resolver. Pueden surgir cuando nuevas prácticas de evaluación desafían el salón de clase establecido, la escuela o la cultura general. Por ejemplo, los estudiantes pueden confrontar al docente con preguntas si, en lugar de recibir una nota para un trabajo realizado, el estudiante recibe retroalimentación descriptiva. O bien, los dilemas culturales pueden surgir si el profesor está adoptando nuevas prácticas de evaluación, pero es el único en su departamento que lo hace y se encuentra con cierta resistencia de otros". (p. 26).

[28] Una preparación inicial y continua de educadores en Enseñanza de las Matemáticas hacia currículos con énfasis en capacidades es un poderoso desafío para la región latinoamericana. Aunque se ha avanzado en su renovación en las universidades o ministerios de educación, aun predominan serias limitaciones: separación entre pedagogía y matemáticas, desvinculación de la formación y el currículo, medios reducidos de apoyo al docente. Véase Ruiz, 2017, para un balance en América Central y El Caribe. Para el caso de Costa Rica, véase Ruiz & Barrantes, 2016 y Morales-López, 2017.

Vamos a dar un ejemplo de esto último. Se ha sostenido en los últimos años que el enfoque del nuevo currículo de Matemáticas (o de aquellos por capacidades) implica necesariamente que el valor que se otorga en las notas de un estudiante al rubro de "trabajo cotidiano" (donde se pueden utilizar varios de los instrumentos señalados anteriormente) debe ocupar un lugar mucho mayor al que ya tiene y a la vez debe darse una reducción fuerte del valor de las pruebas. En el largo plazo, esto podría ser cierto. No obstante, la realidad del entorno costarricense predominante actualmente supondría dificultades para una aproximación similar: por un lado, el número de estudiantes que atiende un docente de secundaria volvería muy complicada la aplicación sustancial de estos instrumentos (a veces 300 estudiantes), y, por el otro lado, un docente de primaria suele atender todas las asignaturas. En ambos casos la inversión de tiempo que deberían hacer los docentes sería desproporcionada y en ambos debilitaría la acción eficaz de los docentes. Eso sin tomar en cuenta que en el escenario local no existe la costumbre de valoraciones de este tipo (en las cuales sin duda es más difícil proporcionar una calificación que resulte inequívocamente objetiva para estudiantes y padres de familia). La experiencia social parece indicar que las notas de "trabajo cotidiano" no han sido necesariamente representativas de la calidad del trabajo estudiantil que se ha realizado. En ese sentido una sobrevaloración de este componente de la evaluación sumativa podría resultar negativo para los aprendizajes.

Por otra parte, en pruebas nacionales estandarizadas como las del Bachillerato, limitadas a exámenes de "papel y lápiz", resultará más difícil utilizar una colección amplia de instrumentos para valorar las capacidades superiores (Nusche, 2016, p. 845). ¿Hacia dónde orientarse? Aunque este tema lo desarrollaremos con amplitud más adelante, consignamos nuestro criterio: igual que en la evaluación de aula, lo prioritario en el corto plazo es un ajuste de las pruebas con mayor correspondencia con el currículo nacional, en particular en lo que corresponde a capacidades superiores. En segundo término, en otro plazo histórico, explorar medios complementarios a esas pruebas para favorecer que la certificación final en el sistema preuniversitario se realice con un mayor nivel de aproximación a lo que el estudiante ha aprendido. Hay por supuesto intersección entre ambas perspectivas.

Este planteamiento se podría resumir con la siguiente figura.

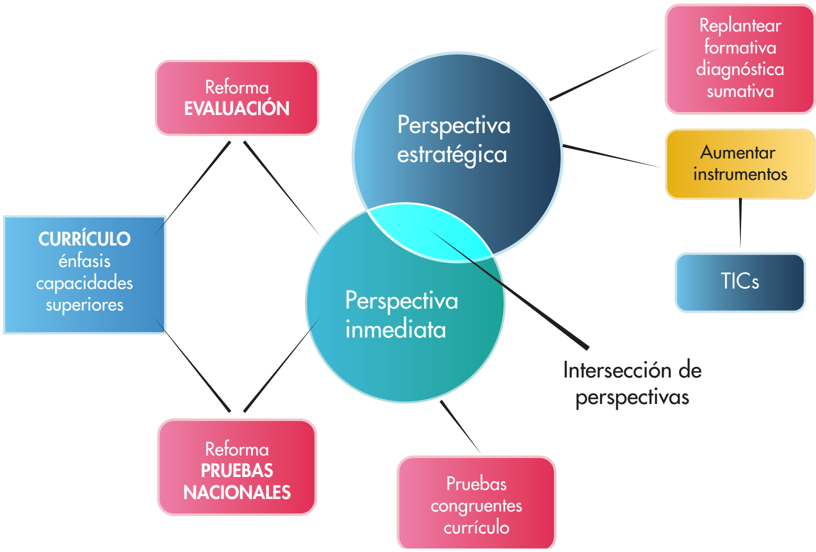


Figura 21. Perspectivas estratégicas e inmediatas para la evaluación en matemáticas

Sobre la segunda parte

En esta discusión hemos apuntalado que las tareas matemáticas aunque sean de naturaleza distinta o implicar acciones o instrumentos diferentes, deben invocar una selección-diseño-valoración donde se manifiestan los elementos curriculares que intervienen de manera precisa. Se trata de realizar los esfuerzos intelectuales y profesionales indispensables para avanzar tanto en la construcción de aprendizajes como en la mejor evaluación de estos procesos educativos. Esto convoca las responsabilidades individuales pero también colectivas e institucionales. La experiencia internacional sustenta la necesidad de acciones para mejorar la construcción de lecciones, el diseño de tareas matemáticas, pero también a la vez la evaluación.[29]

En esta etapa histórica la evaluación deberá ocupar un lugar relevante para proseguir la implementación curricular. Será muy importante avanzar en esta dimensión educativa invirtiendo esfuerzos y recursos nacionales. Se requerirán por supuesto cambios en la documentación oficial que sean planteados con pertinencia de acuerdo con la realidad nacional y el momento histórico que vivimos. Será necesario sin duda crear más recursos que apoyen en el aula una evaluación consistente con el currículo: diseñar modelos de lecciones que incluyan planeamiento y también evaluación con base en el currículo, realizar investigaciones y proyectos que aporten orientaciones e insumos para la evaluación adecuada en diversos escenarios, desarrollar experiencias y medios en la evaluación usando TIC, estimular el desempeño de docentes con resultados innovadores en la evaluación, ampliar la interacción y colaboración de docentes en el desarrollo de prácticas de evaluación ejemplares.

En esta parte hemos planteado que al pretenderse apuntalar la competencia matemática y las capacidades superiores que consigna el currículo costarricense, es necesario introducir un *umbral de mayor conciencia y experticia* en el diseño de las tareas matemáticas que se usen. Hemos ofrecido un modelo para sistematizar la valoración de las tareas matemáticas y nutrir ese umbral. Esta es una meta fundamental para docentes y funcionarios involucrados en la implementación del currículo.

En el progreso de la evaluación que realizan los docentes será muy importante el modelo que muestren las pruebas nacionales de Bachillerato, pues ocupan un papel realmente orientador de las prácticas de aula, especialmente en la educación secundaria.

[29] Por ejemplo, EL, estrategia dominante en Japón y que se ha extendido a otras latitudes, no refiere solo a cómo se conduce una lección (gestionar la acción, anticipar respuestas o dificultades, etc.) también señala cómo la selección de las tareas desde un inicio es crucial para desencadenar aprendizajes, y por lo tanto también cómo esta lo sería para el diseño de las evaluaciones.

3. Pruebas nacionales congruentes con el currículo

En esta última parte se subrayará la importancia de las pruebas nacionales de Bachillerato en Costa Rica y los desafíos que estas tienen frente a la reforma de la Educación Matemática.

Se introducirán algunos elementos de las visiones que se tienen en el mundo sobre las pruebas estandarizadas basadas en enfoque psicométricos.

Se analizará globalmente el modelo de elaboración de pruebas nacionales utilizado en los años anteriores; en particular, se cuestionará la pertinencia (en relación con el currículo oficial) de las "tablas de especificaciones", como instrumento usado para condensar y comunicar los elementos curriculares que incluirán las pruebas nacionales. También se cuestionará la fase de "ponderación" en el modelo existente de diseño de pruebas. La conclusión más importante que se consigna aquí es la necesidad de volver a analizar el modelo general del diseño de las pruebas de Bachillerato a la luz del nuevo currículo de Matemáticas.

En una importante sección sistematizamos algunas condiciones generales que deberían considerarse en el diseño de pruebas en congruencia con el currículo vigente. Entre ellas, se insiste en incluir todos los elementos curriculares centrales como los conocimientos, habilidades, procesos y capacidades cognitivas superiores transversales, contextos reales y demandas cognitivas con tres niveles de complejidad, todos ellos componentes del propósito más amplio: la competencia matemática general (constructo central del currículo).

Finalmente, con una perspectiva de futuro, se sugiere la migración de estos procesos de certificación hacia un modelo que incluya la participación de otros instrumentos de evaluación, que vaya más allá de las pruebas nacionales estandarizadas, y además se sugiere el empleo de TIC, en congruencia con lo que debería articularse en el sistema educativo: una utilización radical y lúcida de estas tecnologías.

Antes de colocar nuestra mirada en las pruebas nacionales en relación con el currículo de Matemáticas, será importante introducir la perspectiva más amplia de este tipo de instrumentos de la educación costarricense.

Las pruebas nacionales

Las pruebas nacionales de Bachillerato en Costa Rica constituyen un requisito básico para proseguir estudios en la educación superior y además para la obtención de posiciones de trabajo en muchas entidades. En algunos países pruebas similares están dotadas de gran exigencia (como en Finlandia y Francia[30]), en otros no existen o se realizan pruebas solo diagnósticas (los casos de México y Chile), en algunos solo se aplican en algunas provincias o estados (como Estados Unidos). En ciertas naciones, aunque no se realiza este tipo de pruebas de certificación, tienen exámenes muy fuertes para ingresar a la educación superior, los cuales juegan un papel regulador o fiscalizador de los quehaceres educativos preuniversitarios y de la calidad del sistema (por ejemplo Japón). En cada país se desarrollan estrategias educativas o aplican instrumentos diversos para buscar la mayor calidad de su preparación escolar, que responden a su historia, su organización sociopolítica o a sus condiciones culturales.

Estas pruebas "se usan para monitorear los sistemas educativos" (Suurtamm et al, 2016, p. 3). Jiménez (2014) subraya para Costa Rica: "… juegan un papel en lograr cierto control sobre el cumplimiento efectivo de los programas curriculares por parte de los docentes y ejercen cierta presión en los estudiantes" (p. 35).

Debe reconocerse empero que son un medio indirecto de hacer este "monitoreo" en tanto los valores que se obtienen se generan con base en los resultados de los estudiantes; y por eso son siempre posibles distorsiones debidas en parte a los diversos escenarios donde los estudiantes actúan, que implican condiciones muy distintas ya sean regionales, económicas, sociales, culturales, de las instituciones educativas, comunitarias e individuales.

Las pruebas de Bachillerato, de igual manera, no permiten identificar características más específicas de la acción educativa que se ofrece por parte del sistema educativo en todos los niveles pues son pruebas de salida.

Estas pruebas suelen ser eminentemente estandarizadas. Popham (1999) nos advierte, sin embargo, que no son el mejor instrumento para medir la calidad de un sistema educativo:

> (…) no deberían ser utilizadas para evaluar la calidad de la educación. La razón primordial por la cual los puntajes de los estudiantes en estas pruebas no suministran un indicio preciso de la eficacia de la enseñanza es que cualquier inferencia acerca de la calidad

[30] Un excelente resumen de la evaluación en gran escala usada en Francia se puede ver en Artigue (2007).

> educativa basada en los logros de los estudiantes en las pruebas estandarizadas de logros tiende a no ser válida (p. 4).

La advertencia es globalmente pertinente, sin embargo mucho depende de las características de las pruebas, de su diseño y de si se utilizan sus resultados de manera inteligente en la sociedad.

Las pruebas "desempeñan cada vez más un papel prominente en las vidas de estudiantes y docentes, ya que la graduación o la promoción de grado a menudo dependen de los resultados de los exámenes" (Suurtamm et al, 2016, p. 3); en Costa Rica: "ganar el Bachillerato" es decisivo para los individuos y sus familias.

Estas pruebas juegan un papel poderoso en la gestión de la enseñanza y aprendizaje, especialmente de la educación secundaria, han servido como un referente central de lo que se debe hacer en las aulas: "este tópico entra en Bachillerato, entonces hay que dedicarle mucha atención"; "estos tópicos no entran y por lo tanto se pueden dejar de lado". Las características que posea la prueba ofrecen un "mensaje" a la comunidad educativa de lo que la asignatura plantea.

En particular, muchos docentes modulan su quehacer en el aula con base en las pruebas en gran escala que se hacen; y entonces las características de la misma impactan su acción. Pero como Schoenfeld (2007) advierte: "Las pruebas de certificación aplicadas en gran escala pueden verse como una espada potente pero de doble filo" (p. 12). Estas pueden empujar para que los docentes cumplan con el currículo y destinen tiempos mayores de enseñanza a sus tópicos y enfoques. Pero también ese impacto puede ser no necesariamente positivo. Por ejemplo Suurtamm et al (2016) consignan: "Si los docentes orientan su enseñanza para simular pruebas construidas usando un modelo psicométrico, es probable que enseñen de una manera superficial y que los estudiantes aprendan en pequeños trozos con un desempeño demostrado en segmentos aislados y desconectados del conocimiento" (p. 21).

¿Cómo impedir que este tipo de evaluaciones impacten negativamente la acción de aula? Una respuesta nos la dan Swan & Burkhardt (2012): no tendrían ese resultado negativo si "las pruebas están bien confeccionadas y alineadas con los objetivos curriculares" (p. 4, citado por Suurtamm et al, 2016, p. 21). Esto es crucial: la congruencia con los programas de estudio. La calidad y pertinencia de estas pruebas estandarizadas es central. Es necesario "desarrollar evaluaciones que presten atención a sus implicaciones y se alineen no sólo con el contenido de las matemáticas, sino también con los procesos y acciones matemáticas" (Suurtamm et al, 2016, p. 21). Esto último es importante: el pensamiento y las capacidades superiores matemáticas deben incorporarse apropiadamente en este tipo de pruebas en gran escala.

Es correcto señalar como Suurtamm et al (2016) que la “evaluación a gran escala y la de aula tienen diferentes propósitos y tienen objetivos diferentes”, p. 3), pero también debe insistirse: “sus diferentes componentes deben formar un todo coherente” (OCDE, 2013, p. 14). Esto se traduce en “generar sinergia entre los componentes, evitar duplicaciones y prevenir inconsistencia de objetivos” (p. 14).

Coincidimos con Suurtamm et al (2016) en que debe existir un inter-flujo entre ambos tipos de evaluación, porque de lo contrario se ve afectado el desarrollo del currículo:

> Para que la implementación de los programas de estudios en el aula y la evaluación curricular que se desarrolla por medio de pruebas en gran escala puedan alimentarse mutuamente y mejorar el aprendizaje de los alumnos de manera positiva y productiva, las evaluaciones externas a gran escala no pueden funcionar de forma aislada de las aulas. Un número de investigadores de diferentes partes del mundo han documentado la interacción de estos dos contextos de evaluación. (p. 22)

¿Por qué sería posible este inter-flujo? Porque ambos tipos de evaluación se deberían basar “en principios similares de evaluación sólida, en última instancia tener coherencia entre los dos ayudaría a apoyar a todos los estudiantes para tener éxito” (p. 25), y es así en tanto “el propósito central de la evaluación para el aula o aquella de gran escala debe ser apoyar y mejorar el aprendizaje de los estudiantes” (p. 4). Con OCDE (2013): “todos los tipos de evaluación deben tener valor educativo y debe tener beneficios prácticos para quienes participan en ellos, especialmente estudiantes y docentes” (p. 14).

En una perspectiva de largo plazo es posible pensar que las pruebas estandarizadas deban ser sustituidas por otros instrumentos que, de una manera más individualizada, permitan una mejor evaluación de los conocimientos y capacidades que logran los estudiantes. Sin duda toda estandarización deja por fuera elementos valiosos, pues en primer lugar por su propia naturaleza debe medir lo que es comparable y existen muchas dimensiones del aprendizaje que no admiten comparación cuantitativa (por ejemplo de naturaleza cultural o asociadas a sistemas de creencias).

También una prueba a realizar en un momento estático de dos o tres horas, en la que intervienen elementos incluso emocionales, constituye un medio limitado en relación con los amplios periodos en que se han generado los logros educativos y es posible de distorsionar los rendimientos individuales.

Probablemente una colección de instrumentos realizados en gran escala pero aplicados en diversos momentos y que incluyan recolección de evidencias, observación de desempeño, interrelación y comunicación con los estudiantes y las personas asociadas a su entorno, sustituya estos procesos actuales de certificación esenciales para la vida de los estudiantes. Sin embargo, estamos a mucha distancia de disponer de ese tipo de instrumentos efectivos socialmente, y se debe reconocer a la vez que en su espacio de pertinencia las pruebas estandarizadas pueden producir información valiosa, útil y relevante para los individuos y la sociedad. No todas las pruebas estandarizadas logran este cometido, pues como hemos señalado anteriormente: para ello deben estar técnicamente bien diseñadas, ser pertinentes y utilizadas cuidadosamente en aquellos espacios en los que no habiendo otros medios ofrezcan su aporte.

Aunque existen otros mecanismos en el sistema educativo costarricense para “fiscalizar” y “orientar” lo que pasa en las aulas, las pruebas nacionales de Bachillerato aportan uno de los principales insumos; lo que las convierte en un medio de gran relevancia para la sociedad. La ausencia de estas pruebas, en este escenario, impactaría negativamente en las condiciones que debe generar la preparación escolar.

El Ministerio de Educación Pública y en particular la Dirección de Gestión y Evaluación de la Calidad tienen una gigantesca responsabilidad con el diseño y ejecución de estas pruebas; su realización, adecuada o inadecuada, posee implicaciones muy fuertes, es crucial para la educación nacional.

En el escenario histórico actual las pruebas de Bachillerato adquieren en Matemáticas un relieve adicional: se realizan en una asignatura compleja que vive la reforma educativa más profunda que ha desarrollado Costa Rica en mucha décadas.

