¿Probar o argumentar? ¿Vencer o convencer? Reflexiones sobre las prácticas docentes[1]

Carlos Sánchez Fernández

Resumen

Hace unos 40 años se publicó en varios idiomas una versión comentada de la tesis doctoral del matemático-filósofo, Imre Lakatos "*Pruebas y Refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático"*. Treinta años antes uno de los maestros de Lakatos, George Polya, había salido a la palestra con su "*heurística educativa*", en el clásico "*Cómo plantear y resolver problemas*". Muchos, seguidores y adversarios, entendieron que la cruzada ideológica inspirada en Lakatos y Polya era contra la tradicional demostración de proposiciones y que la clase debía centrarse en la resolución de problemas dejando a un lado, como asunto secundario, el adiestramiento lógico-lingüístico. Nuestra presentación pretende provocar un debate constructivo sobre las prácticas matemáticas en las condiciones actuales y compartir experiencias sobre el recurso de la historia para atemperar la metodología de la argumentación y la prueba matemática en nuestro quehacer docente.

Palabras clave

Prueba matemática, argumentación, historia de la matemática, prácticas matemáticas, prácticas docentes.

Abstract[2]

Some 40 years ago, an annotated version of the doctoral thesis of the mathematician-philosopher, Imre Lakatos, *Proofs and Refutations: The Logic of Mathematical Discovery* was published in several languages. Thirty years earlier, one of the teachers of Lakatos, George Polya, had advanced his "educational heuristics", in the classic *How to Solve It*. Many, followers and adversaries, understood that the ideological crusade inspired by Lakatos and Polya was against the traditional proofs of propositions and that the class should focus on solving problems leaving aside, as a secondary matter, logical-linguistic training. This paper aims to provoke a constructive debate on the mathematical practices in the current conditions and share experiences on the resource of history to temper the methodology of argumentation and mathematical proof in our teaching.

Keywords

Mathematical proof, argumentation, history of mathematics, mathematical practices, teaching practices.

C. Sánchez Fernández
Facultad de Matemática y Computación, Universidad de La Habana, Cuba
csanchez@matcom.uh.cu

[1] Este trabajo corresponde a la conferencia plenaria dictada por el autor en el II CEMACYC, celebrado en Cali, Colombia, del 29 de octubre al 1 de noviembre de 2017.

[2] El resumen y las palabras clave en inglés fueron agregados por los editores.

Recibido por los editores el 20 de febrero de 2018 y aceptado el 10 de abril de 2018.

1. Nuevas prácticas matemáticas promueven nuevas prácticas docentes

Nuestro añejo interés en el tema de la argumentación y la prueba matemática se avivó cuándo conocimos el estudio que el ICMI orientó hacer a principios de siglo XXI y que se concluyó con la edición de un enjundioso texto (Hanna & Villiers, 2012). Además, habían pasado más de 40 años de la tesis de Imre Lakatos que se popularizaría en una traducción al castellano con el título de *Pruebas y refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático* (Lakatos, 1982) y consideramos que valía la pena tratar de resumir opiniones y abrir un espacio de reflexión sobre el tema de la argumentación y la prueba matemática en el ámbito caribeño y centro americano del CEMACYC.

Cuando Imre Lakatos defendió su tesis de doctorado en Londres, ya se había escrito mucho sobre la resolución de problemas y la prueba matemática. En particular quién fuera su maestro más admirado, George Polya, después de mucho rogar había conseguido que le publicasen un texto que se convertiría casi en un súper-ventas en la literatura matemática. En español se conoce por *Cómo plantear y resolver problemas* (Polya, 1974) y su primera edición en inglés fue en 1945.

Queremos destacar que la tesis de Lakatos llegó en un momento propicio para su alumbramiento y acogida. Por supuesto, hubo tanto buenas como malas interpretaciones, tantas loas como impugnaciones. Sin embargo, nadie discute que tuvo y mantiene cierta resonancia en la Meta-matemática y en particular en la Educación Matemática (EM). Entre las buenas influencias del legado de Lakatos en la EM podríamos resumir las siguientes:

- Cuestionamiento de las formas del discurso y de la tradición del actuar en la clase, promoviendo una mayor participación y protagonismo a los estudiantes.
- Un "enfoque cuasi-empírico" en su percepción de la naturaleza y el papel de la matemática, que según como se interprete puede ayudar a elaborar planes y programas más realistas, más apegados a la verdadera práctica matemática.
- Recomendó introducir y desarrollar conceptos a través de una "reconstrucción racional de la historia". La utilización de este precepto en la enseñanza facilita la presentación de los elementos teóricos y el discurso se torna menos árido al hacer referencias elaboradas de las causas y motivaciones de su origen y desarrollo.
- Estimuló la visión dialéctica del crecimiento de la matemática, como un proceso dinámico de pruebas y refutaciones y no como una acumulación de teorías deductivas. Para Lakatos y sus cómplices lo importante de las teorías es su "falibilidad", es decir que brinden la posibilidad de refutarlas en parte o totalmente: cuestionamiento, rectificación y reformulación y de nuevo cuestionamiento, en una espiral inquieta.
- Se interpreta la prueba matemática como un experimento mental: una descomposición de una conjetura original en sub-conjeturas o lemas, algunos explícitos y otros ocultos. Este enfoque promueve el énfasis en la heurística, en los valores explicativos, esclarecedores y constructivos de la prueba, en lugar de centrarse en valores de justificación y rigor.