La calidad de estas pruebas tiene implicaciones cruciales para el destino de esta auténtica revolución. Uno de los asuntos centrales que la comunidad educativa deberá valorar en este escenario es si el modelo general de elaboración de pruebas nacionales que se ha tenido en los años anteriores es compatible con las características del currículo oficial de Matemáticas. Se afirmará aquí que es necesario volver a analizar ese modelo para esta asignatura e incluso para las demás. En la sección que sigue incidiremos en ese tema, para luego, finalmente, ofrecer sugerencias específicas que pudieran nutrir el diseño de las pruebas nacionales de Bachillerato en Matemáticas.

El modelo de construcción de las pruebas nacionales

Hace algunos años, en las pruebas nacionales de Costa Rica se ofrecían "temarios" que sintetizaban lo que se iba a evaluar (una guía), lo que provocó no pocas veces que en las aulas los quehaceres se redujeran a esos temarios y se afectara un desarrollo en el aula de todos los tópicos de los programas oficiales. Estos fueron derogados por el Consejo Superior de Educación en el 2004 por precisamente considerar que "lo que se busca es que los Programas de Estudio sean el instrumento que guía la enseñanza pues los temarios han hecho una derogación tácita de los programas" (Consejo Superior de Educación, 2004, p. 8). Y por eso se tomó el acuerdo 07-2004 que señaló:

> … a partir del año 2005 se eliminan los temarios para las pruebas nacionales y que el departamento de Control de la calidad realice las modificaciones necesarias al modelo de evaluación de manera que este elemento (los temarios) no sea consubstancial al modelo que se adopte. (p. 8).

Modelo de elaboración de pruebas nacionales y tablas de especificaciones

En busca de dar una alternativa a los temarios, el MEP elaboró un modelo de diseño y ejecución de las pruebas que incluía la confección de "tablas de especificaciones": "A raíz de la decisión por parte del Consejo Superior de Educación de eliminar los temarios y considerar los programas de estudio como marco límite para la confección de las pruebas nacionales, se presenta aquí la tabla de especificaciones para hacer viable este acuerdo." (MEP, 2006, p. ii). Estas "tablas" forman parte de un modelo que, se afirma, desde finales del siglo XX el MEP adoptó basado en principios de la psicometría (que subraya "normas" y "estandarización") y que busca medir el desempeño de los individuos en relación con otros, se establece un solo puntaje del mismo y donde se suele usar la curva de distribución normal para representar sus resultados. MEP (2006) lo consignó así:

> Este modelo, proveniente de la psicometría, se utiliza para establecer el estatus de un individuo en relación con el desempeño de otros en una prueba particular, de acuerdo con el número o porcentaje de ítemes contestados correctamente, o también, el número de puntos acumulados; emplea en la prueba el mayor número de ítemes posible para hacer más confiable la medición y así poder discriminar entre

> individuos con el fin de ubicarlos en una determinada posición y, de acuerdo con ella, asignarles una nota. Los resultados usualmente se expresan en un solo puntaje, que resume lo que el estudiante es capaz de obtener en toda la prueba (Worthen y Sanders, 1987). Según Gronlund y Linn (1990), una prueba construida bajo este modelo, está diseñada para proveer una medición de desempeño que es interpretable en términos de la posición relativa de un individuo en algún grupo conocido. (p. iv).

El modelo de elaboración de pruebas añadía, según la misma fuente, algunos de los criterios indicados inspirados en Popham (1990):

1. Determinación del número de ítems por construir para cada objetivo, criterio, contenido o constructo que se proponga.
2. Definición de la muestra de objetivos, criterios o conceptos propuestos.
3. Determinación de evidencia de confiabilidad.
4. Descripción del comportamiento por medir.
5. Determinación de evidencia de validez. (MEP, 2006, p. iv)

En este modelo, para lograr la "validez" de la prueba se requiere de "una especificación del universo" de los contenidos curriculares de los cuales la prueba significa una muestra. Y, entonces, aquí es donde se comprende el papel de las "tablas de especificaciones":

- "La tabla de especificaciones debe mostrar el énfasis relativo que se da a cada tópico de la materia y a cada objetivo" (MEP, 2006, p. v) y
- "La prueba debe construirse de acuerdo con la tabla de especificaciones. Cuanto más correspondencia exista entre las partes que la componen y las especificaciones que se indican en la tabla, mayor será la probabilidad de que las respuestas de los estudiantes tengan un grado elevado de validez de contenido." (MEP, 2006, p. v)

Además, siempre dentro de este modelo, se potencia el mayor grado posible de especificidad; por ejemplo proporcionado por una estructuración en dominios o áreas con contenidos establecidos de la manera más específica posible. Hay otros elementos que se piden a la prueba como lo es la "confiabilidad", en donde se suele invocar "estabilidad", "seguridad", "predictibilidad" y el menor margen de error en la medición; hay instrumentos cuantitativos (o estadísticos) que permiten intentar garantizar estas condiciones.

La confección de las pruebas (modalidad académica) según este modelo se realiza mediante un protocolo que inicia de la forma que se consigna en la siguiente figura:

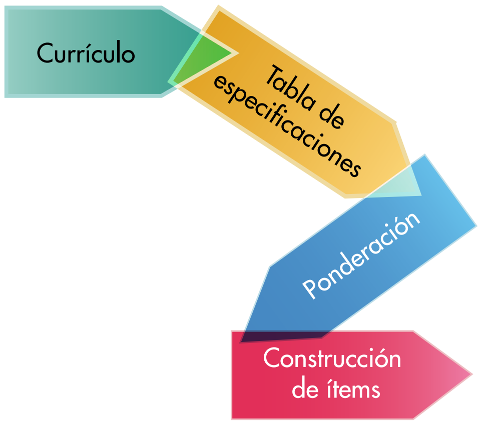


Figura 22. Primeras etapas en el modelo de elaboración de pruebas nacionales de bachillerato

La “ponderación” refiere a una etapa en que se ajusta el número de ítems en consulta con docentes y asesores del país. Una vez construidos los ítems el proceso continúa con diversas fases, entre ellas: validación por especialistas, revisión por especialistas, montaje de pruebas, impresión de pruebas, hasta la aplicación de pruebas y acciones posteriores. La incorporación de diversos especialistas que validan y revisan las pruebas introduce un elemento adicional importante, en alguna medida es un “criterio”: el ítem corresponde bien a los objetivos curriculares. Esto último busca fortalecer la validez y el sentido de correspondencia con el currículo que se pretende tenga la prueba.

Vamos a comentar algunos de los elementos presentes en el marco teórico de la construcción de las pruebas nacionales. Empecemos con el influjo de la evaluación *psicométrica,* la cual estuvo en sus comienzos muy ligada a la llamada teoría clásica de la medición (teoría de los test)[31], y en efecto refiere a la “norma” y enfoca los comportamientos promedios dentro de una población:

[31] Esta teoría fue complementada por medio de la Teoría de la Generalizabilidad (Cronbach) y especialmente por la “Teoría de Respuesta al ítem” (modelos del *Latent-Trait* como el de Rasch). No es muy conocido que Cronbach fue uno de los discípulos más importantes de Tyler.

> Mide las diferencias interindividuales con respecto a una característica o rasgo y lo hace comparando las puntuaciones de prueba de cada sujeto con su grupo de pertenencia. Determina así la posición relativa del alumno con respecto al grupo. Por eso es que el desempeño grupal promedio y su variabilidad constituyen la norma o marco de referencia para analizar y valorar la calidad del rendimiento. (Mesía & Frisancho, 2012, p. 99)

En ese sentido, ítems con rendimientos muy buenos o muy malos son excluidos. Algunos autores como el mismo Popham (1999) señalan que esto constituye un problema, puesto que un ítem con resultados muy buenos podría estar revelando un especial énfasis o trabajo que hicieron todos los docentes o uno con muy malos en el cual los docentes no le hayan dado importancia al tópico que se busca medir. La crítica es correcta, pero no invalida este tipo de pruebas estandarizadas, puesto que todo depende de sus propósitos; precisamente identificar esos rangos dentro de la distribución normal aporta información muy valiosa en el marco de una población grande.

El modelo de las pruebas nacionales en Costa Rica incluye también insumos de modelos que no son psicométricos sino más bien edumétricos, es decir referidos a “criterios”, pues no puede evadirse que estas pruebas tienen la finalidad de discriminar si los sujetos a quienes se les aplica aprueban y puedan seguir adelante en sus estudios superiores o profesionales, y por lo tanto deben sobrepasar individualmente el *umbral* de un dominio cognoscitivo determinado por el sistema educativo (en Costa Rica además el resultado de la prueba se promedia con una nota llamada de “presentación” aportada por rendimientos escolares en buena parte de los últimos dos años cursados por el sujeto). Las pruebas referidas a criterios sirven, señala Leyva (2011):

> … para comprobar el rendimiento mediante la apreciación de las realizaciones personales respecto de los objetivos logrados, sin compararlas con las del grupo al que pertenece, facilitando así el diagnóstico de dificultades, la programación de las actividades de recuperación y la toma de decisiones de promoción de nivel o de certificación de cada individuo evaluado. (pp. 133-134)

Esta misma autora reseña los pasos que Ronald Hambleton señalaba, en 1995, que deben seguirse con este enfoque *criterial*:

1. Preparación y selección de las especificaciones del dominio o los objetivos que se pretenden evaluar.
2. Descripción clara y detallada de las especificaciones: los propósitos de la prueba, el tipo de formato de reactivos deseable, el número

de reactivos de la prueba y las instrucciones para los redactores de reactivos.

3. Redacción de los reactivos para medir los objetivos incluidos en la prueba, o versiones de la prueba si se requiere la elaboración de formas paralelas.
4. Edición inicial de los reactivos de la prueba por los individuos que los redactan.
5. Evaluación sistemática y consistente de reactivos en los pasos 2 y 3 para determinar su congruencia con los objetivos y para determinar su representatividad.
6. Edición adicional de reactivos con base en los datos del paso 5, descartando aquellos que no midan adecuadamente los objetivos que se pretenden medir.
7. Integración de versiones de la prueba con base en las especificaciones realizadas.
8. Empleo de métodos para determinar estándares (puntos de corte) que permitan interpretar la ejecución de los sustentantes.
9. Administración de la prueba bajo condiciones estandarizadas de aplicación.
10. Investigación y análisis para recopilar evidencias necesarias de confiabilidad y validez de la prueba.
11. Preparación de un manual técnico de la prueba.
12. Compilación de datos técnicos, tanto de los reactivos como de la prueba, para reforzar la validez en términos de las inferencias que se llevan a cabo y el tipo de usos en condiciones diversas y con diferentes poblaciones examinadas. (Leyva, 2011, pp. 135-136)

No es difícil identificar en estos pasos mucho de lo que se plantea en el modelo vigente de pruebas nacionales de Costa Rica. En el mismo resulta esencial determinar con precisión el dominio de base en el cual se van a realizar las pruebas y lograr que los ítems correspondan plenamente al mismo. Los programas de estudio constituirían el dominio. En la determinación del dominio se plantea: "… un continuo generalidad–concreción, de manera que a mayor concreción existe una mayor calidad en la definición. Como aspectos vinculados con la definición están los de exclusividad y exhaustividad, es decir que las unidades que definen el dominio no deben traslaparse y deben contener el dominio en su totalidad" (Leyva, 2011, p. 137). ¿Cómo en ese enfoque se establece el "evidenciar" ese dominio? Para empezar, mediante la determinación de las especificaciones del dominio. Este elemento es muy importante porque hacerlo bien proporcionaría validez a los resultados que se obtengan en una de sus dimensiones. Y este sería el fundamento de la necesidad de las tablas de especificaciones. Leyva lo describe con toda claridad:

> El perfil referencial de validez y las tablas de especificaciones son los documentos necesarios para garantizar a priori la validez de contenido y de constructo de las pruebas. Las tablas de especificaciones son también instrumentos base para los procedimientos de validación por jueces, los cuales tienen que emitir juicios respecto de si los reactivos son adecuados y pertinentes al perfil referencial y a la definición del dominio que queda establecido en la tabla de especificaciones. (p. 147)

Cuando se establece un enfoque psicométrico, que enfatiza el comportamiento "normal" dentro de la población evaluada, la decisión sobre el umbral que determina si una persona aprueba o no, es un acto adicional muy importante. ¿Cuántos puntos debe haber obtenido el individuo para ser promovido? La información que brinda la medición es un punto de partida para tomar la decisión pero no constituye la decisión por sí misma. En este punto es donde intervienen otras consideraciones acerca de si un determinado porcentaje de desempeño (o el mismo aunado a otros elementos, como la nota de presentación) constituye el límite inferior para lograr la promoción. ¿Quién y cómo se establece esta decisión? ¿Por qué, por ejemplo, un 50% de los puntos obtenidos logra la promoción y no un 40% o un 20%? ¿Qué significa un 20, 30, 40 o 60% del puntaje en relación con los aprendizajes sobre un dominio cognoscitivo? Puesto en otras palabras: ¿qué indica el puntaje sobre lo que domina o no domina un estudiante evaluado en su relación con esta asignatura? Aquí hay puntajes tradicionalmente determinados que se admiten como los aceptables para determinar ese umbral, pero estos son resultado de decisiones no siempre reducidas a consideraciones técnicas sino que a veces también incluyen las políticas.

Hay algunos otros interrogantes: ¿los puntajes de pruebas estandarizadas como la de Bachillerato realmente indican los conocimientos y las capacidades que se requieren para un dominio determinado por un currículo? ¿Qué pasaría si la prueba ofrece resultados de promoción muy por debajo del umbral tradicionalmente aceptado cuando esta prueba fue elaborada con niveles de demanda cognoscitiva muy alta? ¿Qué pasaría, si al revés, la demanda de la prueba fue muy baja? ¿Qué pasaría si la prueba no corresponde al dominio, o lo hace solo en un porcentaje del mismo? Sin duda hay aquí espacio para un manejo de resultados que no es provocado directamente por las condiciones del aprendizaje obtenido por los estudiantes. Lo que esto implica es la necesidad de que el modelo de elaboración de las pruebas incluya acciones en que haya expertos y funcionarios que valoren correctamente que los ítems de la prueba corresponden a esos aprendizajes y al dominio cognoscitivo (currículo), y que entonces la información que brinde la prueba pueda ser usada ya no solo dentro del enfoque psicométrico que enfatiza la norma, sino también al modelo edumétrico que enfatiza el criterio.

En síntesis: en el modelo de las pruebas costarricenses hay insumos psicométricos y edumétricos. Sin duda, el enfoque psicométrico influencia significativamente estas pruebas. Y por eso se vuelve necesario introducir aquí algunas consideraciones generales sobre el mismo muy extendidas en la comunidad internacional de Educación Matemática.

¿Son los enfoques psicométricos convenientes?

La valoración dominante entre los investigadores de la Educación Matemática es que los enfoques psicométricos de pruebas en gran escala han tenido bastantes limitaciones, tanto por los formatos predominantes de sus ítems como también por los marcos intelectuales que han asumido.

Una primera consideración es que los enfoques psicométricos refieren sobre todo a “grupos o individuos” para “medir de manera fiable el resultado del aprendizaje” y “no el propio aprendizaje”, es decir: no examinan “los procesos de pensamiento y comunicación de los estudiantes” (Suurtamm et al, 2016, p. 3). Esta circunstancia los distanciaría de las funciones por ejemplo formativas de la evaluación.

Un segundo aspecto son las debilidades del formato dominante en estas pruebas: “problemas matemáticos que a menudo conducen a una única respuesta correcta” (p. 3), lo que se juzga más propio de “una perspectiva conductista o cognitivista, ya que típicamente se enfocan en componentes independientes del conocimiento” (Scherrer, 2015). Algunas de esas perspectivas y sus debilidades ya las hemos reseñado en la segunda parte de este trabajo.

Se afirma que este tipo de formato posee tensiones con la evaluación de aula pues: “a veces está en conflicto con las evaluaciones de aula que fomentan una serie de respuestas y ofrecen oportunidades para que los estudiantes demuestren su razonamiento y creatividad” (Suurtamm et al, 2016, pp. 3-4). Schoenfeld (2007) es muy crítico:

> Las pruebas de selección múltiple que se centran en gran medida en destrezas simples pueden clasificarse fácilmente, tienden a ser fáciles de construir en formas que cumplen criterios psicométricos y proporcionar estadísticas agregadas con fines políticos, pero es improbable que capten el espectro deseado de matemáticas, y proporcionan poca o ninguna información diagnóstica útil. (p. 12)

Sin duda en las pruebas estandarizadas de Costa Rica se ha potenciado el formato de ítems de selección única (con revisión mediante revisora óptica), lo que en parte se debe al bajo costo de su elaboración, aunque también a esquemas intelectuales y también de conveniencia (tratar de asegurar que no haya fraudes, por ejemplo).

Como un todo: el impacto social de pruebas estandarizadas de certificación puede ser muy fuerte pues cuando por ejemplo abunda la “enseñanza orientada a la preparación de estas pruebas”, tales pruebas pueden distorsionar el currículo” (Schoenfeld, 2007, p. 12). El punto invoca que las pruebas suelen constituir un punto de referencia central para la selección de los tópicos y enfoques que se desarrollan en las aulas, y eso puede ser positivo o negativo.

¿Qué supuestos han dominado en las tradiciones psicométricas? Osterlind (1998) identifica algunos:

- *Unidimensionalidad*: cada ítem de la prueba debe centrarse en evaluar un solo objetivo o habilidad.
- *Independencia local*: cada ítem de la prueba es independiente de cualquier otro ítem, sin sugerencias ni expectativas de que las soluciones de un ítem afecten el rendimiento de otro ítem.
- *Curva característica del ítem*: si los ítems son válidos para un objetivo particular, los estudiantes que tienen una baja habilidad deben tener una baja probabilidad de éxito en el ítem.
- *No ambigüedad*: los ítems deben ser declarados de tal manera que la parte inicial del ítem conduzca al alumno a la respuesta correcta única (adaptada de las páginas 700-701). (Citado por Suurtamm et al, 2016, pp. 7-8) (Itálicas añadidas)

Podemos identificar, sin duda, algunos de estos aspectos en las pruebas nacionales costarricenses. Pero ¿son válidos? Van den Heuvel-Panhuizen & Becker (2003), por ejemplo, consideran que estos supuestos se basan en creencias muy cuestionadas por la comunidad internacional de Educación Matemática, a saber:

1. Los problemas matemáticos siempre tienen solo una respuesta correcta.
2. La respuesta correcta siempre se puede determinar.
3. Todos los datos necesarios deben ser proporcionados a los estudiantes.
4. Los buenos problemas matemáticos deben ser localmente independientes.