Debemos destacar que en la obra de Lakatos no se subestima la prueba, lo que se cuestiona es cómo hacerla (Reichel, 2002). Pero muchos, seguidores y adversarios, entendieron que la cruzada ideológica inspirada en Lakatos era contra la práctica tradicional de demostración de proposiciones, por tanto, que la enseñanza debía centrarse en la resolución de problemas y dejar a un lado, como asunto secundario -o terciario- el adiestramiento lógico-lingüístico, la capacitación del educando en el arte de la argumentación y la formación de habilidades en las técnicas de la prueba matemática.

De la década de los 80's para acá ha habido cambios significativos de paradigma en las prácticas matemáticas. El planteamiento sobre la división en una matemática rigurosa pura y otra matemática teórica sintetizada con la física teórica (Joffe & Quinn, 1993), abrió una polémica en la que participó una buena parte de los más prestigiosos matemáticos (Atiyah et al, 1994). En cierta forma, algunas de las ideas de Lakatos estaban presentes o latentes en el debate, pero sin lugar a dudas la madurez matemática de los participantes implicó una trascendencia significativa en el análisis de la naturaleza del conocimiento y la práctica matemática. Valga destacar la contundente exposición del medallista Fields William Thurston, que por sus valores educativos posteriormente sería publicada en la revista *For the Learning of Mathematics* (Thurston, 1995)

Desde nuestro punto de vista, los mayores cambios en las prácticas matemáticas se han producido motivados por la revolución en las tecnologías de la información. Omnipresencia, omnipotencia y omnisciencia -antes atributos exclusivos de Dios- ahora son atribuidos a las herramientas computacionales. El experimento matemático computacional se ha hecho algo común y hasta apareció una nueva rama de actividad científica llamada "Matemática Experimental", con un centro de investigaciones en la Universidad "Simon Fraser" en Canadá desde 1992 y una revista especializada con periodicidad sostenida desde el año 2004 (una simpática introducción a la "Matemática Experimental" puede resultar Borwein & Devlin, 2009).

Quizás la consecuencia más célebre obtenida con la asistencia de las computadoras sea la solución del problema de los cuatro colores, conjetura abierta más de un siglo, que se convirtió en el teorema con un enunciado que puede comprenderse por un no matemático con la más larga prueba matemática. Se mantuvo con este récord hasta que apareció un problema con unas características similares, que usaremos como ilustración de las nuevas prácticas matemáticas. Partimos del conocimiento universal del popular teorema de Pitágoras y su recíproco:

> *Una condición necesaria y suficiente para que una terna de números* (a, b, c), $0 < a \leq b < c$, *represente la longitud de los lados de un triángulo rectángulo es que* $a^2 + b^2 = c^2$.

Es posible que este sea el resultado matemático más popular y más veces demostrado. Existen cientos de pruebas de esta proposición – en el clásico libro de Elisha Loomis de 1940 aparecen 370 demostraciones- usada por todas las culturas humanas desde la antigüedad, por cierto, mucho antes de la existencia de los pitagóricos.[3]

[3] Sobre las diversas demostraciones y algunas generalizaciones, el interesado puede ver, además del mencionado libro (Loomis, 1968), p. e. (Maor, 2007) (Sánchez & Valdés, 2010, Cap.1)

Teniendo como inspiración el teorema de Pitágoras se denomina "terna pitagórica" a un trío de números enteros positivos (a, b, c) tales que $a^2 + b^2 = c^2$ es decir, tales que representan un triángulo rectángulo. En el caso que $\text{mcd}(a, b, c) = 1$ se tienen las llamadas *ternas pitagóricas primitivas*. Con hipotenusa menor que 100 existen solo 16 ternas pitagóricas primitivas asumamos, sin perder generalidad, que $0 < a < b < c < 100$ y demos un orden por el cateto menor:

$$\begin{array}{llll}
(3,4,5) & (5,12,13) & (7,24,25) & (8,15,17) \\
(9,40,41) & (11,60,61) & (12,35,37) & (13,84,85) \\
(16,63,65) & (20,21,29) & (28,45,53) & (33,56,65) \\
(36,77,85) & (39,80,89) & (48,55,73) & (65,72,97)
\end{array}$$

¿Será posible colorear de rojo y azul los números enteros positivos menores de 100 de forma que en cada una de estas 16 ternas pitagóricas coexistan los dos colores? Observamos que en este caso la coloración es posible, aún con la exigencia adicional que los dos catetos tengan el mismo color r-rojo o a-azul:

$$\begin{array}{llll}
(3r,4r,5a) & (5a,12a,13r) & (7r,24r,25a) & (8r,15r,17a) \\
(9r,40r,41a) & (11r,60r,61a) & (12a,35a,37r) & (13r,84r,85a) \\
(16r,63r,65a) & (20r,21r,29a) & (28r,45r,53a) & (33r,56r,65a) \\
(36r,77r,85a) & (39r,80r,89a) & (48r,55r,73a) & (65a,72a,97r)
\end{array}$$

Por supuesto, también se pueden colorear de forma que un cateto y la hipotenusa ostenten el mismo color. En todo caso se deben considerar las restricciones del problema, porque hay repeticiones de números que reducen las opciones, pero aumentan las dificultades del razonamiento combinatorio, por ejemplo, 5 es hipotenusa en (3,4,5) y cateto en (5,12,13), en esta última terna 13 es hipotenusa, mientras que es cateto en (13,84,85) –por otra parte, se prueba que no existen ternas pitagóricas en las que la hipotenusa y un cateto sean los catetos de otra terna pitagórica–. Estas restricciones y la cantidad infinita de ternas pitagóricas nos hacen intuir la dificultad del problema más general:

PROBLEMA: *Determinar si es posible o no, pintar con dos colores todos los números enteros positivos de forma tal que todas las ternas pitagóricas primitivas posibles tengan números de ambos colores.*

En 1980 se prometió un premio a quién resolviera este problema y después de 46 años de arduo bregar con la asistencia de súper-computadoras como la del *Texas Advanced Computer Centre*, este problema se resolvió en mayo 2016 y ahora podemos enunciar:

Teorema C– *El conjunto* $\{1, 2, \ldots, 7824\}$ *puede ser coloreado con 2 colores de forma que no exista terna pitagórica de un solo color, pero si agregamos el número 7825, entonces es imposible discriminar con solo dos colores.*

Lo interesante es que el tamaño de su prueba computacional alcanzó más de 200 Tb, que después se logró comprimir a unos 68 Gb. –para estimar este volumen de datos, consideremos que toda la información de la versión de Wikipedia en inglés, recopilada hasta el 2010, es un material de menos de 60 Gb–. El artículo con la prueba ganó el premio al mejor artículo del año, pero ¿cómo los árbitros verificaron la veracidad del Teorema C? y ¿sabe alguien por qué es posible hasta 7824 y si agregamos 7825 no?

Todavía la Matemática Experimental no se ha desarrollado suficientemente para dar una respuesta plausible a esta última cuestión y no queda otro recurso que continuar perfeccionando nuestro adiestramiento humano lógico-lingüístico para ampliar nuestro entendimiento de situaciones semejantes.

2. ¿Cómo hacer más efectivo el adiestramiento lógico-lingüístico en nuestra práctica docente?

La escuela tiene que priorizar y garantizar que los alumnos adquieran gradual y sistemáticamente una formación matemática consecuente con los cambios operados en la práctica matemática, que incumben no solo a los que se dedicarán a las ciencias matemáticas, sino a todas las profesiones y oficios. No se trata simplemente de realizar cálculos, de resolver ecuaciones y de aplicar aquí o allá algún algoritmo aprendido en las clases. Por supuesto que tales habilidades tenemos que ayudar a desarrollarlas, pero según nuestra opinión, actualmente la prioridad radica en los esfuerzos solidarios de todos los integrantes del colectivo pedagógico para que los alumnos, con creciente independencia y creatividad, aprendan a razonar lógicamente, desarrollen estrategias de aprendizaje y de esta manera se capaciten también para comprender matemática, y se habitúen a buscar de manera heurística soluciones eficaces a los problemas de su profesión u oficio.

Para alcanzar el cumplimiento de los objetivos de la formación matemática, en términos de lo que los alumnos deben ser capaces de lograr por medio de las diferentes asignaturas y al máximo nivel posible por cada uno de los educandos, se requiere de una labor coordinada de las diferentes asignaturas, que tenga en cuenta el diagnóstico integral de los alumnos y su contexto. Uno de los medios primordiales para desarrollar el pensamiento creativo es la comprensión y realización de la argumentación matemática para explicar, convencer y no solo para justificar la veracidad de las proposiciones.

Según las indicaciones metodológicas vigentes en Cuba (Álvarez et al. 2014, p. 179-180) en lo que respecta a la argumentación matemática se plantea:

> *Los maestros y profesores, incluso, de aquellas asignaturas que requieren menos del empleo de métodos matemáticos, contribuirán a la consecución de los objetivos de la formación matemática, en la medida en que con criterios avalados en el colectivo correspondiente:*
>
> *a) Enfrenten cada una de sus clases haciendo énfasis en la formación y desarrollo de operaciones mentales y procedimientos lógicos como generalizar, concretar, comparar, abstraerse, clasificar, limitar, definir, fundamentar, conjeturar e inferir, entre otros.*
>
> *b) Conduzcan a sus alumnos a la aplicación consciente de la inducción y la deducción, de métodos y medios para estudiar de manera más eficiente y racionalizar su trabajo mental, y de recursos heurísticos que inspiran la búsqueda de vías de solución.*
>
> *c) Revelen aspectos del origen y desarrollo histórico de la matemática, su entrelazamiento con los elementos de la cultura en diferentes momentos del desenvolvimiento de la sociedad, utilicen su lenguaje simbólico, y muestren sus potencialidades para resolver problemas.*