5. No se puede evaluar el conocimiento aún no enseñado.

6. Los problemas matemáticos deben ser resueltos de una sola manera.

7. La respuesta a un problema es el único indicador del nivel de logro del estudiante. (p. 705, citados por Suurtamm et al, 2016, p. 8)

Con base en los supuestos que consigna Osterlind: ¿cómo abordar dentro de esos enfoques psicométricos una enseñanza donde lo que se busca es motivar "a los estudiantes a demostrar su pensamiento, trabajar con problemas desordenados o mal estructurados del mundo real o resolver problemas desde más de una perspectiva, o que tienen más de una respuesta"? (Suurtamm et al, 2016, p. 8). Es decir ¿cómo compatibilizar los enfoques psicométricos con una enseñanza donde se desea promover el progreso de las capacidades cognitivas superiores? Es sin duda un auténtico desafío.

Debe reconocerse, sin embargo, que hay importantes esfuerzos en la comunidad educativa para renovar las pruebas de tendencia psicométrica: "Se está trabajando … para examinar los ítems de las evaluaciones de gran escala que fomentan una serie de respuestas diferentes (ver, por ejemplo, Schukajlow et al., 2015a, b)" (Suurtamm et al, 2016, p. 4); y un caso particular lo representarían las mismas pruebas PISA de la OCDE.

De la misma manera "las teorías psicométricas han evolucionado de modelos basados en la teoría clásica de pruebas hacia modelos que se basan en respuestas a ítems individuales de pruebas (e.g. modelos de la teoría de respuesta al ítem) a modelos basados en componentes de razonamientos necesarios para responder ítems particulares de un test (e.g. modelos de clasificación diagnóstica)" (De la Torre, Carmona, Kieftenbeld, Tjoe y Lima, 2016, p. 53 y sgtes.). Los *modelos de clasificación diagnóstica* han abierto una ruta para poder incorporar en la evaluación habilidades simples pero también procesos y competencias e incluso otras dimensiones del rendimiento individual. Uno de los propósitos de estos modelos novedosos es la búsqueda de un equilibrio entre evaluaciones de gran escala (como las pruebas nacionales en Costa Rica) y la necesidad de proporcionar mayor nivel de evaluación de la cognición. Algunos de esos modelos psicométricos están basados en lo que se denomina "matriz-Q" (Tatsuoka et al, 2016. P. 73 y sgtes.). Esta orientación sin embargo aun se encuentra en el plano de la investigación (De la Torre, 2016, Tatsuoka et al, 2016) y dista de poderse implementar en la práctica.

Aun si se lograran cambios para integrar en pruebas estandarizadas otras dimensiones de los aprendizajes, siempre quedarían dudas de si no sería necesario introducir otro tipo de instrumentos más adecuados que las trasciendan. Este es un tema que trataremos al final de esta tercera parte.

¿Cuáles serían, entonces, las condiciones para que este tipo de pruebas no sean inservibles o poco instrumentales para los aprendizajes y para el progreso educativo? Swan y Burkhardt (2012) señalan que deben existir algunos criterios:

- Las tareas deben presentar una visión equilibrada del currículo en términos de todos los aspectos del desempeño que el currículo quiere fomentar.
- Las tareas deben tener "validez en su presentación de entrada (su cara)" y deben valer la pena y ser de interés para los estudiantes.
- Las tareas deben ser apropiadas para el propósito y deben integrar procesos y prácticas en lugar de intentar evaluarlas por separado del contenido.
- Las tareas deben ser accesibles (tener múltiples puntos de entrada) a los estudiantes con una variedad de niveles de habilidad y desempeño, a la vez que ofrecen oportunidades de desafío.
- Las tareas deben proporcionar oportunidades para demostrar las cadenas de razonamiento y recibir crédito por tal razonamiento, incluso si el resultado final contiene errores.
- Las tareas deben utilizar contextos auténticos en vez de artificiales, a veces con datos incompletos o extraños.
- Las tareas deben proporcionar oportunidades para que los estudiantes determinen qué estrategia quieren usar para buscar una solución.
- Las tareas deben ser lo suficientemente transparentes como para que los estudiantes sepan qué tipos de respuestas serán aceptables (adaptado de la página 7). (Citado por Suurtamm et al, pp. 8-9, 2016)

De una manera general, la base para estos cuestionamientos así como de la formulación de nuevas propuestas en el diseño de pruebas de gran escala es el progreso educativo en muchos países que se expresa en currículos de calidad que subrayan el papel de las habilidades del siglo XXI y lo que en el currículo de Costa Rica se ha condensado como el progreso de capacidades superiores y la competencia matemática (o la *Política curricular* nacional de Costa Rica). De igual forma, el avance intenso y amplio de la investigación en la Educación Matemática empuja hacia ese tipo de consideraciones. Lo que se plantea es que la evaluación de gran escala debe remozarse con base en los nuevos currículos cuya naturaleza ha cambiado cualitativamente y tomando como referencia los progresos de la investigación educativa.

Si la comunidad internacional está trabajando intensamente para diseñar pruebas en gran escala que se ajusten a objetivos educativos que promuevan las capacidades superiores y que superen algunas de las limitaciones de las pruebas tradicionales basadas en enfoques psicométricos, es necesario identificar cuáles son las experiencias que se están realizando en esa dirección y buscar aplicar en nuestro territorio lo que sea factible y pertinente. Es decir: no se trata de esperar a que se generalicen en el mundo en algún momento, años adelante, estrategias nuevas más convenientes y progresivas, sino dotarse de la osadía intelectual e institucional para introducir cambios en nuestra sociedad. También será necesario explorar y experimentar con otros instrumentos de evaluación que coadyuven en los procesos de certificación educativa que son de tanta importancia para los estudiantes.

Lo mismo puede plantearse para la evaluación de aula, pues deben haber puentes y consistencia entre todos los mecanismos de evaluación que tiene el sistema educativo. Esto es un desafío sin duda pero constituye a la vez una oportunidad para países como Costa Rica.

Podemos resaltar, finalmente, que los criterios de Swan y Burkhardt consignados anteriormente sintonizan con muchos de los términos o elementos que incluye el currículo costarricense como relevantes para el diseño de tareas: "todos los aspectos del desempeño que el currículo quiere fomentar", "valer la pena y ser de interés para los estudiantes", "integrar procesos y prácticas en lugar de intentar evaluarlas por separado del contenido", "variedad de niveles de habilidad y desempeño, a la vez que … oportunidades de desafío", "contextos auténticos en vez de artificiales". En el escenario costarricense esto convoca una convergencia de las pruebas nacionales con el currículo oficial, y por lo tanto insistimos que se empuja hacia una revisión del modelo de elaboración de ellas.

Modelo de elaboración de pruebas nacionales

En el modelo de elaboración de pruebas nacionales en Costa Rica hay algunos asuntos que llaman a la reflexión. El modelo asume que las pruebas fabricadas así son inequívocamente representativas del currículo, y por lo tanto se sostiene que, de esa manera, la prueba cumpliría con el mandato del Consejo Superior de Educación que pide que se base en el currículo. Este es un supuesto fundamental. Aquí, sin embargo, se debe tener mucho cuidado puesto que no está claro que esa "representatividad" se pueda aplicar en toda circunstancia curricular, es decir que se logre independientemente de la naturaleza del currículo. Este supuesto parece no ser verdadero siempre.

En el fundamento del modelo vigente existe un sustrato: la naturaleza de los currículos que se usan como base, en general, refieren exclusivamente a conocimientos (y especificaciones de objetivos esperados o con énfasis conductista en "conductas" observables alrededor de ellos) sin incorporar otros elementos tales como los procesos cognitivos complejos. Resulta muy difícil integrar este último tipo de elementos en un currículo de esta naturaleza (las capacidades complejas no son observables directamente, solamente se pueden inferir en el desempeño que realizan los sujetos).[32]

¿Cómo aplicar un modelo de construcción de pruebas para currículos basados en contenidos a currículos donde son centrales las capacidades cognitivas superiores? No pareciera ser pertinente.[33]

El actual currículo de Matemáticas de Costa Rica posee un diseño complejo: entre otras razones, porque no está basado solamente en contenidos, introduce capacidades asociadas a los conocimientos agrupados por medios de áreas matemáticas (habilidades) y con relieve capacidades transversales a esas áreas. Además, porque incluye una intervención múltiple de habilidades con diversas intersecciones entre ellas, y se promueve su integración también de diferentes maneras como algo medular de la gestión educativa que propone. Estas características del currículo costarricense generan tensión en el modelo tradicional de elaboración de pruebas nacionales.

Antes de la aprobación del nuevo currículo se usaron "tablas de especificaciones" con base en los contenidos y objetivos que estaban en los programas. Con el cambio de programas se empujó a realizar ajustes en la "tabla de especificaciones", lo que se tradujo en la sustitución de los "objetivos" por "habilidades" aunque sin cambiar mucho la esencia del instrumento ("tabla de especificaciones"). Entre el 2013 y el 2015 las tablas correspondieron a los programas de transición que el país se había dado para avanzar en una implementación curricular gradual, y como no

[32] Muchos de estos modelos curriculares fueron inspirados en el trabajo de Tyler (1949). La taxonomía de Bloom se enmarca dentro de la visión de Tyler (Bloom, 1956; Bloom, Engelhart, Furst, Hill & Krathwohl, 1956). Anderson, et al (2001), como se ha reseñado en este trabajo, realizaron una revisión del modelo original de Tyler que incluye ya no solo una secuencia lineal sino bidimensional, incluso podemos decir reticular, para tratar de integrar elementos cognitivos asociados con los conocimientos (por ejemplo, grados de dominio de estos).

[33] En la perspectiva constructivista, por ejemplo, se privilegian las "relaciones implicativas entre constructos" y el énfasis evaluativo "comprehensivo o general" (Quass, 1999). Sin duda muchas de las premisas del constructivismo relativas a la evaluación tienen mayor sentido en la evaluación de aula, sin embargo la invocación de interrelaciones entre los diferentes objetos curriculares sí es un asunto que concierne a evaluación de aula como a la macroevaluación.

habían muchos conocimientos y habilidades nuevas en el caso del Ciclo Diversificado, los cambios no fueron sustanciales.

En el 2016 la situación cambió significativamente en tanto las pruebas nacionales por primera vez debían corresponder enteramente al currículo nuevo en la rama académica. Nuevas “tablas de especificaciones” se ofrecieron a la comunidad educativa en un primer momento para la convocatoria de pruebas de Bachillerato por Madurez (abril y setiembre) y luego para la convocatoria de colegios académicos (noviembre).[34] Entonces: la tabla incluyó habilidades generales y específicas de los contenidos del Ciclo Diversificado de acuerdo con el conjunto completo de los programas vigentes. Debe señalarse que aquí se hizo un importante esfuerzo institucional en el MEP para tratar de colocar los elementos del currículo de Matemáticas dentro de una “tabla de especificaciones”, buscando identificar el lugar de las habilidades específicas en su relación con las habilidades generales y ofrecer una estructura simplificada de las demandas cognoscitivas que se encuentran en ese currículo y que podrían servir como guía para la construcción de ítems y, también, para orientar a la comunidad educativa sobre lo que se pedía en estas pruebas.

En las tablas del 2016, sin embargo, no es posible evadir que subyacían algunas premisas, entre ellas:

- las “habilidades generales” en cada área poseen una “generalidad” más o menos equivalente
- una “habilidad general” no posee intersecciones con otras
- una “habilidad específica” puede ser “incluida” solamente dentro de una habilidad general (es decir: asociada a una habilidad general)
- las tareas matemáticas que se incluyen en un ítem deben estar asociadas solamente a una de las áreas matemáticas.

Estas premisas ya aprisionaban inapropiadamente al currículo.

La tabla encerraba varias condiciones que le impedía tener congruencia con el currículo nacional:

[34] El *Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica* en relación con la convocatoria de noviembre de 2016 (no así en las anteriores) aportó sus criterios al MEP para la elaboración de esta tabla, que fueron incorporados en la versión que se entregó a la comunidad educativa. En ese momento, a principios del 2016, este Proyecto asumió corresponsabilidad en la elaboración de este instrumento, y por lo tanto, debido a diversas razones, en la aceptación del mismo.

1. Establecía especificaciones solamente sobre conocimientos y habilidades asociadas a ellos en cada área, no incluía referencia a las capacidades del currículo, que deberían resaltarse:
   - ◊ no se incorporaban los procesos-capacidades, elementos centrales en el currículo
   - ◊ no se hace referencia a la competencia matemática general, el constructo principal del currículo; un elemento que permite, por ejemplo, comprender el sentido de la contextualización activa en la evaluación y la integralidad y sinergia de todos los elementos curriculares

2. Establecía un manejo muy limitado de las habilidades del currículo:
   - ◊ no daba posibilidad a habilidades generales con intersecciones o interrelaciones entre ellas
   - ◊ no permitía habilidades específicas presentes en más de una habilidad general (es decir que se pueden asociar con más de una general)
   - ◊ se brindaban pocos espacios para incorporar en la evaluación la integración de habilidades
   - ◊ no permite la participación de habilidades de más de una área matemática.

Es necesario insistir que el currículo oficial se escapó precisamente de currículos basados en "contenidos" para incluir capacidades superiores y una perspectiva integradora y dinámica. Esta tabla de especificaciones no recogía el espíritu que encierra el currículo oficial. Como señalan Suurtamm et al (2016): "La evaluación debe reflejar las matemáticas que es importante aprender y las matemáticas que se valoran. Esto significa que tanto la evaluación en gran escala como en el aula debe tener en cuenta no sólo el contenido, sino también las prácticas, procesos, capacidades o competencias matemáticas" (p. 5).

De una manera en la cual se impedía la participación de varios elementos curriculares fundamentales en el diseño de la prueba, se introdujeron muchas limitaciones para construir ítems, y se trasmitió a la comunidad educativa una visión muy limitada de lo que se debería evaluar en la prueba nacional de Matemáticas, algo que no deja de tener impacto en la implementación curricular en las aulas. Puede verse como un intento por adaptar el currículo a una tabla (y no al revés); se percibe como una adaptación del currículo a un modelo que resulta más coherente con los programas anteriores que tenían un enfoque diferente al vigente.

Al debilitarse la correspondencia de la prueba con el currículo, por las razones apuntadas, se provocó una situación que se podría colocar en paralelo con aquella que años atrás generaron los "temarios", pues en ambas situaciones se redujo el currículo; con los "temarios" se cercenaban conocimientos y objetivos, ahora capacidades superiores y la perspectiva integradora y dinámica que este nuevo currículo aporta. El modelo de elaboración de pruebas nacionales tal y como se ejecutó en el 2016, en lo que refiere al currículo de Matemáticas, se distanció tácitamente de la intención del acuerdo 07-2004 del Consejo Superior de Educación.

¿Hay alternativas a las tablas de especificaciones?

¿Qué ofrecer entonces a la comunidad educativa en lugar de este tipo de tablas de especificaciones? En primer lugar, lo más pertinente sería aportar a la comunidad educativa como referente el currículo como tal. Es lo que sería congruente con el mismo *Reglamento de Evaluación de los aprendizajes*:

> Artículo 93.
>
> De la delimitación del ámbito para la elaboración de las Pruebas Nacionales. Los programas de estudio oficialmente aprobados por el Consejo Superior de Educación, para cada una de las asignaturas, que se examinen en las pruebas nacionales; delimitarán el ámbito para la elaboración de éstas y deberán ser divulgados entre los estudiantes, docentes, padres y madres de familia al inicio de cada curso lectivo. **Los programas de estudio, sus objetivos y contenidos, constituyen la guía básica para los profesionales de la docencia y para los estudiantes**. (MEP, 2009, p. 39). Énfasis añadido.

Si se desea brindar a la comunidad educativa un instrumento adicional al currículo mismo, este debería poner en evidencia todos los elementos curriculares: competencia matemática general (como su constructo central), conocimientos, habilidades generales y específicas, procesos, niveles de complejidad y donde se consignen inequívocamente principios de flexibilidad en el manejo de todos estos elementos curriculares (y por lo tanto que esto nutra las pruebas). Hacer esto con base en la tabla, supondría una reingeniería drástica de la misma para que incluso en términos de ese modelo anterior se pudieran brindar definiciones precisas y "exhaustivas" del dominio que se evalúa (el nuevo currículo). Sería posible pensar que los indicadores de intervención de procesos-capacidades que hemos planteado aquí se integren con indicadores (para la medición) sobre lo que plantearían las diversas habilidades asociadas a los conocimientos, una conjunción a colocar en forma reticular en dos o tres dimensiones. A eso se le podría llamar "tabla" también. Esto sin embargo, en nuestro criterio, resultaría una tarea muy difícil. No pareciera factible lograr que no haya traslape en las “unidades” de definición del dominio debido a la complejidad y multiplicidad de este currículo. Y la posible tabla de especificaciones incluso si se pudiera construir como una entidad en tres dimensiones (un “cubo” o “caja de especificaciones”) pareciera que sería muy rígida y poco instrumental para la comunidad educativa. ¿Qué hacer?

En el punto en que estamos de esta reflexión, antes de ofrecer una vía de respuesta, conviene introducir un asunto que tiene relevancia: los instrumentos que requiere tener la comunidad educativa no tienen por qué ser idénticos a los que deben saber o utilizar los técnicos que diseñan las pruebas nacionales. Aquí intervienen asuntos que van desde la confiabilidad y “seguridad” de las pruebas hasta aquellos de naturaleza epistemológica (por ejemplo en torno al grado de precisión técnica que se debe sistematizar para nutrir las construcciones cognitivas en la elaboración de ítems). Es relevante no confundir a las poblaciones a las que responderían los diversos instrumentos, y, por ejemplo, sería deseable que se tenga mucho cuidado en no provocar distorsión en los significados y las implicaciones de los mensajes que se articulen.