Esta orientación metodológica, sin duda, representa un paso positivo y si se cumple favorecerá un avance significativo en la educación general, pero en las condiciones actuales, para elevar con solidez la cultura matemática, en nuestra opinión, es insuficiente. La experiencia y las reflexiones de muchos especialistas en el tema de la argumentación y la prueba matemáticas (p. e. Boero, 2007; Hanna & Villiers, 2012; Rav 1999) nos hace pensar que en la práctica docente el uso de la argumentación y la prueba matemáticas debe atemperarse tomando en consideración los contextos concretos. Asumimos que existen diferentes "matices" que van desde una argumentación informal a una prueba formal, es decir, desde una simple explicación plausible hasta una justificación con todo el rigor lógico. Con el objetivo de ayudar a la reflexión sobre el uso de la demostración en clase en los diferentes niveles de enseñanza en la tabla 1 exponemos algunas características usualmente atribuidas a esas dos manifestaciones extremas de la demostración matemática:

Tabla 1
Comparación de características usualmente atribuidas a la demostración matemática

	Prueba Formal	...	Argumentación informal
Generalmente	Deductiva		Inductiva
Basada en	Lógica matemática		Intuición matemática
Producto de la	Razón		Experiencia
En búsqueda de	Rigor		Evidencia
Vinculada al	Contexto de justificación		Contexto de creación
Forma docente	Exposición del profesor		Elaboración conjunta
Resultado	Infalible		Plausible
Uso como	Normativa		Motivación
Objetivo	Vencer		Con-vencer

Desarrollemos un ejemplo con una muestra de algunos de los matices que estimamos apropiados de argumentación-prueba matemática. Se trata de una situación de interés tanto para las clases de matemática en diferentes niveles dada la necesidad universal del dominio de las representaciones de números racionales.

Ejemplo: Pensemos en una clase concreta del tema números racionales y sus representaciones. Tomemos números con diferentes representaciones, una como fracción alícuota y otra decimal: $a = \frac{1}{10}$; $b = 0,0999\ldots$[4] y comparemos; puede ocurrir una y solo una de las tres posibilidades siguientes:

$$A : a < b; \quad B : a = b; \quad C : a > b$$

Nadie toma la opción A, pero los participantes se dividen al asumir unos que la respuesta es B y otros que es C. Los de un grupo deben argumentar la selección para poder convencer a los restantes que su decisión es la correcta. No se obtiene consenso.

Entonces el maestro muestra otras dos representaciones numéricas semejantes:

$\alpha = \frac{1}{30}$ y $\beta = 0,0333\ldots$ con infinitas cifras decimales iguales a 3 a partir de la tercera.

Vuelve a preguntar ¿cuál es mayor α o β?

[4] Los puntos suspensivos representan la repetición infinita de cifras 9.

Ahora todos están de acuerdo que ambas representaciones son iguales, porque llegamos a β efectuando la división ordinaria en α. El maestro llama la atención en cierta similitud con las representaciones anteriores de a y b. Casi siempre aparece alguien que reconoce una relación: si la segunda es multiplicada por 3 se obtiene la primera y recíprocamente, si dividimos la primera por 3 obtenemos la segunda. ¡Ahora sí que vencimos repiten al unísono los seguidores de la respuesta B! Pero los partidarios de la respuesta C muestran cara de fracaso y desconcierto ¿se ha logrado que todos se convenzan de la equivalencia matemática de las dos representaciones decimales?

Procuremos otra argumentación de carácter algebraico:

Sea $x = 0,0999\ldots$, por la definición de representación decimal:

$10x = 0,999\ldots = 0,9 + 0,0999\ldots = 0,9 + x$

Por tanto, $9x = 0,9$. Si dividimos por 9, obtenemos

$$x = \frac{0,9}{9} = \frac{1}{10}$$

Una prueba semejante –exactamente, que 10=9,999…– aparece en el "*Algebra*" publicada por Euler en 1770 (ver su reimpresión en inglés Euler, 1984, pág. 170). Este proceder de Euler, así como otros de su cosecha, ha sido muy criticado por "falta de rigor", porque se manipula algebraicamente con "…" como si fuera un número y porque "…" representa un "infinito virtual", asunto más del análisis que del álgebra[5].