Pareciera razonable en este asunto intentar cortar el “nudo gordiano”. En relación con lo que se ofrezca a la comunidad en general (docentes, funcionarios, estudiantes, padres de familia) podría ser más apropiada una oferta de ejemplos de ítems cuidadosamente explicados en los que se muestre la participación integrada de todos los elementos curriculares mencionados. Esta es precisamente la clase de instrumentos públicos que utiliza la OCDE en relación con las pruebas PISA para mostrar el tipo de ítems y las características de los mismos que se desea enfatizar. En el caso de Matemáticas en lo que se ofrece a la comunidad sobre lo que PISA evalúa, se describen los dominios considerados y sus características (los constructos generales de los que parten), las acciones cognitivas que intervienen en la resolución de los ítems (categorías que en el caso de Matemáticas y en los años recientes llaman “procesos”) y estrechamente asociadas a capacidades matemáticas, los contenidos matemáticos de donde se toman los ítems (conceptos, conocimientos y habilidades) y los contextos diversos en los que se colocan esos ítems (puede consultarse OCDE, 2016, pero en muchos documentos previos desde que se iniciaron estas pruebas ocurre más o menos lo mismo). Se ofrecería a la comunidad educativa una colección de ejemplos con buenas explicaciones de lo que demanda cada ítem y qué es lo que se pretende evaluar.[35] Y eso sería útil no

---

[35] Suurtamm et al (2016) consignan información aportada por Y. Shimizu de lo que se hace en Japón, que sintoniza con la propuesta que se hace en este trabajo sobre aportar colecciones de ejemplos explicados: “Para ayudar a los docentes en el uso de evaluaciones externas para apoyar su instrucción en el aula, ítems de muestra son liberados con documentación sobre los objetivos del ítem, así como los resultados de los estudiantes sobre el ítem y planes de

solo para preparar estudiantes para las pruebas nacionales sino también para orientar la evaluación que se realiza en las aulas. Esta orientación tendría consistencia con el currículo nacional vigente.

La comunidad internacional subraya que ejemplos de las tareas o problemas por incluir son muy importantes para avanzar en la reforma educativa. Coincidimos con Kieran et al (2015):

> Las tareas juegan un papel crucial para avanzar el proceso de mejoramiento del sistema educativo. Mientras, por ejemplo, en la comunidad de educación matemática, competencias como creatividad, pensamiento crítico y resolución de problemas son valoradas altamente, las tareas presentadas en las pruebas estandarizadas tienden a abordar solamente habilidades básicas. Estas tareas de pruebas estandarizadas en gran medida determinan los tipos de tareas que son usados en las clases. La innovación curricular puede avanzar hacia delante con tareas alternativas ilustrativas y con atención explícita a los principios y marcos teóricos subyacentes que son usados para diseñarlas, sin perder la consideración sobre el desarrollo de habilidades, fluidez y flexibilidad. Un componente frecuentemente perdido en los documentos de innovación curricular es la ejemplificación vívida que es necesaria para mostrar exactamente lo que las tareas podrían parecer y cómo ellas se relacionan con el mejoramiento de la enseñanza y aprendizaje. (p. 73)

Para los constructores de ítems, sin embargo, aunque la colección de ejemplos que se brinde a la comunidad educativa podría servirle como una base, otros instrumentos más específicos serían imprescindibles para apoyar esta labor tan importante que debe remozarse en los nuevos tiempos. Se podrían incluir ítems arquetipos explicados con más detalle y con un nivel mucho más alto en las consideraciones analíticas y la valoración de las tareas matemáticas implicadas; por ejemplo utilizando todo la maquinaria teórica que se ha planteado en este trabajo.

En cualquier derrotero que se decida, insistimos: es importante que exista una correspondencia y consistencia entre todos los instrumentos que se generen para abordar las pruebas nacionales.

Ahora bien, si se elimina la tabla de especificaciones como instrumento de comunicación con la comunidad, sin duda, el modelo de construcción de las pruebas cambiaría significativamente. La validez de las pruebas no

lección potenciales que permitirían que dichos ítems fueran usados en el salón de aula. Por ejemplo, en los ítems de opción múltiple se puede proporcionar información que sugiera los tipos de pensamiento en los que los estudiantes pueden participar con base en la selección de la respuesta, ayudando así a los docentes a entender la naturaleza de las concepciones erróneas en el pensamiento de los estudiantes basándose en la respuesta incorrecta seleccionada" (p. 23).

se aseguraría ya en los mismos términos como se pretendía hacer en el modelo anterior donde una tabla se afirmaba esencial, y por lo tanto en el nuevo escenario se deberían buscar mecanismos alternativos. De igual manera, resultaría inevitable repensar la fase de la “ponderación” de los ítems (el número y proporción en la prueba de ítems de cada una de las diversas áreas), lo que se ha hecho con base en la opinión de docentes de diversas regiones e instituciones del país: si el punto de partida ya no es una tabla de especificaciones, esta fase se debería replantear. Tanto la tabla de especificaciones como la fase de “ponderación” estuvieron fundamentadas en un enfoque basado en contenidos (conocimientos y objetivos dentro de un currículo lineal) donde nunca tuvieron cabida la competencia matemática, las capacidades superiores y procesos, la contextualización o los niveles de complejidad. Con el nuevo currículo este tipo de instrumentos y fases usadas en el diseño de las pruebas (de la manera que se han utilizado) no tienen lugar. En un nuevo modelo de diseño de pruebas entre otros instrumentos se debería re-conceptualizar el papel del juicio de expertos (colocarle en fase distintas y con protocolos diferentes).

Con la visión histórica más amplia: si se tiene en mente además que el sistema de diseño, ejecución y calificación de las pruebas nacionales de Matemáticas deberá incluir ítems de respuesta construida abierta (desarrollo), todo el modelo que se ha tenido debería trastocarse significativamente. Sería inevitable “cirugía mayor” y por lo tanto implicaría muchas acciones (y protagonistas) del sistema educativo nacional las cuales deberían colocarse en tiempos estratégicos. Sin embargo repensar el modelo utilizado y explorar nuevos derroteros sería lo más congruente no solo con el currículo de Matemáticas sino de todas las asignaturas involucradas y utilizar las perspectivas y tendencias que nutren la educación en el siglo XXI.

Con base en la perspectiva que se ha dibujado en las secciones previas en torno a las pruebas nacionales de Matemáticas, en lo que sigue vamos a sistematizar algunas condiciones que, en nuestro criterio, resultan pertinentes para el diseño de las pruebas en esta asignatura.

Pruebas nacionales con el nuevo currículo

Una de las razones centrales para el diseño de nuevos programas de Matemáticas fue el bajo nivel de capacidades matemáticas que han mostrado tener nuestros estudiantes, lo que se ha manifestado en diversos escenarios: pruebas de Bachillerato, exámenes diagnósticos en universidades públicas, y desempeño en pruebas comparativas internacionales como PISA. En estas últimas (2009+, 2012, 2015) si bien se obtuvieron puntajes promedio absolutos en la región solo superados significativamente (en términos estadísticos) por pocos países latinoamericanos, nuestros jóvenes exhibieron niveles cognitivos muy bajos en relación con todos los países que realizan esas pruebas: los costarricenses puntuaron dentro de los últimos 10 lugares.

En la introducción de los programas se consigna:

> Este currículo asume como su objetivo principal la búsqueda del fortalecimiento de mayores capacidades cognoscitivas para abordar los retos de una sociedad moderna, donde la información, el conocimiento y la demanda de mayores habilidades y capacidades mentales son invocadas con fuerza. Desarrollar este propósito supone al menos dos cosas: por un lado, que cada estudiante asuma un compromiso con la construcción de sus aprendizajes, y por el otro, que haya una acción docente crucial para generar aprendizajes en las cantidades y calidades que implica el escenario actual. Aprender a plantear y resolver problemas y especialmente usarlos en la organización de las lecciones se adopta como la estrategia central para generar esas capacidades. El desafío intelectual le es consubstancial, un nutriente para una labor de aula inteligente y motivadora. (MEP, 2012, p. 13)[36]

[36] Por eso, bien señala en el 2015 el *Quinto Informe de la Educación*: "El nuevo currículo apunta de manera directa y explícita a mejorar las competencias y capacidades matemáticas de la población, es decir, a que tenga la posibilidad de una intervención apropiada en la vida social e individual, en el escenario de una sociedad del conocimiento, que la ubique en una posición de vanguardia a nivel internacional" (p. 154).

Capacidades superiores y un paradigma distinto de pruebas nacionales

La nueva perspectiva de la preparación matemática y los elementos curriculares que se introdujeron permitirán en el mediano y largo plazo no solo aumentar las capacidades cognoscitivas superiores sino también una percepción más positiva de las Matemáticas. Todos estos elementos están mancomunados: el progreso de la competencia matemática solo será posible si se consigue a la vez apuntalar actitudes e ideas positivas sobre las Matemáticas y su enseñanza, y todo esto, si se hace bien, empujará positivamente hacia mejores niveles de desempeño escolar. Estos programas responden también a la problemática de la "matefobia" proponiendo la introducción en las lecciones de desafíos interesantes para los estudiantes, contextos reales, ejes disciplinares como el cultivo de actitudes y creencias positivas sobre las Matemáticas y su enseñanza, el uso de la historia y de las tecnologías, y una gestión de aula dinámica y participativa. Sin embargo el currículo no se diseñó y aprobó para, por ejemplo, generar promociones más altas en las pruebas de Bachillerato, o aplacar la crítica de la sociedad sobre este rendimiento constantemente bajo; la ruta para fortalecer la competencia matemática ciudadana no pasa por debilitar la demanda cognitiva de las pruebas nacionales.

En todos los niveles educativos los nuevos programas plantearon un enfoque nuevo para la enseñanza de las Matemáticas, lo que constituye un cambio sustancial en relación con el *estilo* de construcción de aprendizajes de los programas anteriores; esto de entrada afecta el tratamiento que se brinda a todos los elementos curriculares (en particular conocimientos y habilidades sobre ellos). Se trata de una audaz y vigorosa reforma educativa con perspectiva de futuro:

> … siempre se partió de lo que se supuso era posible de realizar en el país aunque ameritando un sostenido esfuerzo nacional: no se plantearon utopías pero tampoco se quiso limitar las expectativas a un mínimo paralizante y poco edificante. Y esto es importante: no es un currículo que demanda poco. Debido a las condiciones nacionales de partida el cambio curricular debía asumirse desde un inicio como una tarea de gran esfuerzo y su implementación debía siempre ser colocada en una perspectiva estratégica: invocación necesaria de varios años de trabajo. (Ruiz, 2015, p. 17)

Los frutos y resultados positivos de este currículo, aunque ya se aprecian en muchas dimensiones educativas, solo se podrán valorar de una manera definitiva dentro de muchos años. A un currículo cualitativamente diferente a los anteriores deben corresponder pruebas nacionales cualitativamente distintas, es decir: *un paradigma diferente en las pruebas de Bachillerato*.

Al igual que la gradualidad y los plazos estratégicos son características de esta implementación curricular, esas condiciones deben ser incluidas en las pruebas nacionales que correspondan a este currículo, y por eso en estas pruebas se debe pensar también en una estrategia para el corto, mediano y largo plazos. Esa estrategia no solo convoca al Ministerio de Educación Pública, responsable de diseñarlas y ejecutarlas, el llamado va más allá de sus fronteras institucionales pues esta es la principal reforma educativa que Costa Rica ha asumido y en la misma existen responsabilidades y actores en muchas dimensiones de su vida nacional.

Perspectiva general para el diseño de las pruebas nacionales de Matemáticas

Varios estudios señalan que la implementación del nuevo currículo se ha dado de una manera desigual en el país, en dependencia de múltiples factores. Hay Direcciones Regionales de Educación y circuitos educativos donde se ha avanzado mucho, pero también hay otras regionales en los que se encuentran debilidades. Programa Estado de la Nación (2015) lo consigna:

> Se presenta un desarrollo desigual de la implementación curricular en el país, aspecto en el cual la actitud y el desempeño de los asesores pedagógicos regionales están entre los principales factores. Subsiste un porcentaje de docentes tanto en primaria como en secundaria que no ha asumido el nuevo currículo.
>
> La principal razón, y en esto coinciden los profesores líderes consultados así como los asesores pedagógicos regionales, es que no ha habido suficiente interés y compromiso de su parte por asumir (conocer y aplicar) los nuevos programas.
>
> Existen debilidades en la preparación docente y en el sistema de inspección-asesoría. (p. 164)

Esto es algo normal dentro de un país de partida desigual en condiciones sociales, económicas, educativas y culturales.

Dadas las características de este currículo y su implementación desigual, durante los primeros años que se efectúen pruebas nacionales con base en el currículo vigente será necesario tener mucho cuidado y una perspectiva lúcida en la elaboración de las mismas. De manera muy general, existen al menos dos grandes vectores que pueden ayudar a guiar la construcción de las pruebas de Bachillerato en estos años:

1. El diseño de pruebas debe corresponder plenamente al currículo oficial *en todos sus elementos*.
2. Es necesaria una modulación de las pruebas para que sean congruentes con las condiciones nacionales de su implementación.

Lo primero es esencial para brindar al país el mensaje apropiado sobre la permanencia y aplicación de este currículo, un instrumento crucial para aspirar a la enseñanza de las Matemáticas que requiere nuestra ciudadanía para poder desempeñarse adecuadamente en el mundo en que vivimos. Con Nusche (2016): “Si la evaluación no corresponde al currículo y a los estándares, entonces los resultados de evaluación tienen poco valor para juzgar cuán bien los estudiantes están aprendiendo. Esto, en su momento, volverá difícil el diagnosticar y responder a las necesidades de estudiantes e instituciones educativas” (p. 842).

Diseñar pruebas nacionales que no incluyan todos los elementos fundamentales del currículo en cuanto a contenidos y enfoques sería un obstáculo muy serio para avanzar en la implementación de esta reforma de la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas. El mensaje que se debe trasmitir a la comunidad educativa y al país en estas pruebas debe ser inequívoco. No se trata solamente de una prueba que evalúa, compara o permite certificar a una colección de personas (estudiantes), sino que por el papel y status social que estas poseen brindan la referencia al sistema educativo de lo que este indica para la implementación curricular.

De alguna manera en Costa Rica durante muchos años se han realizado ajustes (“curvas”), a veces muy fuertes, para en parte preservar los índices de promoción en franjas relativamente aceptables por la colectividad; este es un tema que posee diferentes dimensiones. Pero independientemente de las promociones en un año, las características que tenga la prueba permanecen en la conciencia colectiva dentro del sistema educativo como un modelo, influenciando significativamente lo que se haga en las aulas por docentes, funcionarios y otros “nuevos” estudiantes. En mitad de una reforma educativa, donde aun se requieren muchas acciones más para asentarse de manera definitiva, la responsabilidad de ofrecer esta referencia correctamente es mucho mayor que en tiempos que no son de reforma. En este escenario juega la pertinencia de instrumentos como la tabla de especificaciones y la “ponderación” pero también la congruencia con los enfoques consignados en el currículo (generales y específicos).

Lo segundo refiere a la capacidad y flexibilidad que debe exhibir nuestro sistema educativo para modular estas pruebas dentro de una estrategia gradual y pertinente. La reforma de la Educación Matemática en Costa Rica se ha desarrollado con el propósito de lograr una competencia matemática con un nivel mayor, lo que no debe verse, sin embargo, como un llamado a aumentar artificialmente la dificultad o la exigencia de nuevas pruebas en relación con las aplicadas en años anteriores. Una demanda cognitiva excesiva podría servir de excusa para atacar al currículo y a la reforma matemática, en un escenario en el que aun existen resistencias.

De igual manera, tampoco sería pertinente diseñar pruebas con niveles muy bajos de demanda cognitiva con la finalidad de debilitar la presión social que podría generar la aplicación de un nuevo instrumento, es decir no sería conveniente “trivializar” las pruebas para obtener mejores promociones estudiantiles. Hacer esto último no solo traicionaría el espíritu del nuevo currículo sino que también distorsionaría el mensaje que necesita recibir la comunidad educativa: docentes, funcionarios, padres de familia, y estudiantes, para activamente sostener el propósito de fortalecer las capacidades cognoscitivas de la población. Un diseño apropiado entre elementos curriculares que son implacablemente requeridos y demanda cognitiva razonable constituye una operación a “corazón abierto”: el equilibrio necesario no es algo sencillo de conseguir.

En las nuevas pruebas no se trataría de hacer lo mismo que se ha demandado en el pasado. Se plantea construir otro tipo de prueba con base en otros parámetros y por medio de una estrategia distinta.

Siete elementos para diseñar las pruebas nacionales de Matemáticas

¿Cuáles serían las principales características que las pruebas nacionales de Matemáticas deberían incluir para ser congruentes con el currículo de Costa Rica?

1. *Las pruebas deberían incluir esencialmente problemas*. Es decir la realización de tareas matemáticas en situaciones o contextos claramente definidos que impliquen un cierto nivel de demanda cognitiva, cuya complejidad debe determinarse con precisión. Esto corresponde al enfoque principal del currículo que subraya precisamente la resolución de problemas como su primer eje disciplinar.

2. *Resulta central la introducción de contextos reales en las pruebas*.[37] En esencia, esto refiere a la introducción de situaciones en contextos reales (o que puedan percibirse como tal) que permitan una interacción *activa* con el estudiante mediante la identificación, uso y construcción de modelos matemáticos sencillos. Se trataría de proporcionar ítems en los cuales el estudiante pueda precisamente realizar ese tipo de acciones: identificar, usar y construir modelos. El papel y el grado de demanda de estas acciones en los ítems deben modularse apropiadamente. El número y características de los ítems que involucren contextualización en las pruebas nacionales de Bachillerato deben ser establecidos con cuidado; no deben constituir necesariamente una mayoría de los ítems de las primeras pruebas pero sí debería avanzarse en los siguientes años progresivamente hacia un ideal: *dos terceras partes de la prueba deberían usar contextos reales.* De igual manera, se debería incluir de manera apropiada los 4 contextos reales que se han propuesto en este trabajo.

3. *Las pruebas nacionales deben introducir las habilidades tomando en cuenta que las mismas participan de múltiples maneras*; una tarea matemática puede poner en juego habilidades generales

[37] Como consigna el *Quinto Informe de la Educación*: "La introducción de contextos reales en estas pruebas, por otra parte, requiere prudencia y mucho cuidado, en asociación con el enfoque del currículo y las demandas cognitivas que propone. Por eso no se trataría meramente de sustituir los ítems matemáticos puros por otros con contextualizaciones artificiales o sin que se planteen objetivos cognoscitivos y cognitivos apropiados. Hacer eso confundiría a la comunidad educativa y enviaría un mensaje equivocado de lo que significa la resolución de problemas en contextos reales" (Programa Estado de la Nación, 2015, p. 165).

o específicas de una área matemática y donde pueden existir intersecciones entre ellas. En ese sentido en un ítem pueden participar habilidades generales de una o varias áreas o habilidades específicas de una o varias áreas, en una gama amplia de posibilidades de participación. Es posible sin embargo que las habilidades que invoca un ítem correspondan esencialmente a una de las áreas, o puesto de otra manera que la tarea requiera más habilidades de una área que de otras o que solo participen habilidades de una área. Sin duda, las interrelaciones dentro de las áreas matemáticas que deba incluir un ítem deben ser cuidadosamente establecidas, y nunca de manera artificial (por ejemplo, no se debería incluir habilidades de otras áreas que no posean sentido dentro del problema o pertinencia en relación con el enfoque del área). La incorporación en las pruebas nacionales de esta característica de los ítems debe modularse dentro de la estrategia más general de implementación del currículo oficial. En esa perspectiva es posible considerar que un mismo contexto de un ítem sirva para formular una tarea matemática que requiera fundamentalmente habilidades de una área y otra tarea de otras. En esencia: la participación de las habilidades en el diseño de los ítems debería plantearse de manera muy flexible en acuerdo con el currículo costarricense.

El modelo con seis escenarios de interrelación de habilidades generales y la perspectiva sobre habilidades que dibujamos en la primera parte de este documento, podrían servir a los propósitos de fundamentar el diseño de los ítems.

4. *En muy importante tomar en cuenta que las tareas matemáticas que se planteen en las pruebas nacionales resulten congruentes también con los enfoques específicos que el currículo posee en cada área matemática*. Por ejemplo: en el área de Estadística y Probabilidad el uso de las diversas medidas que se utilizan solamente posee sentido en contextos reales y donde se introducen valoraciones y análisis de la información, el cálculo de las medidas en sí mismo no es lo importante, debe estar instrumentalizado hacia la comprensión o manipulación de la realidad. En Relaciones y Álgebra se favorece el uso de los objetos de las funciones o del Álgebra en situaciones de contexto real, es decir donde las Matemáticas usadas modelan las situaciones, no es relevante el dominio excesivo de fórmulas y procedimientos algebraicos, el enfoque favorece los aprendizajes conceptuales así como la modelización. En Geometría se favorecen también los aprendizajes conceptuales más que procedimentales, la visualización y manipulación de objetos en el plano y en el espacio con una visión dinámica y analítica de estos y de las acciones

cognitivas que se requiere realizar. Los enfoques específicos en las áreas se nutren del enfoque general de resolución de problemas con énfasis especial en contextos reales que busca potenciar la competencia matemática.

5. *Las pruebas no pueden restringirse a evaluar conocimientos y habilidades (asociadas a estos), sino que es esencial incorporar la evaluación de las capacidades cognitivas superiores transversales a las áreas.* Los programas otorgan un lugar privilegiado al desarrollo de capacidades tanto en la mediación pedagógica como en la evaluación, en particular mediante el papel que desempeñan los *procesos matemáticos*. Este tema es central pues, hasta hace poco tiempo, la evaluación en el aula y en pruebas nacionales ha estado orientada fundamentalmente a la medición de conocimientos y objetivos asociados a ellos. Valorar las capacidades es un propósito cualitativamente distinto que constituye uno de los desafíos más fuertes en la evaluación educativa nacional.

   La evaluación de las capacidades debería seguir la misma lógica curricular, no se propone hacerlo evaluando cada capacidad separada de una situación con conocimientos y habilidades (como si se pudiera colocar *in vitro para su observación y medición*). Se debe valorar capacidades por medio de tareas matemáticas (acciones a realizar, en problemas o ítems); el desempeño en las mismas permite brindar una valoración del dominio de conocimientos y habilidades así como de las capacidades involucradas.

   La construcción de los ítems resulta aquí más compleja que cuando se incluyen solamente conocimientos y habilidades. Sin duda toda tarea matemática implica una participación de capacidades superiores en alguna medida, aunque el constructor de ítems o quienes realizan la tarea no sean conscientes de ello, el asunto es que ahora en el diseño de los ítems es necesario conscientemente contemplar además de conocimientos y habilidades las capacidades que se implican en cada ítem.

   Para ayudar a consignar los niveles de participación de procesos puede resultar útil usar los modelos que se describieron en la primera parte de este documento, que incluyen una colección de indicadores de grados de los procesos. La utilización de estos modelos aportaría oportunidades para medir en el desempeño efectivo, en cada oportunidad, el grado de avance nacional o regional en estas capacidades transversales decisivas y, también, para poco a poco ir ajustando las demandas de las pruebas en búsqueda de un mejoramiento de la competencia matemática de nuestros ciudadanos.

6. *Las pruebas deberían incluir ítems con los tres niveles del complejidad que señala el currículo.* Los niveles de complejidad son apenas una guía para visualizar la demanda cognitiva de las tareas matemáticas, lo que se puede apreciar como una estrategia para la construcción de tareas matemáticas o ítems para una prueba, pero debe siempre usarse en asociación estrecha con las capacidades matemáticas superiores. Idealmente, la prueba debería avanzar hacia una proporción: 25% de ítems de reproducción, 50% de conexión y 25% de reflexión.

   Los criterios que introdujimos en la primera parte de este trabajo permiten seleccionar con mayor sustento teórico ítems con los diferentes niveles de complejidad.

7. *El formato de las pruebas de Bachillerato debería corresponder a las características del currículo y por lo tanto a la necesidad de dar cabida a otros elementos más allá de las preguntas de selección única que predominaron hasta el 2015.* Se requerirá introducir gradualmente ítems de respuesta abierta que simulen mejor la confrontación cognoscitiva con problemas matemáticos y sirvan mejor para evaluar las capacidades superiores.[38]

   Este último punto necesita una reflexión especial. La introducción del desarrollo en la prueba de Matemáticas no es un asunto trivial, requiere una estrategia que asigne objetivos de corto, mediano y largo plazo. Debería haber gradualidad aunque no tanta que se pierda el ímpetu y las ventajas que puede suponer la introducción de ítems de desarrollo. Si por ejemplo el objetivo a conseguir antes del 2021 fuera que la prueba contenga un 50% de sus ítems que no sean de selección única habría que identificar las metas que ese ideal plantearía. Por ejemplo: ¿se desea que todo ese 50% sea solamente de respuesta construida? ¿Una parte con ítems de respuesta construida, otra de respuesta corta, otra de respuesta cerrada? ¿Qué elementos (conocimientos, habilidades, capacidades) se evaluarían mediante cada una de estas modalidades de ítems? Hay elementos en los que ítems

[38] El *Quinto Informe del Estado de la Educación* lo consignó así: "Se requiere rediseñar las pruebas de bachillerato para dar cabida a ítems de desarrollo y problemas, de forma consistente con la evaluación de aula, que contengan demandas cognitivas distintas (reproducción, conexión, reflexión). Aunque los ítem de selección permiten realizar alguna evaluación de resolución de problema, se pierden muchas de las dimensiones que el currículo oficial plantea en torno a los procesos matemáticos centrales (como la comunicación matemática) y las actividades transversales esenciales para la construcción de competencia matemática y capacidades cognitivas superiores" (Programa Estado de la Nación, 2015, p. 165).

de selección pueden ser más apropiados, y otros en los que no conviene ese tipo de ítem. También se debe pensar en la pertinencia de ítems con respuestas múltiples, es decir donde sea posible marcar varias opciones. Y una vez que eso sea determinado, se debería calibrar muy bien los propósitos a obtener en cada año anterior al 2021.

El asunto es más complejo al plantearnos las preguntas: ¿cómo se realizará la corrección de las pruebas? ¿cómo se manejarán las apelaciones estudiantiles? ¿cómo asegurar la eficacia, confiabilidad y validez en todos los momentos del proceso de corrección y entrega de resultados? ¿cuáles son los pasos a seguir? ¿cuáles son las acciones en la gestión educativa, el recurso humano, y en la arena financiera que estos cambios implicarían? En el mundo hay experiencias y lecciones sobre todos estos temas. Hay modelos distintos para desarrollar estos procesos. Como país nos queda la crucial tarea de elaborar un modelo nacional con base en lo mejor que exista internacionalmente en esa dirección pero apropiado para nuestra realidad. Determinar estos asuntos desde ahora sería muy importante para que una meta tan relevante como la que visualizamos en este tema permita al MEP abordar con éxito las acciones a tomar y no tener que hacerlo bajo la presión de un tiempo reducido, lo que siempre encerraría mayor incertidumbre y posibilidad de error.

La figura siguiente busca resumir los 7 elementos que hemos identificado.

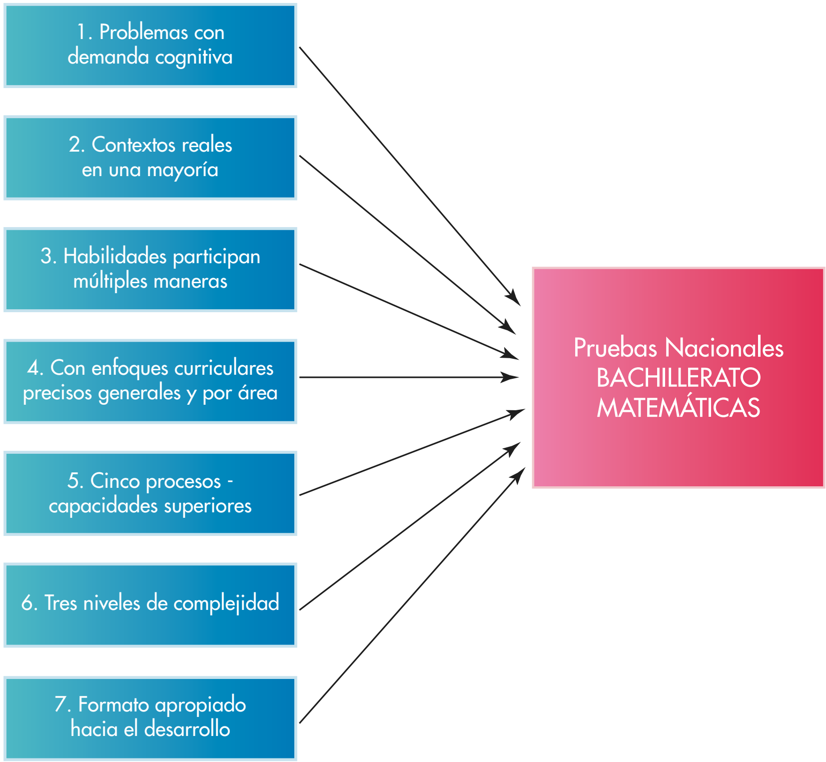


Figura 23. Siete elementos para elaborar las pruebas nacionales de Matemáticas

En síntesis, la prueba nacional del Bachillerato en coherencia con el actual currículo costarricense que asume como su constructo la competencia matemática debería incluir en su diseño, con una proporción lúcida y pertinente: resolución de problemas, contextualización activa, conocimientos, habilidades generales y específicas, procesos matemáticos y distintos niveles de complejidad, con mucha flexibilidad. La manera en que esto se diseñe debería ser cuidadosamente medida y ajustada dentro de una estrategia general para el escenario histórico en que se vive.

Pensar el futuro

El desafío que supone un currículo que enfatiza las capacidades superiores es aun mayor de lo que podría pensarse. Y resulta importante abordar todas sus consecuencias. Al igual que debe plantearse en el aula, las capacidades superiores convocan la participación de más instrumentos de evaluación que las pruebas. Por supuesto en la acción de aula es mucho más sencillo hacer eso que en procesos de naturaleza nacional que involucran de manera simultánea a poblaciones muy grandes. Sin embargo, es relevante visualizar esas implicaciones en todos los tiempos históricos, establecer lo que se deba abordar ahora, en algunos años o en varios lustros. Pensar el futuro siempre nos aporta elementos para nutrir nuestro presente.

Más allá de una prueba estandarizada

Se debe tener conciencia de que una prueba estandarizada, que incluso lograra incluir los conocimientos y habilidades, los procesos-capacidades y un formato con ítems de desarrollo, todavía tendría limitaciones para medir, por ejemplo, creatividad, pensamiento crítico, trabajo en equipo, *transdisciplinariedad*, que son capacidades que UNESCO (2003, 2014a, 2014b) plantea como esenciales para el siglo XXI. Y que están presentes en los propósitos de las naciones económicamente más avanzadas alrededor de la OCDE. Pruebas aisladas en el tiempo y el espacio (a realizar en 2 o 3 h), casi “por definición”, poseen restricciones para incorporar dimensiones genéricas de naturaleza cognitiva, actitudinal y volitiva, que integradamente forman parte de la preparación que debe aportar el sistema educativo.

Hacia el futuro será necesario pensar en un replanteo de los mecanismos de evaluación que aporten la certificación estudiantil necesaria para clausurar la educación preuniversitaria, y que este acto, cuan símbolo, permita a la colectividad contar con ciudadanos con las capacidades en todas las dimensiones para progresar individual y socialmente en el escenario histórico. Será necesario valorar para ese plazo histórico: una ampliación de los instrumentos, ir más allá de solo exámenes nacionales, e introducir mecanismos que recolecten información para la evaluación final. En los países de la OCDE en pruebas nacionales estandarizadas *que poseen implicaciones para el avance individual de los estudiantes*, predominan ítems de respuesta construida (tareas escritas de formato abierto), aunque también preguntas de selección especialmente en la evaluación de la lengua en que se recibe la instrucción educativa. Algunos otros sistemas educativos usan ítems de respuesta cerrada. Es común en varios de estos países la utilización de partes no estandarizadas que complementan las pruebas, y que suelen ser diseñadas y calificadas de una manera regional o local (Nusche, 2016, p. 843; OCDE 2013). El criterio para incluir estas partes no estandarizadas es que ese tipo de pruebas dejan por fuera determinadas habilidades, capacidades y atributos.

Hay muchas otras razones por las que siguen predominando internacionalmente pruebas de papel y lápiz y con formatos de selección o de respuesta cerrada, una de ellas es que son más baratas e implican menos elementos del sistema educativo (piénsese que la calificación de ítems de desarrollo involucra a muchas más personas, guías o rúbricas de corrección que apoyen una mayor confiabilidad, administración compleja de apelaciones, etc.). Sin duda, los costos de pruebas de respuesta construida o de instrumentos que valoren el desempeño son mucho mayores.

Hasta ahora en Costa Rica se ha considerado que la "nota de presentación" (obtenida por rendimiento estudiantil en un periodo dentro de los dos últimos años de la secundaria), incorpora elementos que la prueba misma no puede aportar sobre lo que ha sido el desempeño estudiantil, sus logros de aprendizaje. Sin embargo, esto se ha realizado de una manera bastante desigual, no es posible afirmar que esta nota haya reflejado el desarrollo en los estudiantes de elementos curriculares o capacidades superiores distintas a las que se incluyen en las pruebas. Sería pertinente pensar en la inclusión de nuevos instrumentos que sí aporten insumos complementarios para la certificación estudiantil. Por ejemplo que efectivamente reflejen desempeño y capacidades-habilidades del siglo XXI recolectadas directamente en las unidades educativas donde los estudiantes realizan su preparación escolar. Esto se podría realizar mediante orientaciones precisas e instrumentos brindados a las instituciones de educación secundaria (que sean incluidos en esa nota de presentación), o a través de medios aplicados directamente por la oficinas centrales del MEP durante periodos más extensos.

La introducción de TIC en las pruebas nacionales

Es ineludible incluir en esta perspectiva de futuro, aunque tome muchos años, la utilización de las TIC. Ya existen y cada día existirán más recursos para ofrecer por medio de computadoras, tabletas o teléfonos inteligentes situaciones educativas en las que se pueda valorar el aprendizaje y las capacidades, así como también plataformas y redes que discurren en Internet. Un ejemplo son las simulaciones de situaciones reales. ¿Cómo no pensar en la visualización en computadora de objetos sólidos o planos, representaciones gráficas de funciones, elementos estadísticos, acerca de los cuales diseñar y evaluar tareas matemáticas precisas? Y podemos pensar en situaciones o simulaciones similares en Ciencias o en Estudios Sociales o Español. Y para procesos nacionales de certificación: ¿por qué no pensar que en tiempo real en todo el país se puedan realizar pruebas con esta naturaleza en diversas salas de computo? Podría pensarse, si acaso nuestra infraestructura no fuera aún suficiente para la ejecución de una estrategia como esta, un soporte de supercomputadoras obtenido mediante convenios internacionales.

Cada vez más se usarán las TIC para realizar pruebas. Es esta una lectura de lo acontecido en las pruebas PISA de la OCDE en el 2015, donde se usaron computadoras para realizar la prueba (una circunstancia novedosa para la población estudiantil costarricense que participó). Esta realidad nos debe mover no solo a entrenar a nuestros estudiantes en esta forma de realizar pruebas para PISA, el asunto debe colocarse en una perspectiva histórica más general: el mundo se mueve hacia allí, inexorablemente.

Han sido señaladas dos estrategias sobre el uso de TIC en la evaluación: una “migratoria”, y otra “transformativa” (Binkley *et al* citados por Nusche, 2016). La primera para ofrecer a la evaluación formatos más eficaces, la segunda para “cambiar como se evalúan competencias que han sido difíciles de capturar mediante formas tradicionales de evaluación” (Nusche, 2016, p. 845). Hay avances importantes en el uso de las TIC para calificar desempeños de final abierto, medir los procesos de razonamiento en la resolución de problemas, para por ejemplo identificar usos de sintaxis y calidad de contenido. La calidad de las simulaciones se ha incrementado, incluyendo más interactividad y formatos de respuesta construida. Las funciones de las TIC se pueden usar para realizar experimentos y otras de resolución de problemas. Con medios en línea es posible pedir a los estudiantes que identifiquen información en Internet, desarrollar mapas conceptuales, o realizar acciones de manera colaborativa con otras personas (Nusche, 2016, pp. 848-849). Las pruebas PISA consideran evaluar en nuevas ediciones las capacidades de trabajo en equipo y de colaboración, que son invocadas por UNESCO (2003, 2014a). Las TIC están en el horizonte de la evaluación internacional.

OCDE (2013) concluía que en 28 países estudiados el uso de TIC en la evaluación se ha dado muy poco, y sobre todo de manera “migratoria”. Esto se explica por consideraciones acerca de la confiabilidad de ese uso en la medición de capacidades superiores; la comparabilidad es más difícil de lograr por la misma naturaleza de las capacidades superiores, que suelen desencadenarse en situaciones o entornos específicos muy cercanos a los individuos. ¿Cómo leer esto? Esto abre una oportunidad para Costa Rica, pues si internacionalmente aun no se ha progresado en esa dirección (aunque la misma esté inscrita en el horizonte) resultaría relevante asumir una postura audaz para dar pasos en un uso más intenso de TIC en la evaluación.