Tratando de satisfacer a estos alumnos más exigentes podemos presentar una argumentación más analítica:

Denotemos por la aproximación del número que se obtiene al considerar solo las n primeras cifras decimales:

$$S_n = \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \cdots + \frac{9}{10^n}.$$

Encontramos que:

$$\frac{1}{10}S_n = \frac{9}{10^3} + \frac{9}{10^4} + \cdots + \frac{9}{10^n} + \frac{9}{10^{n+1}} = S_{n+1} - \frac{9}{10^2} = S_n + \frac{9}{10^{n+1}} - \frac{9}{10^2},$$

de donde

$$\frac{9}{10}S_n = \frac{9}{10^2} - \frac{9}{10^{n+1}},$$

por tanto,

$$S_n = \frac{1}{10} - \frac{1}{10^n}$$

Así, cuando se suma solo un número finito de términos $\frac{9}{10^k}$, $2 \leq k \leq n$, se consigue una cantidad menor que $\frac{1}{10}$, y mientras más sumandos tomamos, la cantidad se aproxima

[5] Para eliminar la ambigüedad en la representación decimal de algunos racionales muchos matemáticos consideran "admisible" solo la representación que no tiene la cifra 9 repetida a partir de cierto índice. Por este convenio para la fracción 1/10 la única representación decimal admisible es 0,1

más a $\frac{1}{10}$, el error de estimación es del orden de $\frac{1}{10^n}$ lo que concuerda completamente con la idea intuitiva. Por tanto, es natural aceptar como "valor plausible" de la *suma con infinitos sumandos* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{10^{n+1}}$ al número $\frac{1}{10}$, argumento analítico que "valida" nuestra afirmación.

El uso de las "sumas con infinitos sumandos" para resolver diferentes tipos de problemas tiene una larga historia repleta de discrepancias y falsas creencias. Esto nos hace pensar que, es probable que la falta de comprensión de nuestros alumnos provenga de la costumbre de operar solo con un número finito de cifras. Los cálculos anteriores argumentan que, en tal caso, por muchas cifras 9 que tomemos en consideración, ese número así representado será estrictamente menor que $\frac{1}{10}$. Pero, además –y aquí está el detalle– entre $\frac{1}{10}$ y 0,0999... no existe otro número real: $\frac{1}{10}$ es el *valor supremo* de las crecientes y acotadas sucesiones de sumas parciales.

Por tanto, aquí encontramos otra idea para argumentar la igualdad de las dos representaciones: a través del concepto *supremo de un conjunto de números reales.* Por mucho tiempo fue usado el hecho de que todo conjunto no vacío de números reales acotado superiormente posee un supremo –que es único–, es decir, en el conjunto de cotas superiores existe una única menor que cualquier otra cota superior. Cuándo en el siglo XIX se probó esta "evidencia" se nos brindaba otra manera de argumentar la validez de afirmaciones sobre conjuntos de infinitos números reales. En efecto, el conjunto de los números reales siguiente;

$$\{0,09;\ 0,099;\ 0,0999;\ \ldots\}$$

tiene a cualquier número entero positivo como cota superior, por tanto, tiene supremo. Ahora -como este supremo es único- solo queda probar de alguna forma plausible que es precisamente el racional $\frac{1}{10}$:

$$\sup\{0,09;\ 0,099;\ 0,0999;\ \ldots\} = \sup\left\{\frac{1}{10} - \frac{1}{10^2},\ \frac{1}{10} - \frac{1}{10^3},\ \frac{1}{10} - \frac{1}{10^4},\ \ldots\right\} = \frac{1}{10}.$$

Demostrar esta afirmación –para algunos evidente– implica el conocimiento de la forma en que se puede trabajar con los números reales sin perder la confianza en la validez de los resultados. A comienzos del siglo XX apareció una axiomatización de los números reales y la asunción formal –como axioma incuestionable– que todo conjunto acotado superiormente de números reales tiene un único supremo. Este logro "formalista" ofreció la "tranquilidad espiritual" a los colegas rigoristas más exigentes, pero en la práctica esto no es suficiente, sigue siendo imprescindible determinar ese único supremo. Para nosotros que debemos enfrentar en el aula a un grupo de jóvenes inconformes y poco motivados hacia el formalismo lógico -que los aburre sin remedio- ¿cuál será la manera más adecuada?

En nuestra opinión, para encontrar diferentes argumentaciones plausibles, y modos de presentar estas en un aula, además del conocimiento del grupo de alumnos, los contenidos y las prácticas matemáticas correspondientes, *nos deberíamos auxiliar de la historia de la matemática.* Aquel que sabe dónde buscar y no teme a perderse en los laberintos de la historia de la matemática, puede acudir a unas fuentes inagotables que sirven no solo para motivar y dinamizar la clase, sino también para lograr un adiestramiento lógico más vigoroso.

3. El recurso de la historia en la argumentación matemática[6]

Nuestra propuesta es simple: siempre que necesitemos hacer una demostración en el aula, recapitulemos un poco sobre su historia. La prueba no se realiza en un vacío atemporal, por tanto, nosotros podemos recrear ese contexto histórico en el aula, hacer "una reconstrucción racional" en la complicidad maestro-alumnos, para simular que descubrimos la idea y su efecto, con el asombro y la emoción de la primera vez.