Para avanzar en esa dirección será necesario en primer lugar, por supuesto, no pensar que la utilización de TIC se reduce a las pruebas en gran escala. Por el contrario se trata de visualizar que nuestros estudiantes deberán trabajar con mayor intensidad usando las computadoras, teléfonos inteligentes, tabletas, internet y otros medios tecnológicos y demandarán el uso de esos elementos a nuestro sistema educativo. Y por supuesto en la evaluación que realizan los docentes y las escuelas y colegios. Esto no es algo que simplemente pueda dejarse al azar. Introducir en la acción de aula, aunque de forma pertinente e inteligente, el uso de estas tecnologías y sus diversos soportes debe ser una voluntad nacional decidida. Aquí se deberán imbricar asuntos como el ancho de banda y la infraestructura sólidas necesarias, los recursos educativos apropiados para estos aportes, y una reconsideración seria de las asignaturas y de su acción de aula.

Sería necesario diseñar un plan nacional radical y visionario para el uso de tecnologías y soportes tecnológicos en la educación (en particular en la evaluación) que incluya papeles precisos para instituciones públicas, organizaciones no gubernamentales y el sector empresarial. Un plan así podría dar significado, dirección, renovación, a entidades, departamentos y programas en diversas instituciones que en los últimos años han visto mermadas sus perspectivas y acciones efectivas.

Aunque colocados dentro de esa perspectiva integradora sobre el uso tecnológico en nuestro sistema educativo ¿por qué no comenzar desde los mismos procesos de certificación estudiantil que realiza el país? Las pruebas de Bachillerato en Costa Rica siempre han constituido un “norte” de lo que la comunidad educativa realiza en las aulas. Esto daría un vigoroso mensaje al país en su conjunto, que impactaría gestión y evaluación en todos los niveles.

A manera de conclusión

Con un nuevo currículo de Matemáticas que enfatiza capacidades superiores a partir de conocimientos y habilidades el país se colocó en una nueva perspectiva educativa, más acorde con las tendencias internacionales avanzadas. Se logró así dar un formidable paso para intentar compensar muchas décadas de atraso en la enseñanza de las Matemáticas. Aunque luego de poco más de cinco años la implementación curricular en las aulas y la reingeniería de las instituciones formadoras aun son desiguales, es crucial que se inviertan ya recursos intelectuales, humanos y materiales para avanzar en todas las diferentes dimensiones de la evaluación.

Las pruebas nacionales de Bachillerato en el 2016 no se convirtieron en una amenaza para esta reforma que aún posee enemigos en distintas entidades: la promoción estudiantil mejoró y con ello la de todo el Bachillerato. Sin duda deben reconocerse los esfuerzos que hizo el MEP para que este resultado fuera así, y debe subrayarse que por primera vez se incluyeron en las pruebas tópicos nuevos (como Estadística y Probabilidad), a pesar de las presiones para que varios de ellos no se incorporaran; y debe añadirse también la exitosa inclusión en la prueba de un 10% de ítems de respuesta cerrada. En estos resultados convergieron con sinergia diversos trabajos de varias dependencias, algo que no siempre sucede. No obstante, los resultados en el 2017 fueron peores que en el 2016 aunque no lejanos de los que se dieron en el 2015 y años previos. Estas variaciones se seguirán dando mientras avance la reforma. Y aquí conviene tener la visión más general: la experiencia internacional advierte que cambios profundos en la educación casi inevitablemente se asocian con rendimientos más bajos durante un periodo, es lo que se suele denominar "implementation dip"; si las cosas se hacen bien esos rendimientos mejorarán en el futuro y aportarán mayores competencias a los estudiantes y a la comunidad educativa. Se deberá tener la lucidez nacional para no culpar al currículo y usar esa eventual caída para dar pasos hacia atrás. Eso sería grave.

En el 2016 las pruebas PISA, aplicadas en el 2015, mostraron una caída en Matemáticas de 7 puntos en relación con el puntaje absoluto obtenido por los jóvenes costarricenses en la anterior edición (OCDE, 2016); aunque el retroceso de los puntajes fue menor que en las otras áreas (lo cual debe tomarse en cuenta). Es interesante que un análisis estadístico cuidadoso, publicitado en el 2017, en nuestro criterio aportó una visión más “equilibrada” que la que se podría trasmitir usando solo una comparación de valores absolutos. E. Montero (2017), del Programa Estado de la Nación, mediante una estandarización[39] de los resultados de 2009, 2012 y 2015 concluyó que en el 2015 no solo no se dio un retroceso en los rendimientos estudiantiles en ninguna de las tres áreas (lectura, ciencias, matemáticas) sino que en el caso de Matemáticas se dio un avance significativo en relación con los obtenidos en el 2012. ¿Por qué este avance? El factor más fuerte que podría haber pesado solo puede ser el currículo nuevo y su implementación. Todo esto se da además dentro de un escenario en que algunas macrovariables educativas negativas se han intensificado: la composición de la población docente ha evolucionado hacia una mayoría creciente de egresados de programas de formación inicial que exhiben importantes debilidades académicas (Ruiz & Barrantes, 2016), y entonces se ha deteriorado la calidad docente (pues el sistema de contratación profesional del MEP posee grandes vacíos). Es decir: a pesar del fortalecimiento de esos factores negativos, la “Cenicienta” de la educación nacional, la Matemática, ha logrado cierto progreso.

Estas pruebas comparativas internacionales permiten evaluar muchos de los puntos fuertes o débiles de la educación de un país, si se saben leer con inteligencia y espíritu crítico. Son muy útiles e instrumentales. Sea que se acepte o no el modelo propuesto por E. Montero, más allá del detalle salta a la vista lo angustiante de estos resultados: es abismal la distancia que separa los resultados de Costa Rica (y de la región latinoamericana) de los de los países de la OCDE.

El balance más sabio en todo esto debería colocarse en un territorio de perspectivas y acciones acordes con las mismas: no será algo sencillo de lograr el fortalecimiento significativo de la competencia matemática general que requiere el país. Pero no hay que congelarse. Un avance como el sugerido en las pruebas PISA puede asumirse como un paso positivo, pero resulta muy corto en relación con las leguas que el país debe caminar. En esa dirección, seguir potenciando la reforma de la enseñanza y aprendizaje

---

[39] Para lograr la estandarización requerida para realizar la comparación se incluyeron como elementos: la cobertura educativa del país en las edades de los jóvenes, y la forma de administrar la prueba (mediante computadora y no con formularios a rellenar con papel y lápiz). El aumento de la cobertura educativa tiende a debilitar los resultados generales pues significa que se incluyen en la aplicación de la prueba poblaciones con menores rendimientos; en el 2015 fue de un 63%, en el 2009 fue de un 54%. Y el uso de computadoras para suministrar las respuestas se considera tuvo un impacto negativo. Lo que se hizo fue ajustar los resultados de 2009 y 2012 a las condiciones de cobertura del 2015 y restar 10 puntos en cada ocasión a los rendimientos; el estudio se basó en investigaciones realizadas internacionalmente que cuantifican este impacto del cambio en la administración de la prueba en no menos de 10 puntos. Se usó Jerrim (2016) como base para determinar el número de puntos de ajuste.

de las Matemáticas es crucial pero, además, su ritmo debería acelerarse. Pero para ello es necesario identificar con precisión los propósitos de corto, mediano y largo plazo. Si no se formulan con claridad todos los objetivos, aunque no sean inmediatos, no será posible ver el horizonte.

Aunque en los pasados años de implementación se ha insistido en el enfoque de los cuatro momentos de la acción de aula, la resolución de problemas con énfasis en contextos reales, ejes disciplinares como el uso de historia y tecnología y cultivo de actitudes positivas, debe fortalecerse mucho la perspectiva que enfatiza capacidades superiores. No será posible robustecer la competencia matemática y de paso mejorar rendimientos en todas las escalas y medios (incluyendo las pruebas comparativas), si no se apuntalan estos vectores que están en el currículo. Y con ello asumir todas las consecuencias del desafío en la acción de aula y en todos los quehaceres educativos.

Se deben incluir los procesos-capacidades en la gestión de aula, pero difícilmente se logrará que se integren en esta si no se incluyen en la evaluación. ¿Cuál es la conclusión? La evaluación de aula y también la que se efectúa en las pruebas nacionales deben incorporar las capacidades superiores con la fuerza que propuso este currículo. Esto posee muchas implicaciones complejas, en breve: reforma de la evaluación y reforma de la elaboración de pruebas nacionales. Lo primero implica algunos ajustes en reglamentos de evaluación y en la normativa vigente, lo segundo un cambio profundo del modelo que se ha seguido por varios años. En todos los casos se requiere un cambio drástico en las perspectivas de docentes y de los funcionarios implicados, así como en varias entidades del MEP, universidades y en la comunidad que participa en la educación (incluyendo estudiantes y padres de familia). No será tarea sencilla. El propósito de este trabajo ha sido ofrecer insumos para que se avance en estas reformas.

El punto de partida de la propuesta que hemos establecido se basa en que la selección, diseño y valoración adecuadas de tareas o de problemas matemáticos se consideran centrales para la construcción y movilización de los aprendizajes, la evaluación de aula y las pruebas nacionales. Este diseño debe incluir las capacidades superiores al igual que conocimientos y habilidades. Para ir mucho más lejos de lo que podría considerarse una generalidad: se aporta en este trabajo un marco teórico que plantea en cada proceso tres grados de demanda cognitiva y se formulan 61 indicadores precisos para ayudar a identificar la participación de los procesos-capacidades. Los indicadores permiten establecer lo que se denominó *Estructura de Intervención de los Procesos en un Problema* (EIPP), que es útil para valorar las tareas matemáticas. La EIPP debe establecerse con base en las demandas cognitivas que plantea el currículo para el momento educativo específico (grado escolar, periodo, tipos de problema y demandas cognitivas, etc.). Con base en la EIPP, el modelo teórico elaborado ofrece un modelo de cinco criterios para beneficiar la identificación de los tres Niveles de Complejidad (NC) que consigna el currículo. También se ofreció otro modelo: una versión simplificada de valoración de procesos con 30 indicadores y un criterio para valorar niveles de complejidad, que podría ser instrumental para valorar ciertos problemas.

El diseño de tareas es un común denominador, sin embargo la naturaleza de las tareas es distinta, no es lo mismo construir aprendizajes que movilizarlos y aplicarlos, o realizar una evaluación formativa o una que certifica; también hay diferencia si se trata de evaluación de periodos educativos cortos o de ciclos completos o de toda la preparación escolar, en poblaciones pequeñas o masivas.

La propuesta no solo integra las capacidades superiores, sino que enfatiza y extiende un tema también vital: la integración de habilidades. Solo que aquí ya no se coloca en el marco estrecho de las áreas matemáticas, de manera compartimentalizada, sino que se propone ir más allá de esas fronteras y también visualizar las interrelaciones entre las áreas. Dentro de una perspectiva razonable y pertinente, se aporta un modelo con seis escenarios de interacción de las habilidades generales, y sobre todo una visión sobre la forma en que se relacionan todas las habilidades de este currículo.

Y en el sentido del párrafo anterior, se subraya la necesidad de construir las tareas matemáticas teniendo una actitud flexible en relación con la intervención de las habilidades: comprender que el currículo fue elaborado con habilidades que poseen diversos niveles de generalidad, que las habilidades específicas pueden asociarse a una o más áreas matemáticas, y que en un problema pueden participar habilidades generales y especificas de más de una área. La división de la malla curricular mediante áreas matemáticas que estableció el currículo no debe usarse como una camisa de fuerza para aprisionar la naturaleza de las Matemáticas cuyos objetos y métodos intervienen transversalmente en todas sus dimensiones, una naturaleza que la enseñanza escolar debe trasmitir.

Enfatizar las capacidades superiores e insistir en la interacción “intra-área” y en cierta medida la “trans-área” de habilidades obliga a volver a analizar los equilibrios entre las funciones de la evaluación (diagnóstica, formativa y sumativa), una ampliación de la batería de instrumentos de evaluación, y la integración seria de las capacidades y niveles de complejidad en los marcos reglamentarios que tiene Costa Rica. Y esto tanto en la evaluación de aula como en pruebas nacionales, guardando por supuesto las distancias y diferencias. No obstante aquí se afirma que deben modularse el largo plazo y el corto plazo para decidir las acciones. Por ejemplo, es vital avanzar para que la evaluación en la aulas y los procesos nacionales de certificación escolar se elaboren en congruencia con el currículo aprobado, es una prioridad en el momento actual. Dar pasos en este terreno fortalecerá las acciones de aula en la construcción de aprendizajes. Las pruebas nacionales brindan en realidad más que un mensaje a la población educativa: valiosos recursos mentales y educativos para la acción; mejores enfoques e instrumentos para evaluar lo que se hace en la aulas fortalecerán los otros quehaceres.

En este trabajo hemos señalado que con visión de futuro será necesario apostar mucho más a las TIC no solo en la acción de aula sino en la evaluación y en las pruebas nacionales. Es necesario dotarse de audacia y lucidez para adelantar en esos propósitos. Esto podría abrir muchas vías de acción y renovación para departamentos, instituciones y diversos investigadores educativos.

Para poder fundamentar mejor la propuesta en este documento se incursionó en asuntos teóricos más generales: teorías de aprendizaje, modelos curriculares lineales, taxonomías. Se señaló que currículos anteriores en Costa Rica estuvieron basados esencialmente en contenidos o en enfoques lineales, y en alguna medida sufrieron también una influencia conductista. En su momento algunos de esos esquemas jugaron un papel positivo en el diseño curricular nacional. Sin embargo, esas visiones debilitan la introducción de tareas matemáticas de cierta complejidad en la acción de aula y en la evaluación, y por lo tanto en el cultivo de capacidades superiores y la competencia matemática que propone el currículo. No será posible implementar eficazmente el currículo costarricense de Matemáticas sin que el país avance en el desprendimiento de algunos elementos intelectuales que nutrieron los currículos anteriores.

El diseño de tareas que se propone aquí, por otro lado, no se afirma como un accionar automático y “exacto”, pues implica personas de carne y hueso, y por eso: no siempre será posible una selección-diseño pertinente de la tarea matemática, o una valoración adecuada de las condiciones o una interpretación correcta de los elementos curriculares. Debe visualizarse como resultado de acciones individuales o colectivas que pueden ajustarse, mejorarse con base en la experiencia y la reflexión crítica. Esto apela a visualizar la evaluación y las pruebas nacionales como parte de un proceso donde son importantes las revaloraciones y reconsideraciones y donde debe existir un buen nivel de flexibilidad, en aras de que la misma constituya un verdadero instrumento al servicio del aprendizaje y del desarrollo de la competencia matemática. En particular se propuso una estrategia nacional de tres acciones-fases para avanzar en el diseño de tareas matemáticas que demanda el progreso de la Educación Matemática en el país: diseño de tareas prototipo con énfasis en los elementos curriculares esenciales, multiplicación de diseños de tareas, y validación de estas con inclusión de ejecución o implementación que implique a la comunidad educativa más amplia. La idea es poder aportar más recursos en cuanto a tareas y problemas rigurosamente construidos con base en el currículo nacional.

Todos estos elementos se integran en el marco teórico proporcionado que se pueden esquematizar por medio de la siguiente figura.

Figura 24. Marco teórico para avanzar la implementación curricular

La reforma en la elaboración de las pruebas nacionales invoca cambios significativos sobre: los instrumentos que se han usado por años (por ejemplo tabla de especificaciones), la relación entre la entidad responsable de confeccionar y ejecutar la pruebas nacionales y la comunidad educativa, los perfiles de las personas que participarían en el diseño de las pruebas, y en general todo el modelo completo para construir y validar los ítems, ejecutar y corregir las pruebas. Las experiencias y las lecciones vividas desde el 2016 así como las que emerjan de cada año que sigue, serán insumos muy valiosos para progresar cada día mucho más en la re-conceptualización y rediseño de estas pruebas y en su impacto educativo y social. Debe comprenderse, sin embargo, que el diseño y ejecución de las pruebas nacionales es un proceso histórico que durará varios años, con múltiples desafíos, donde sus características no pueden concebirse de manera estática: muchas cosas deberán modificarse con base en la evolución de las acciones realizadas.

Un detalle hacia toda la comunidad: será muy importante que el país comprenda que los resultados que se obtengan en pruebas nacionales *diseñadas significativamente en consistencia* con el currículo nacional, no serán comparables con los resultados que se obtuvieron en años anteriores; se trata de currículos diferentes y de instrumentos de evaluación distintos; por ejemplo, los porcentajes en la promoción estudiantil no deberían compararse, ya sean mejores como en el 2016, semejantes como en el 2017 o que resulten peores en otros años.

Aquí se afirma que el principal medio para mostrar mejores resultados en pruebas como las PISA es la implementación apropiada del currículo oficial de Matemáticas. Costa Rica asumió algunos elementos importantes del marco teórico de PISA: el significado de la competencia matemática, el papel edificante de las capacidades matemáticas y la participación de diversos niveles de complejidad, la transversalidad en la consideración de conceptos y procedimientos matemáticos, así como problemas esencialmente provenientes de contextos reales. Estos elementos no son exclusivos de PISA, ni tampoco el currículo costarricense los trata de la misma manera y con los mismos valores, y tampoco este currículo deja de incluir otras influencias; el currículo costarricense es una creación intelectual original. Por supuesto, no debe ser el propósito nacional crucial establecer las acciones para obtener mejores rendimientos en una prueba comparativa como PISA, sin embargo que la evaluación nacional en todas sus dimensiones sea congruente con este currículo, y apoye su implementación, potencia capacidades que PISA busca medir.

Un elemento relevante que se describe en la primera parte de esta obra es cómo el currículo de Matemáticas resulta plenamente consistente con la política curricular nacional acordada por el Consejo Superior de Educación en noviembre del 2016. Matemáticas ha constituido una experiencia curricular pionera, que en ocasiones ha suscitado temor y rechazo, pero que ahora se ve apuntalada por orientaciones que deben seguir todas las materias del sistema educativo de Costa Rica; esto robustece la reforma matemática pero también, de forma recíproca, apoya los procesos de cambio curricular que se viven en las otras asignaturas.

Uno de los precios que debe pagar una reforma tan ambiciosa, innovadora y profunda como la que se desarrolla en las Matemáticas de Costa Rica, es no poder anular ciertos niveles de incertidumbre; y por lo tanto no se pueden eliminar algunos grados de ansiedad en sus múltiples protagonistas. Siempre generarán preocupación los cambios de gobierno, pues nunca será una condición asegurada la voluntad política para apuntalar proyectos-país que trascienden los periodos gubernamentales.

El largo aliento, repetimos, a veces no se comprende en nuestras latitudes. Y además siempre cohabitamos existencialmente con el "todo cambia" que nos prescribiera Heráclito de Éfeso.

Aunque queda mucho camino por recorrer y haya todavía tantos y tantos desafíos, esta reforma ha logrado avanzar mucho, constituye en la palestra internacional un referente, y eso debería bastar para darle a su continuidad un boleto para el futuro.

Reconocimientos y agradecimientos

Este trabajo fue elaborado en el marco de las actividades del *Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica*, del Ministerio de Educación Pública de Costa Rica, Asociación Empresarial para el Desarrollo, y Fundación Costa Rica - Estados Unidos para la Cooperación.

Quiero expresar aquí mi agradecimiento a varias personas:

A Diane Briars: Expresidenta del National Council of Teachers of Mathematics de los EUA (2012-2016), por el prefacio de esta obra.

A Patrick Scott: Profesor Emérito de la University of New Mexico, expresidente de la *US National Commission on Mathematics Instruction* de los EUA, por la traducción al inglés de la introducción.

A todos los compañeros y compañeras del equipo humano de este Proyecto quienes de múltiples maneras, en reflexiones, discusiones colectivas y sugerencias diversas nutrieron muchas de las ideas que aquí se condensan.

A Hugo Barrantes y Edwin Chaves por los ejemplos y análisis suministrados y la validación del modelo simplificado.

A Johanna Mena por su validación del modelo simplificado.

A Edison de Faria por aportar un contexto.

A Luis Hernández por la sistematización preliminar de ejemplos de contextos.

A Keibel Ramírez por su revisión meticulosa de las artes finales.

A los colegas de la Dirección de Evaluación y Gestión de la Calidad del MEP, por sus insumos, y en especial a Pablo Mena.

A Marilyn Rodríguez Rodríguez por la gentil revisión filológica de una versión preliminar de la tercera parte de este trabajo.

Referencias bibliográficas

Agencia Ejecutiva en el Ámbito Educativo, Audiovisual y Cultural (Red Eurydice). (2010). Pruebas nacionales de evaluación del alumnado en Europa: objetivos, organización y utilización de los resultados. Bruselas, Bélgica: autor. Descargado de http://eacea.ec.europa.eu/education/eurydice./documents/thematic_reports/109ES.pdf

Airasian, P. W. (1994). *Classroom assessment* (2nd ed.). New York: McGraw-Hill, Inc. American Federation of Teachers. (n.d.). Teacher development and evaluation.

Anderson, L. W., Krathwhol, D. R., Airasian, P. W., Cruikshank, K. A., Mayer, R. E., Pintrich, P. R., Raths, J., & Wittrock, M. C. (2001). *A taxonomy for learning, teaching, and assessing: A revision of Bloom's taxonomy of educational objectives.* New York: Longman.

Arter, J., & McTighe, J. (2001). *Scoring rubrics in the classroom: Using performance criteria for assessing and improving student performance*. Thousand Oaks, CA: Corwin Press.

Artigue, M. (2007). Assessment in France. En A. Schoenfeld (Ed.), *Assessing Mathematical Proficiency* (Mathematical Sciences Research Institute Publications, 53), pp. 283-309. New York: Cambridge University Press.

Artigue, M. (2015). Some Reflections on ICMI Study 22. En A. Watson & M. Ohtani (Eds.), *Task Design In Mathematics Education, an ICMI study* 22. Suiza: Springer International Publishing.

Bay-Williams, J. & Kling, G. (2015). Developing Fact Fluency: Turn Off Timers, Turn Up Formative Assessments. En C. Surtamm & AR. McDuffie (Eds.), *Annual perspectives in Mathematics education: Assessment to enhance learning and teaching* (pp. 247-254). Reston, VA, USA: National Council of Teachers of Mathematics.

Black, P. (2016). The Role of Assesment in Pedagogy – and Why Validity Matters. En D. Wyse, L. Haward & J. Pandya (2016). *The SAGE Handbook of Curriculum, Pedagogy and Assessment*. Los Angeles, London, New Delhi, Singapore, Washington D:C. SAGE. (pp. 725-755).

Black, P.J. & William, D. (1998a). Assesment and Classroom Learning. *Assessment in Education*. 5(1): pp. 7.74.

Black, P.J. & William, D. (1998b). *Inside the Black Box*. London: King's College.

Bloom, B. S., (1956). *Taxonomy of educational objectives, handbook 1: The cognitive domain*. New York: David McKay Co Inc.

Bloom, B.S., Engelhart, M.D., Furst, E.J., Hill, W.H., & Krathwohl, D.R. (1956). *Taxonomy of educational objectives: The classification of educational goals handbook 1*. New York: David McKay.

Bobbitt, F (1924). *How to make a curriculum*. Boston: Houghton Mifflin.

Bobbitt, F. (1918). *The curriculum*. Boston: Houghton Mifflin.

Borba, M., Askar, P., Engelbrecht, J., Gadaninis, G., Llinares, S. & Sánchez-Aguilar, M. (2016, Junio). Blended leariining, e-learning and mobile in Mathematics education. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM Mathematics Education)*. Springer. DOI 10.1007/s11858-016-0798-4

Bransford, A. L et al. (eds.) / Committee on Developments in the Sicence of Learning and Committee on Learning and Educational Practice, Commission on Behavioral and Social Sciences and Education. (2000). *How People Learn. Brain, Mind, Experience and School*. Washington D.C: National Academy Press.

Charters, W. W. (1924). *Curriculum construction*. N.Y.: Macmillan.

Clarke, D., Emanuelsson, J., Jablonka, E. & Mok, I. (Eds.). (2006). *Making connection: Comparing Mathematics classrooms around the world.* The Netherlands: Sense Publishers.

Clarke, D., Keitel, C. & Shimizu, Y. (Eds.). (2006). *Mathematics classrooms in twelve countries: the insider's perspective.* The Netherlands: Sense Publishers.

Consejo Superior de Educación de la República de Costa Rica (2004, 12 de octubre). Acta No. 48-2004. Costa Rica: autor.

Consejo Superior de Educación de la República de Costa Rica (2016). Acta No. 64-2016 (Acuerdo 07-64-2016). Costa Rica: autor.

Constenla, J. (2007). Los enfoques actuales de la evaluación y sus implicancias en la práctica de aula. Chile: Universidad Católica de la Santísima Concepción. Descargado de http://portales.mineduc.cl/usuarios/octava/File/Los%20enfoques%20actuales%20de%20la%20evaluacion%20y%20sus%20implicancias%20en%20la%20practica%20en%20el%20aula.pdf

Cordero, G. & García Garduño, J. M. (2004). The Tylerian curriculum model and the reconceptualists. Interview with Ralph W. Tyler (1902-1994). *Revista Electrónica de Investigación Educativa, 6* (2). Descargado 18 enero 2017 de http://redie.uabc.mx/vol6no2/contenido-cordero.html

De la Torre, J., Carmona, G., Kieftenbeld, V., Tjoe, H., & Lima, C. (2016). Diagnostic Classification Models and Mathematics Education Research: Opportunities and Challenges. En A. Izsák, J. Remillard & J. Templin, J. (Eds.), *Psychometric Methods in Mathematics Education: Opportunities, Challenges, and Interdisciplinary Collaborations* (número monográfico de *Journal for Research in Mathematics Education*), p. 53-71. Reston, VA, USA: National Council of Teachers of Mathematics.

Escudero Escorza, T. (2003). Desde los tests hasta la investigación evaluativa actual. Un siglo, el XX, de intenso desarrollo de la evaluación en educación. *RELIEVE*: v. 9, n. 1, p. 11-43. Descargado de http://www.uv.es/RELIEVE/v9n1/RELIEVEv9n1_1.htm

Fennell, F., Kobbett, B. & Wray, JA. (2015). Classroom-Based Formative Assessments: Guiding Teching and Learning. En C. Surtamm & AR. McDuffie (Eds.), *Annual perspectives in Mathematics education: Assessment to enhance learning and teaching* (pp. 247-254). Reston, VA, USA: National Council of Teachers of Mathematics.

Ferster, C. B. & Skinner, B. F. (1957). *Schedules of reinforcement.* New York: Appleton-Century-Crofts.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht, The Nedherlands: Reidel

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht, The Nedherlands: Reidel

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics education: China lectures*, Dordrecht: Kluwer Academic Publ.

Fujii, T. (2015). The Critical Role of Task Design in Lesson Study. En A. Watson & M. Ohtani (Eds.), *Task Design In Mathematics Education, an ICMI study* 22. Suiza: Springer International Publishing.

Fundación Omar Dengo (2012). *Competencias del siglo XXI. Guía práctica para promover su aprendizaje y evaluación*. Proyecto ATC21s. Costa Rica: autor. Descargado de http://www.fod.ac.cr/competencias21/media/Competencias%20del%20siglo%20XXI%20-%20guia%20practica-parte3.pdf).

Gagné, R. M. (1965). *The condition of Learning*. New York: Holt, Rinehart & Winston.

Galanouli, D. & Gardner, J. (2016). Teachers' Perception of Assessment. En D. Wyse, L. Haward & J. Pandya (Eds.), *The SAGE Handbook of Curriculum, Pedagogy and Assessment* (pp. 710-724). Los Angeles, London, New Delhi, Singapore, Washington D:C. SAGE.

Glaser, R. (1976). Components of a Psicology of Instruction: Towards a Science of Design*. Review of Edjucational Research 46(1), 1-24.*

Gronlund, N. & Brookhart, S. (2004). *Gronlund's Writing Instructional Objetives* (Eight Edition). New Jersey, USA: Pearson.

Gronlund, N. E. (1998). *Assessment of student achievement* (6th ed.). Boston: Allyn Bacon.

Gronlund, N. E., & Brookhart, S. M. (2009). *Gronlund's writing instructional objectives* (8th ed.). Boston: Allyn and Bacon.

Gronlund, N. E., & Linn, R. L. (1990). *Measurement and evaluation in teaching* (6th ed.). NY: Macmillan Publishing Company.

Harlen, W. (2016). Assessment and the Curriculum. En D. Wyse, L. Haward & J. Pandya (Eds.), *The SAGE Handbook of Curriculum, Pedagogy and Assessment* (pp. 694-709). Los Angeles, London, New Delhi, Singapore, Washington D:C. SAGE.

Hino, K. (2007). Toward the problem-centered classroom: trends in mathematical problem solving in Japan. *ZDM Mathematics Education,* 39:503-514.

Hirabayashi, I. (2006). A traditional aspect of Mathematics Education in Japan. En Leung, F.K.S.; Graf, K.D. & Lopez-Real, F. (Eds.), *Mathematics Education in Different Cultural Traditions. A comparative Study of East Asia and the West. The 13th ICMI Study*. USA: Springer.

Izsák, A., Remillard, J. & Templin, J. (Eds.) (2016). *Psychometric Methods in Mathematics Education: Opportunities, Challenges, and Interdisciplinary Collaborations* (número monográfico de *Journal for Research in Mathematics Education*). Reston, VA, USA: National Council of Teachers of Mathematics.

Jerrim, J. (2016). PISA 2012: How do results for thepaper and computer tests compare? London: University of London, Institute of Educatipn, Department of Quantitative Social Science. Descargado de https://johnjerrim.files.wordpress.com/2013/07/working_paper_feb_2016.pdf

Jiménez, R. (2014). Educación pública en Costa Rica: políticas, resultados y gasto. *Análisis*. Costa Rica: Academia de Centroamérica.

Johnson, M. (1967). Definitions and Models in Curriculum Theory. *Educational Theory*, 17: 127–140. doi:10.1111/j.1741-5446.1967.tb00295.x

Kerr, J.F. (1968). The problem of curriculum reform, en J. F. Kerr (ed.), *Changing the curriculum*. London: University of London Press.

Kieran, C., Doorman, M. & Ohtani, M. (2015). Frameworks and Principles for Task Design. En A. Watson & M. Ohtani (Eds.), *Task Design In Mathematics Education, an ICMI study* 22. Suiza: Springer International Publishing.

Klenowski, V. & Carter, M. (2016). Curriculum Reform in Testing and Accountability Contexts. En D. Wyse, L. Haward & J. Pandya (Eds.), *The SAGE Handbook of Curriculum, Pedagogy and Assessment*. Los Angeles, London, New Delhi, Singapore, Washington D:C. SAGE. (pp. 791-804).

Leyva, Y. (2011). Una reseña sobre la validez de constructo de pruebas referidas a criterio. *Perfiles Educativos*. Vol. XXXIII, núm. 131, México: IISUE-UNAM http://www.iisue.unam.mx/perfiles/articulo/2011-131-una-resena-sobre-la-validez-de-constructo-de-pruebas-referidas-a-criterio.pdf

Leung, K. S. F. (2006). Mathematics Education in East Asia and the West: Does Culture matter? En F.K.S. Leung, K.D Graf & F. Lopez-Real (Eds.), *Mathematics Education in Different Cultural Traditions. A comparative Study of East Asia and the West. The 13th ICMI Study*. USA: Springer.

Martínez Ruiz, X. & Camarena Gallardo, P. (2015). (Coord.) *La educación matemática en el siglo XXI*. México: Instituto Politécnico Nacional.

Mesía, R. & Frisancho, A. (2013). Evaluación Psicométrica y evaluación edumétrica. *Investigación educativa*, Vol. 17, Nº. 31, pp. 93-108. Descargado de http://revistasinvestigacion.unmsm.edu.pe/index.php/educa/article/view/8027/7004

Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (1995a). Programa de estudios. Primer ciclo. Matemáticas. Costa Rica: autor.

Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (1995b). Programa de estudios. Segundo ciclo. Matemáticas. Costa Rica: autor.

Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (1995c). Programa de estudios. Tercer ciclo. Matemáticas. Costa Rica: autor.

Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (1996). Programa de estudios. Educación Diversificada. Matemáticas. Costa Rica: autor.

Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (2001a). Programa de estudios. Educación Diversificada. Matemáticas. Costa Rica: autor.

Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (2001b). Programa de estudios. Tercer ciclo. Matemática. Costa Rica: autor.

Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (2005a). Programa de estudios. Educación Diversificada. Matemáticas. Costa Rica: autor.

Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (2005b). Programa de estudios. Tercer ciclo. Matemáticas. Costa Rica: autor.

Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (2009). *Reglamento de Evaluación de los aprendizajes.* Costa Rica: autor.

Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (2012). *Programas de Estudio Matemáticas. Educación General Básica y Ciclo Diversificado*. Costa Rica: autor. Descargado de http://www.mep.go.cr/sites/default/files/programadeestudio/programas/matematica.pdf

Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (2015). *Educar para una nueva ciudadanía: Fundamentación de la transformación curricular costarricense.* Costa Rica: autor. Descargado de http://www.idp.mep.go.cr/sites/all/files/idp_mep_go_cr/publicaciones/7-2016_educar_para_una_nueva_ciudadaniafinal.pdf

Ministerio de Educación Pública de Costa Rica, Dirección de Gestión y Evaluación de la calidad (2010). Primer informe sobre los resultados de la prueba para los docentes de Matemática. Secundaria. Costa Rica: autor.

Ministerio de Educación Pública de Costa Rica, Dirección de Gestión y Evaluación de la calidad (2011). *Segundo Informe*: Factores asociados al rendimiento en la prueba para docentes de Matemática. Costa Rica: autor. Descargado de http://www.dgec.mep.go.cr/sites/all/files/dgec_mep_go_cr/documentos/ii_informe_prof_mate_definitivo_2012_0.pdf

Ministerio de Educación Pública, Dirección de Desarrollo Curricular (2011). *La prueba escrita.* Costa Rica: autor.

Ministerio de Educación Pública, Dirección de Desarrollo Curricular, Departamento de Evaluación de los Aprendizajes (2013a). *La evaluación diagnóstica*. Costa Rica: autor.

Ministerio de Educación Pública, Dirección de Desarrollo Curricular, Departamento de Evaluación de los Aprendizajes (2013b). *La evaluación formativa*. Costa Rica: autor.

Ministerio de Educación Pública, Dirección de Desarrollo Curricular, Departamento de Evaluación de los Aprendizajes (2015). *Respuestas a las consultas más frecuentes en el proceso de evaluación de los aprendizajes*. Costa Rica: autor.

Ministerio de Educación Pública, División de control de calidad y macroevaluación del sistema educativo (2006). Tabla de especificaciones para la prueba nacional de bachillerato. Modalidad académica. Estudios Sociales. San José, Costa Rica: autor.

Ministerio de Educación Pública, Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica (2014a). *Documento de Integración de habilidades para Segundo año de la Educación General Básica*. San José, Costa Rica: autor.

Ministerio de Educación Pública, Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica (2014b). *Documento de Integración de habilidades para Tercer año de la Educación General Básica*. San José, Costa Rica: autor.

Ministerio de Educación Pública, Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica (2014c). *Documento de Integración de habilidades para Cuarto año de la Educación General Básica*. San José, Costa Rica: autor.

Ministerio de Educación Pública, Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica (2014d). *Documento de Integración de habilidades para Quinto año de la Educación General Básica*. San José, Costa Rica: autor.

Ministerio de Educación Pública, Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica (2014e). *Documento de Integración de habilidades para Sexto año de la Educación General Básica*. San José, Costa Rica: autor.

Ministerio de Educación Pública, Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica (2014f). *Documento de Integración de habilidades para Sétimo año* de la Educación General Básica. San José, Costa Rica: autor.

Ministerio de Educación Pública, Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica (2014g). *Documento de Integración de habilidades para Octavo año de la Educación General Básica*. San José, Costa Rica: autor.

Ministerio de Educación Pública, Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica (2014h). *Documento de Integración de habilidades para Noveno año de la Educación General Básica*. San José, Costa Rica: autor.

Ministerio de Educación Pública, Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica (2014i). *Documento de Integración de habilidades para Décimo año de la Educación General Básica*. San José, Costa Rica: autor.

Ministerio de Educación Pública, Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica (2014j). *Documento de Integración de habilidades para Undécimo año de la Educación General Básica*. San José, Costa Rica: autor.