Pero, ¡atención! no se trata de reproducir los detalles históricos, hacer un cuento minucioso y seguir con la forma tradicional de la demostración deductiva; si lo hiciéramos de tal forma, en lugar de propiciar la inteligibilidad del asunto, complicamos la situación didáctica: hemos añadido un valor que significa algo más para aprehender. El maestro competente realiza a priori un análisis de los momentos principales del desarrollo histórico de las pruebas conocidas, realiza la *transposición didáctica* y determina lo que expondrá en el aula. De forma tal que *lo histórico, lo lógico y lo didáctico* del asunto de la clase quede integrado en una sinergia constructiva y que todos los participantes (maestro y alumnos) se sientan constructores de un conocimiento nuevo y útil. *En las condiciones actuales necesitamos esta excitación intelectual para trasmitir el placer creativo de probar un teorema, tan apasionante como resolver un problema difícil que otros no han conseguido.*

Los teoremas son como los titulares en los periódicos, mientras que en las pruebas está plasmada toda la intriga de los acontecimientos. Muchas veces la organización docente no nos permite más que trasmitir los titulares y dar una noción vaga del suceso, frecuentemente nuestra falta de cultura matemática nos limita usar motivaciones históricas. Al privar al estudiante de una argumentación bien sustentada en la historia, sea cuál sea la razón, muchas veces propiciamos el aburrimiento, el deseo de desconectar de la clase. Con frecuencia lo abandonamos en una jungla de incomprensión y contradicciones, con un único camino factible que conduce a la deserción –como no dimos el *suspenso* necesario al discurso, nos vemos obligados a usar el *suspenso* en la evaluación-. Es como si en la clase de literatura tuviéramos el tema de "Cien años de soledad", dijésemos que es la más famosa obra del Premio Nobel García Márquez, y solo agregáramos que narra la saga de una familia, fundadora de un pueblo perdido en las entrañas de Colombia. ¿Dónde está la motivación para leer la obra? ¿cómo encontramos el *realismo mágico* que transpira toda la obra? ¿cuáles son los valores agregados por el Gabo a la historia de esta peculiar familia colombiana que atrapan la atención de cualquier lector, en cualquier latitud?

El enunciado del teorema nos señala hacia dónde debemos mirar, la prueba nos enseña qué y por qué debemos mirar hacia ahí. Precisamente la palabra griega correspondiente a teorema es un verbo que significa "mirar hacia". En todas las culturas, incluyendo la helena clásica la prueba visual está presente. Pero para los helenos en algún momento del apogeo de su cultura, la prueba visual comenzó a considerarse insuficiente y se valoró más una argumentación o una cadena de argumentos plausibles, estructurados

[6]En la elaboración de esta parte final y conclusiva, además de nuestras propias reflexiones anteriores, actualizadas y resumidas en (Sánchez, 2016, Sánchez, 2013 y Sánchez & Valdés, 2016), nos sirvió de soporte el excelente artículo (Grabiner, 2012), dónde se pueden encontrar diversas razones para entreverar con historia la clase de matemática.

como una prueba rigurosa, concisa y precisa. Así es que los helenos introdujeron la lógica para razonar sobre cosas que superan la experiencia y la intuición, cosas no visibles para los ojos, ni procesables solo con el sentido común, sino observables y comprensibles con los "ojos de una mente" clara y adiestrada. Las razones de los helenos clásicos de usar la argumentación lógica son tan vigentes hoy como antes. Solo que ahora conocemos muchas más formas de argumentar, entre otras, a través del atractivo experimento computacional.

Muchos son los teoremas que pueden servir para mostrar el papel de la historia en el adiestramiento lógico, en el hallazgo y presentación de diferentes argumentaciones plausibles de una misma proposición. Tomemos como ejemplo otro de los famosos teoremas atribuido a Euclides y del que se conocen varias pruebas (ver p. e. Dawson, 2015; Cap. 7):

Teorema "*Existen infinitos números primos*"

Normalmente se hace la prueba siguiente:

Supongamos existe solo una cantidad finita de números primos y demos un orden natural: $P = \{2, 3, 5, 7, \ldots, p_n\}$. Con todos los primos construimos un número mayor

$$N = (2 \times 3 \times 5 \times 7 \times \ldots \times p_n) + 1,$$

de donde:

$$N - 1 = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times \ldots \times p_n$$

Se infiere que cada número primo p_k divide a $N - 1$, luego, ningún p_k divide a N. Por tanto, N es un número primo mayor que p_n, lo que es un absurdo!

Esta prueba aparentemente simple y elegante, tiene un razonamiento por reducción al absurdo que no es fácil de comprender en un nivel secundario y aún en el nivel terciario no todos los alumnos la comprenden rápidamente. Se supone que fue Euclides en sus *Elementos* quién dio esta prueba. Acudimos a la fuente original para ganar argumentos y hacer más asequible la prueba.

En primer lugar observamos que el enunciado del correspondiente teorema IX.20 en los "Elementos" de Euclides es algo diferente:

IX.20 *Los números primos son más que cualquier multitud dada de números primos*

En el enunciado no se menciona la infinitud actual del conjunto de números primos. Analicemos la propia demostración de Euclides:

- Sea $\{A, B, C\}$ una multitud cualquiera de números primos
- Sea ED el mínimo número que A, B y C miden. Sea la unidad DF adicionada a ED. Entonces EF es primo o compuesto
- **1º Sea** EF **primo**, entonces los números $\{A, B, C, EF\}$ son una multitud mayor que $\{A, B, C\}$.
- **2º Sea** EF **compuesto**, entonces es medido por algún número primo (VII.31). Sea G el número primo que mide a EF. Digo que G no es igual a ninguno de los números A, B o C.