Ministerio de Educación Pública, Viceministerio Académico (2017). Circular DVM-AC-001-2017. Costa Rica: autor.

Montero, E. (2017). ¿Es “real” el descenso en los puntajes de Costa Rica en las pruebas PISA 2015? Ponencia preparada para el *Sexto Informe del Estado de la Educación*. Costa Rica: Programa Estado de la Nación.

Morales-López, Y. (2017). Costa Rica: The Preparation of Mathematics Teachers. En A. Ruiz, (Ed.), *Teacher preparation in Mathematics Education in Central*

America and the Caribbean. The cases of Colombia, Costa Rica, Dominican Republic and Venezuela. Switzerland: Springer International Publishing.

Moreno, T. (2012). Evaluación para el aprendizaje. Perspectivas internacionales. *Revista de evaluación educativa*, (1). http://revalue.mx/revista/index.php/revalue/article/view/21/14

Mullis, I.; Martin, M.; González,M. & Chrostowski, S. (Eds.) (2004). *TIMSS 2003 International Mathematics Report*. Chestnut Hill, MA: TIMSS & PIRLS International Study Center.

Musial, D., Nieminen, G. Thomas, J. & Kurke, K. (2009). *Foundations of Meaningful Educational Assessment*. New York, USA: McGraw-Hill.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2003). *Principios y estándares para la Educación Matemática* [Traducción de Manuel Fernández Reyes]. Sevilla: Sociedad Andaluza para la Educación Matemática "THALES".

National Education Association. (2010). *Teacher assessment and evaluation: The national education association's framework for transforming education systems to support effective teaching and improve student learning.* Retrieved from http://www.nea.org/assets/docs/HE/TeachrAssmntWhtPaperTransform10_2.pdf

National Research Council of the United States (NRC) (2003). *How students learn: History, math and science in the classroom.* Washington, DC: National Academy Press.

Neubrand, J. (2006). The TIMSS 1995 and 1999 Video Studies. En Leung, F.K.S.; Graf, K.D. & Lopez-Real, F. (2006) *Mathematics Education in Different Cultural Traditions. A comparative Study of East Asia and the West. The 13th ICMI Study*. USA: Springer.

Niss, M. (2003). Mathematical competencies and the learning of mathematics: The Danish KOM Project. En A. Gagatsis & S. Papastavrides (Eds.) *3rd Mediterranean Conference on Mathematical Education* (pp. 115-124). Athens: Hellenic Mathematical Society.

Niss, M. (2015). Mathematical Competencies and PISA. In K. Stacey & R. Turner (eds.), *Assessing Mathematical Literacy,* DOI 10.1007/978-3-319-10121-7_235.

Nusche, D. Student Assessment and its Relationship with Curriculum, Teaching and Learning in the Twenty-First Century. En D. Wyse, L. Haward & J. Pandya (2016). *The SAGE Handbook of Curriculum, Pedagogy and Assessment* (pp. 838-852).Los Angeles, London, New Delhi, Singapore, Washington D:C. SAGE.

Organization for Economic Co-operation and Development (OCDE) (2013). Synergies for better Learning: An International Perspective on Evaluation ans Assesment. Paris: OCDE.

Organization for Economic Co-operation and Development (OCDE) (2016). *PISA 2015 Assessment and Analytical Framework: Science, Reading, Mathematics and Financial Literacy,* Paris: PISA, OECD Publishing. Descargado de http://dx.doi.org/10.1787/9789264255425-en

Osterlind, S. J. (1998). *Constructing test items: Multiple-choice, constructed-response, performance and other formats.* Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Planas, N. (2016). (Coord.). *Avances y realidades de la educación matemática*. España: Editorial Gaó.

Popham, W.J. (1990). *Problemas y técnicas de la evaluación educativa*. Madrid, España: Anaya.

Popham, W. J. (1999, March). Why Standardized Tests Don't Measure Educational Quality? *Educational Leadership*, Volume 56, Number 6, pp. 8-15. Descargado de https://goo.gl/K812MU. Este artículo está traducido al español como *¿Por qué las pruebas estandarizadas no miden la calidad educativa?*, por Programa de Promoción de la Reforma Educativa en América Latina y el Caribe (PREAL).

Programa Estado de la Nación (2015). *Quinto informe del Estado de la Educación*. Costa Rica: autor.

Quaas, C. (1999-2000). Nuevos Enfoques en la Evaluación de los Aprendizajes. *Revista Enfoques Educacionales,* Vol. 2. No. 2. Universidad de Chile.

Reichenbach, H. (1938). *Experience and Prediction*. Chicago, USA: University of Chicago Press.

Rodríguez, C. (2008). La evaluación del aprendizaje en el contexto de los nuevos planes y programas de estudio. Chile: Educarchile. Descargado de http://www.educarchile.cl/ech/pro/app/detalle?id=139611

Rosario, H., Scott., P. & Vogeli, B. (2015). *Mathematics and Its Teaching in the Southern Americas*. London: World Scientific Publishing.

Ruiz, A. (1987, junio). Fundamentos para una nueva actitud en la enseñanza moderna de las Matemáticas Elementales. *Boletín de la Sociedade paranaense de matemática.* Vol. VIII (1), Curitiba, Brasil.

Ruiz, A. (2000). *El desafío de las Matemáticas*. Heredia, Costa Rica: EUNA. Una versión ligeramente modificada del texto impreso se puede descargar en http://www.centroedumatematica.com/wordpress/?page_id=348

Ruiz, A. (2003). *Historia y filosofía de las Matemáticas*, San José, Costa Rica: EUNED. Una versión ligeramente modificada del texto impreso se puede descargar en http://www.centroedumatematica.com/aruiz/libros/Historia%20y%20Filosofia/Secciones/Portada.htm

Ruiz, A. (2011, julio). La lección a través de estudios comparativos internacionales con videos. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, Número 8, Costa Rica.* Descargado de http://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/6950

Ruiz, A. (2013, julio). Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica. Perspectiva de la praxis. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, Número especial,* Costa Rica. Descargado de https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/issue/view/1186

Ruiz, A. (2015, abril). Balance y perspectivas de la Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*. Número 13. Costa Rica. Descargado de http://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/issue/view/1866

Ruiz, A (2016). Costa Rica: History and Perspectives on Mathematics and Mathematics Education. En H. Rosario, P. Scott & B. Vogeli, *Mathematics and Its Teaching in the Southern Americas*, World Scientific Publishing.

Ruiz, A. (Ed.). (1995). *Historia de las Matemáticas en Costa Rica. Una introducción.* San José, Costa Rica: Edit. UCR, UNA. Una versión ligeramente modificada del texto impreso se puede descargar en http://www.centroedumatematica.com/aruiz/libros/Historia%20de%20las%20matematicas%20en%20Costa%20Rica.pdf

Ruiz, A. (Ed.). (2017). *Teacher preparation in Mathematics Education in Central America and the Caribbean. The cases of Colombia, Costa Rica, Dominican Republic and Venezuela*. Switzerland: Springer International Publishing. Ver http://www.springer.com/gp/book/9783319441764

Ruiz, A. & Barrantes, H. (1995a). En la Escuela Normal y en los Colegios. En A. Ruiz, *Historia de las Matemáticas en Costa Rica. Una introducción.* San José, Costa Rica: Editoriales EUCR, EUNA. Una versión ligeramente modificada del texto impreso se puede descargar en http://www.centroedumatematica.com/aruiz/libros/Historia%20de%20las%20matematicas%20en%20Costa%20Rica.pdf

Ruiz, A. & Barrantes, H. (1995b). Los programas antes de la creación de la Universidad. En A. Ruiz, *Historia de las Matemáticas en Costa Rica. Una introducción.* San José, Costa Rica: Editoriales EUCR, EUNA. Una versión ligeramente modificada del texto impreso se puede descargar en http://www.centroedumatematica.com/aruiz/libros/Historia%20de%20las%20matematicas%20en%20Costa%20Rica.pdf

Ruiz, A. & Barrantes, H. (2016, febrero). Desafíos para la formación inicial de docentes ante los programas oficiales de matemáticas en Costa Rica.

Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática. Número 14. Costa Rica. Descargado de http://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/issue/view/2093

Ruthven, K. (2015). Taking Design to Task: A Critical Appreciation. En A. Watson & M. Ohtani (Eds.), *Task Design In Mathematics Education, an ICMI study* 22. Suiza: Springer International Publishing.

Ruthven, K., Laborde, C., Leach, J. & Tiberghien, A. (2009). Design tools in didactical research: Instrumenting the epistemological and the cognitive aspects of the design of teaching sequences. *Educational Researcher* , 38, 329-342.

Schoenfeld, A. (Ed.). (2007). *Assessing Mathematical Proficiency* (Mathematical Sciences Research Institute Publications, 53). New York: Cambridge University Press.

Scriven, M. (1967). The methodology of evaluation. En R. Tyler, R. Gagné & M. Scriven (Eds.), *Perspectives of Curriculum Evaluation* (AERA Monograph Series on Curriculum Evaluation, No. 1), pp.39-83. Chicago: Rand McNally and Company.

Scherrer, J. (2015). Learning, teaching, and assessing the standards for mathematical practice. In C. Suurtamm & A. Roth-McDuffie (Eds.), *Annual perspectives in Mathematics education: Assessment to enhance learning and teaching* (pp. 199–208). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Shimizu, Y. (2006). How Do You Conclude Today's Lesson? The Form and Functions of "Matome" in Mathematics Lessons. En D. Clarke, J. Emanuelsson, E. Jablonka & I.A.C. Mok (Eds.), *Making Connections. Comparing Mathematics Classrooms Around The World.* The Netherlands: Sense Publishers.

Shimizu, Y. (2007). What are the characteristics of Japanese Lessons Emerged by the International Comparisons? En M. Isoda, M. Stephens, Y. Ohara & T. Miyakawa, *Japanese Lesson Study in Mathematics*. Singapore: World Publishing Co.

Shimizu, Y. (2009). Characterizing exemplary Mathematics instruction in Japanese classrooms from the learner's perspective. *ZDM Mathematics Education* 41:311-318.

Silver, E. & Smith, M. (2015). Integrating Powerful Practices: Formative Assessment and Cognitively Demanding Mathematics Tasks. En C. Surtamm & AR. McDuffie (Eds.), *Annual perspectives in Mathematics education: Assessment to enhance learning and teaching* (pp. 5-14). Reston, VA, USA: National Council of Teachers of Mathematics.

Simon, H. A. (1969). *The Sciences of the Artificial.* Cambridge, Ma.: MIT Press.

Skinner, B.F. (1938). *The Behavior of Organisms: An Experimental Analysis.* Cambridge, Massachusetts: B.F. Skinner Foundation.

Soh, C. K. (2008). An Overview of Mathematics Education in Singapore. En Z. Usiskin & E. Willmore (Eds.), *Mathematics curriculum in Pacific Rim countries –China, Japan, Korea and Singapore.* USA: IAP Information Age Publishing Inc.

Stenhouse, L. (1975). *An Introduction to Curriculum Research and Development.* London: Heinemann Educational Books.

Stiggins, R. J. (2008). *An introduction to student-involved assessment for learning*. Upper Saddle River, NJ: Pearson Education.

Stigler, J. & Hiebert, J. (1999). *The teaching gap*. New York: The Free Press.

Stigler, J. & Hiebert, J. (2004). Improving Mathematics teaching. *Educational Leadership*, 6 (5), 12-17.

Suurtamm, C. & McDuffie, AR. (2015). *Assessment to Enhance Teaching and Learning* (*Annual Perspectives in Mathematics Education*). Reston, VA, USA: National Council of Teachers of Mathematics.

Suurtamm, C., Thompson, D.R., Kim, R. Y., Díaz-Moreno, L., Sayac, N., Schukajlow, S., Silver, E., Ufer, S. & Vos, P. (2016). *Assessment in Mathematics Education (Large-Scale Assessment and Classroom Assessment).* Suiza: Springer International Publishing AG. DOI 10.1007/978-3-319-32394-7.

Swan, M., & Burkhardt, H. (2012). A designer speaks: Designing assessment of performance in mathematics. *Educational Designer: Journal of the International Society for Design and Development in Education*, 2(5), 1–41. Descargado de http://www.educationaldesigner.org/ed/volume2/issue5/article19.

Taba, H. (1962). *Curriculum Development—Theory and Practice*. New York, Chicago, San Francisco, Atlanta: Harcourt, Brace & World, Inc.

Tatsuoka, C., Clements, D. H., Sarama, J., Izsák, A., Orrill, C. H., de la Torre, J., … Tatsuoka, K. K. (2016). Developing Workable Attributes for Psychometric Models Based on the Q-Matrix. En A. Izsák, J. Remillard & J. Templin, J. (Eds.), *Psychometric Methods in Mathematics Education: Opportunities, Challenges, and Interdisciplinary Collaborations* (número monográfico de *Journal for Research in Mathematics Education*), pp. 73-96. Reston, VA, USA: National Council of Teachers of Mathematics.

Thorndike, E. L. (1932). *The fundamentals of learning*. New York: Teachers College, Columbia University.

Tyler, R. W. (1949). *Basic principles of curriculum & instruction*. Reimpresión 2013. Chicago: The University of Chicago Press.

UNESCO (2003). *From the information society to knowledge societies*. Descargado de http://www.unesco.org/fileadmin/MULTIMEDIA/HQ/CI/CI/pdf/wsis_geneva_prep_background_paper.pdf

UNESCO (2014a). *Global Citizenship Education. Preparing learners for the challenges of the 21st century*. France: United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization. Descargado de http://unesdoc.unesco.org/images/0022/002277/227729E.pdf

UNESCO (2014b). *Roadmap for implementing the Global Action Programme on Education for Sustainable Development*. United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization.

Van den Heuvel-Panhuizen, M., & Becker, J. (2003). Towards a didactic model for assessment design in Mathematics education. In A. J. Bishop, M. A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & F. K. S. Leung (Eds.), *Second international handbook of Mathematics education* (pp. 686–716). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Watson, A. & Ohtani, M. (Eds.). (2015). *Task Design In Mathematics Education, an ICMI study* 22. Suiza: Springer International Publishing

Watson, J. B. (1913, March). Psychology as the behaviorist views it. *Psychological Review*, Vol 20(2), 158-177.

Wheeler D. K. (1967). *Curriculum Process*. London: University of London Press Ltd.

William, D. (2015). Assessment: A Powerful Focus for the Improvement of Mathematics Intruction. En C. Surtamm & AR. McDuffie (Eds.), *Annual perspectives in Mathematics education: Assessment to enhance learning and teaching* (pp. 247-254). Reston, VA, USA: National Council of Teachers of Mathematics.

Worthen, B.R., & Sanders, J.R. (1987). *Educational evaluation*. New York: Longman.

Worthen, B.R., Sanders, J.R., & Fitzpatrick, J.L. (2004). *Educational evaluation: Alternative approaches and practical guidelines.* (3rd ed.). Boston: Allyn & Bacon.

Wyse, D., Haward, L. & Pandya, J. (Eds.). (2016). *The SAGE Handbook of Curriculum, Pedagogy and Assessment*. Los Angeles, London, New Delhi, Singapore, Washington D.C.: SAGE.

Siglas y acrónimos

AED: Asociación Empresarial para el Desarrollo, Costa Rica.

CIAEM: Comité Interamericano de Educación Matemática.

CSE: Consejo Superior de Educación de Costa Rica.

CRUSA: Fundación Costa Rica - Estados Unidos para la Cooperación.

DDE: Dirección de Desarrollo Curricular, Ministerio de Educación Pública de Costa Rica.

DEA: Departamento de Evaluación de los Aprendizajes, Ministerio de Educación Pública de Costa Rica.

DGEC: Dirección de Gestión y Evaluación de la Calidad, Ministerio de Educación Pública.

EIPP: Estructura de Intervención de los Procesos en un Problema.

EL: Estudio de la lección, modelo importante en Japón y varios países asiáticos para el diseño de tareas matemáticas.

EUA: Estados Unidos de Norteamérica.

FOD: Fundación Omar Dengo, Costa Rica.

IACME: Inter-American Committee on Mathematics Education.

ICME: International Congress of Mathematical Education.

ICMI: International Commission on Mathematical Instruction.

ICT: Information and Communication Technologies.

IMU: International Mathematical Union.

LLECE: Laboratorio Latinoamericano de Evaluación de la Calidad de la Educación de la Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura.

MEP: Ministerio de Educación Pública de Costa Rica.

EMR: Educación Matemática Realista.

NC: Niveles de Complejidad de los problemas en el currículo costarricense de Matemáticas.

NCTM: National Council of Teachers of Mathematics de los Estados Unidos de Norteamérica.

OCDE: Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos.

OECD: Organisation for Economic Co-operation and Development.

PISA: Programme for International Student Assessment de la Organización para el Comercio y Desarrollo Económicos.

PREMCR: Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica.

TSD: Teoría de la situaciones didácticas de la escuela francesa de didáctica de las Matemáticas.

TIC: Tecnologías de la Información y Comunicación.

TV: Teoría de la Valoración.

UCR: Universidad de Costa Rica.

UNED: Universidad Estatal a Distancia, Costa Rica.

UNESCO: Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura.

UNICEF: Fondo de las Naciones Unidas para la Infancia.

Revisores de este número

Dr. Eduardo Mancera
Comité Interamericano de Educación Matemática
México

Dr. Eduardo Basurto
Comité Interamericano de Educación Matemática
México

Dr. Patrick Scott
Profesor emérito University of New México
Estados Unidos

Dr. Edwin Chaves
Centro de Investigación y Formación en Educación Matemática
Costa Rica

Licda. Johanna Mena
Universidad Estatal a Distancia
Costa Rica

CUADERNOS DE INVESTIGACIÓN Y FORMACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

EVALUACIÓN Y PRUEBAS NACIONALES PARA UN CURRÍCULO DE MATEMÁTICAS QUE ENFATIZA CAPACIDADES SUPERIORES

Assessment and National Examinations for a Mathematics Curriculum that Emphasizes Higher-order Thinking

Ángel Ruiz

CIFEMAT
CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y FORMACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica
Comité Interamericano de Educación Matemática
Red de Educación Matemática de América Central y El Caribe
www.cifemat.org

REDUMATE
Red de Educación Matemática de América Central y El Caribe
www.redumate.org

CIAEM
Comité Interamericano de Educación Matemática
Comitê Interamericano de Educação Matemática
Inter-American Committee of Mathematics Education
www.ciaem-iacme.org