- **Supongo que G mide a uno entre A, B o C.** A, B, C miden DE, entonces G mide DE por carácter transitivo. Pero, siendo G un número primo debe medir al resto DF, que es la unidad: ¡esto es absurdo!
- **Por consiguiente, el número primo G no es igual a ninguno de los números A, B, C.** Luego se halló una multitud $\{A, B, C, G\}$ mayor que la multitud dada. **LQQD**

Por supuesto, encontramos obsoletos algunos argumentos de Euclides, que sin duda hacen a su prueba más enrevesada que la prueba moderna, por tanto, el profesor tomando en cuenta el nivel de sus alumnos, debe provocar la actualización para aligerar la prueba de Euclides:

- Ante todo se debe aclarar que la prueba de Euclides parece particular porque el conjunto de números primos inicial es de solo tres elementos, pero tiene un valor general: lo que Euclides argumenta es que un razonamiento similar se puede usar en conjuntos de cualquier cantidad de elementos $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$.
- Por otra parte, hoy no es necesario usar que todo número está íntimamente asociado a una medida (longitud en este caso) como se hacía entonces, esto aligera mucho el razonamiento que aparece en la prueba de Euclides, p.e el mínimo número que A, B y C miden, es $M = \text{mcm}\,(A, B, C) = A \times B \times C$ (*Elementos*, IX.14). En el caso genérico:
$$M = p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_n.$$
- Se puede enfatizar la alternativa usada entre número primo o compuesto y no usar la reducción al absurdo. Aunque Euclides realmente plantea una reducción al absurdo, esta parte se puede obviar con el razonamiento siguiente: si $N = M + 1$ es compuesto, entonces N es divisible por un primo G que no es igual a ninguno de los primos dados p_k, ya que al dividir N por cada uno de los p_k el resto es uno.
- En la prueba moderna se parte de la hipótesis de finitud y se construye un primo nuevo mayor N, este razonamiento puede estimular la creencia en que siempre $N = \text{mcm}\,\{p_1, p_2, \ldots, p_n\} + 1$ es primo. Basta tomar $P = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$, entonces el número $N = 30\,031 = 59 \times 509$ es compuesto y $G = 59$ es un primo que no está en P.
- Esta idea nos sirve para encauzar una tarea exploratoria de carácter computacional: Verificar con diferentes conjuntos de números primos si el producto M de todos sus elementos sumado a 1, $N = M + 1$, es un nuevo número primo. En tal caso, se puede definir el *primorial* de p como el producto de todos los primos menores o iguales a p sumado a la unidad: $p\# = p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_n + 1$. Se puede orientar una investigación computacional para caracterizar los primoriales primos, es decir, aquellos p para los cuales $p\#$ es un número primo. Después de una jornada de experimentación computacional –en la que seguro no se habrán encontrado muchos primoriales primos– se puede referir que la existencia de infinitos primoriales primos es una conjetura abierta, ni demostrada ni refutada. Lo interesante es que esta conjetura fue motivada por la prueba del teorema de Euclides.

En definitiva, el maestro presenta la situación-problema con más o menos detalles en dependencia del conocimiento que tiene del grupo y de las dos pruebas en cuestión, orienta la exploración computacional dando mayor o menor tiempo para elaborar conjeturas, propone posibles variantes para la reconstrucción de la prueba y en elaboración conjunta se produce una nueva prueba más ligera, clara y precisa que la de Euclides.

La prueba moderna –aparentemente popularizada por el alemán Eduard Kummer en sus cursos de la universidad de Berlín a mediados del siglo XIX– tiene sus virtudes, por ejemplo permite demostrar con mayor facilidad otros resultados similares, tales como que hay infinitos primos tanto de la forma $4n+1$ como $4n+3$ (idea que nos podría servir para trabajar con alumnos aventajados).

Si el profesor tiene un grupo de jóvenes aplicados conocedores del cálculo infinitesimal y le interesa mostrar como en la matemática lo discreto y lo continuo están dialécticamente relacionados, pudiera buscar la sofisticada demostración hecha por Euler en su famosa obra *Introducción al análisis de los infinitos* (1748) –traducida al castellano en (Euler, 2001)–, basándose en la divergencia de la serie de los inversos de todos los números primos, es decir, usando que:

Para todo número positivo K, se encuentra un N-primo (dependiente de K), tal que:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\cdots+\frac{1}{N}=\sum_{p-\text{primo}}^{N}\frac{1}{p}>K$$

Esta argumentación analítica es considerada una de las pruebas matemáticas más bellas de la historia. (En el capítulo 1 de Aigner & Ziegler, 2005, aparecen 6 demostraciones diferentes de la infinitud de los número primos y en particular, la prueba de Euler en la pag. 4)

El conocimiento de las diversas pruebas que se han sucedido en la historia aprovisiona nuestra cultura matemática sobre el teorema correspondiente. En el contundente texto antes citado de J. W. Dawson (2015) encontramos razones para buscar diferentes demostraciones de una misma proposición y las resumimos aquí:

- *Remediar lagunas o deficiencias*
- *Demostrar potencia de diferentes metodologías*
- *Extender rango de validez de un resultado*
- *Emplear razonamientos más simples o cortos*
- *Alcanzar "pureza" metodológica*
- *Descubrir un nuevo camino*

Uno de los mensajes que queremos compartir nos parece simple y claro: *No podemos conformarnos solo con "los titulares" de las novedades matemáticas, sino también tenemos que ver la intriga que se esconde en los vericuetos de su historia.* En definitiva, sumergirnos en los laberintos de la historia y familiarizarnos con las causas y razones por las que surgió cada una de las pruebas, favorece nuestra cultura matemática. Además, con la elaboración conjunta de la prueba, rastreando una de las tantas reconstrucciones racionales de su historia, seguro que aumentamos la efectividad del adiestramiento lógico-linguistico.

Por supuesto, no todos los temas de clase tienen características apropiadas para la presentación de proposiciones con varias demostraciones. Tenemos que buscar los temas fértiles para la ampliación de la cultura matemática y presentarlos como situaciones-problema. Orientar experimentos computacionales que produzcan conjeturas seductoras con diferentes tipos de demostraciones. Entonces, en dependencia del nivel de enseñanza y las características del grupo de alumnos, podemos estimular la argumentación en sus graduaciones, tanto informales como formales, procurando convencer, nunca rendir, ni frustrar. Para estos objetivos, el recurso didáctico de la historia es un capital inagotable, presto a ser "saqueado", en cualquier momento.

Referencias y bibliografía

Aigner, M. & Ziegler, G. M. (2005). *El Libro de las Demostraciones*. Madrid: Nivola.

Álvarez, M., et al. (2014). *El proceso de enseñanza -aprendizaje de la asignatura Matemática. Documentos metodológicos*. La Habana: Ed. Pueblo y Educación.

Atiyah, M., et al. (1994). Responses to "Theoretical Mathematics". *Bulletin A. M. S.* 30 (2), 178-207.

Boero, P. (Ed. 2007). *Theorems in School. From History, Epistemology and Cognition to Classroom Practices*. Rotterdam: Sense Publishers.

Borwein, J. & Devlin, K. (2008*).The Computer as a Crucible: An introduction to experimental mathematics.* Massachusetts. Wellesley, MA: Ed. A. K. Peters.

Dawson, J. W. (2015). *Why Prove It Again? Alternative Proofs in Mathematical Practice*. Dordrecht: Birkhauser.

Euler, L. (1984). *Elements of Algebra*. Berlin: Springer..

Euler, L. (2001). *Introducción al análisis de los infinitos*. Edición de Antonio J. Durán. Sevilla: THALES,

Grabiner, J. V. (2012). Why proof? A Historian's Perspective. En Hanna & Villiers. *Proof and Proving in Mathematics Education.* (pp. 147-167). Dordrecht: Springer.

Hanna, G. & Villiers, M. de (2012). *Proof and Proving in Mathematics Education. The 19th. ICMI Study*. New York: Springer.

Joffe, A. & Quinn, F. (1993). "Theoretical Mathematics". Toward a cultural synthesis of mathematics and theoretical physics. *Bulletin A. M. S.,* 29 (1), 1-13.

Lakatos, I. (1982). *Pruebas y refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático.* (2da. ed.). (Carlos Solis Trad.) Madrid: Alianza Editorial (Obra original publicada en 1976).

Loomis, E. S. (1968). *The Pythagorean Proposition* (2nd. Ed.) Washington D. C.:National Council of Teachers of Mathematics (NCTM).

Maor, E. (2007). *The Pythagorean theorem. A 4000-year history*. Princeton: Princeton University Press.

Polya, G. (1974). *Cómo plantear y resolver problemas.* (4ª reimpresión). México: Editorial Trillas.

Rav, Y. (1999). Why Do We Prove Theorems? *Philosophia Mathematica,* 7(3), 5-41.

Reichel, H-C. (2002). Lakatos and Aspects of Mathematics Education. En G. Kampis et al (eds.) *Appraising Lakatos. Mathematics, Methodology and the Man* (pp. 255-260). Vuena:Springer.

Sánchez Fernández, C. (2013). ¿Cómo hacer apetitoso el discurso matemático? Experiencias con sabor cubano. Cuadernos de investigación y formación en Educación Matemática, año 8, n°11, 225-236.

Sánchez Fernández, C. (2016). Temas Fértiles para la Cultura Matemática. *Cuadernos de investigación y formación en Educación Matemática*, año 11, n°15, 169-185.

Sánchez Fernández, C. & Valdés Castro, C. (2010). El entrañable encanto de las matemáticas. La Habana: Ed. "Félix Varela",

Sánchez Fernández, C. & Valdés Castro, C. (2016). Problematización histórica de temas matemáticos fértiles. *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática* , n° 46, 09-32.

Thurston, W. (1995). On Proof and Progress in Mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 15(1), 29-37 (reimpresión de "Proof and Progress in Mathematics", *Bulletin A. M. S.* 1994, vol. 30 (2), 161-177).