Regla de tres simple directa: avatares de un algoritmo[1]

Gilberto Obando Zapata

Resumen

La regla de tres simple directa es uno de los algoritmos más utilizados en la educación primaria y básica, una vez que se inicia el estudio de la proporcionalidad directa. Su uso por los estudiantes es tan generalizado (incluso en situaciones donde no es posible su aplicación) que en la didáctica de las matemáticas se ha consolidado un campo de investigación alrededor de lo que se ha llamado la sobre-generalización de la linealidad. En este marco de ideas, sobre la base de una mirada histórico-epistemológica, se aborda el estudio de la regla de tres, mostrando su lugar instrumental en la construcción de las nociones básicas de la proporcionalidad directa.

Palabras clave

Razonamiento proporcional; estructuras multiplicativas; pensamiento numérico; educación básica.

Abstract

The direct simple rule of three is one of the most used algorithms in primary and early secondary education, once the study of direct proportionality begins. Its use by students is so widespread (even in situations where its application is not possible) that it has been consolidated around what has been called research in the didactics of mathematics research the over-generalization of linearity. In this framework of ideas, based on a historical-epistemological perspective, the study of the rule of three is addressed, showing its instrumental place in the construction of the basic notions of direct proportionality.

Keywords

Proportional reasoning; proportion; multiplicative structures; numerical thinking; basic education.

G. Obando Zapata
Facultad de Educación, Universidad de Antioquia, Colombia
gilberto.obando@udea.edu.co

[1] Este trabajo corresponde a la conferencia paralela dictada por el autor en el II CEMACYC, celebrado en Cali, Colombia, del 29 de octubre al 1 de noviembre de 2017.

Recibido por los editores el 18 de febrero de 2018 y aceptado el 15 de abril de 2018.

1. Proporcionalidad directa

En el sentido amplio de la palabra, el concepto moderno de proporcionalidad[2] se encuentra estrechamente ligado con el álgebra lineal, pues las relaciones lineales (y en general n-lineales) están en la base de toda situación de proporcionalidad directa o inversa, simple o compuesta. Esto es, toda situación de proporcionalidad directa puede ser modelada por una función lineal de la forma $f(x) = k \cdot x$, $k \in \mathbb{R}$, mientras que si es de proporcionalidad inversa, por una función de la forma $f(x) = k \cdot x \cdot y$, $k \in \mathbb{R}$, y si es de proporcionalidad compuesta, por una relación funcional de la forma $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = k \cdot g(y_1, y_2, \ldots, y_m)$. Para detalles, ver (Obando, Vasco, & Arboleda, 2014; Obando Zapata, Posada, & Múnera Córdoba, 2006; Obando Zapata, Vasco, & Arboleda, 2013).

Esto hace de la proporcionalidad un concepto tan moderno como la mayoría de las matemáticas que conocemos hoy en día, pero como lo expresa Bourbaki (2007) en su libro sobre la historia de las matemáticas, a su vez, tan antigua como la matemática misma (al menos en lo que toca con un tratamiento explícito de la linealidad). Es decir, si bien la linealidad permite un tratamiento moderno, en términos del algebra lineal, de las situaciones típicas de proporcionalidad, este tipo de situaciones fueron objeto de tratamiento sistemático desde épocas remotas, como lo evidencian las soluciones dadas por los matemáticos de la antigüedad a los problemas que enfrentaron. Así, en las operaciones básicas (en especial la multiplicación) y, en general, en la solución de una ecuación lineal con una incógnita (o incluso un sistema de ecuaciones de varias incógnitas), se reconoce una percepción de la linealidad (al igual que del concepto de razón) y de su tratamiento a través de ciertos métodos (por ejemplo, el método de la falsa posición en egipcios y babilonios para la solución de ciertos tipos de ecuaciones lineales, el tratamiento de situaciones de proporcionalidad a través de la regla de tres en chinos e hindúes).

En ese tratamiento de los diferentes problemas que implican la covariación directamente proporcional de dos magnitudes, vale destacar la forma como los Babilonios utilizaban tablas en las que consignaban las tasas de variación (constantes fijas) de ciertas magnitudes con respecto a otras (por ejemplo, la cantidad de ladrillos que transporta una persona en un día, en función del tipo de ladrillo, la distancia recorrida y el tipo de terreno, o las relacionadas con el intercambio y transporte de mercancías). El uso de las mismas, y los métodos para resolver los problemas, muestran cierta comprensión de la proporcionalidad directa, por supuesto no en el sentido moderno de función lineal, sino vinculado con nociones de variación lineal. De otro lado, se puede mencionar que en la antigua China abordaron este tipo de problemas partir del reconocimiento de tasas fijas (para el intercambio de bienes y servicios), utilizándolas como parte de una proporción entre cuatro cantidades (proporción no es entendida en el sentido moderno del término). Este uso de tasas de cambio es la base de un método de cálculo que llegó hasta nuestros días conocido como la regla de tres.

---

[2] Por simplicidad en el uso del lenguaje, y siempre que no haya lugar a confusión, se usará la expresión "proporcionalidad" para referir a la proporcionalidad directa.

Proporcionalidad en las antiguas China e India: la regla de tres

Sin entrar en una discusión sobre si el origen de lo que hoy llamamos la regla de tres se dio en las antiguas China (ver por ejemplo Joseph W. Dauben (2007); Joseph W Dauben (2008)) o India (ver, por ejemplo, Bhascara (1817); Bhaskaracarya (2001); Brahmegupta (1817); Rajeswara (2002)), en ambas culturas se tiene evidencia del tratamiento de ciertos tipos de problema para los cuales tenían un método (o métodos) semejante al que hoy se conoce como la regla de tres. Este método era utilizado para tratar con situaciones que implican variaciones directamente proporcionales entre cantidades variables, sin necesidad de recurrir al uso explícito de una teoría de razones y proporciones, y sin la formulación explicita de constantes de proporcionalidad.

El texto de los Nueve Capítulos[3] muestra que los matemáticos chinos usaban de manera sistemática las constantes de proporcionalidad, por ejemplo en la forma de factores de conversión, tasas de intercambio entre productos, costo unitario de un producto, cálculo de áreas (aproximación del número π) etc. Un ejemplo se puede ver en el problema 32 del primer capítulo, el cual requiere calcular el área de un campo circular, donde se refiere la relación de la circunferencia al radio del campo como una razón de 1 a 3 (aunque Lui Hui comenta que hay otros valores para dicha relación: $\frac{22}{7}$ o $\frac{157}{30}$). El capítulo 2 (dedicado a situaciones de proporcionalidad) inicia con una tabla titulada "reglas de intercambio de arroz y millo", en donde se presentan diferentes tipos de productos y las tasas de intercambio de unos por otros (Tabla 1). En palabras de Lui Hui, esta tabla presenta tasas de intercambio que están en proporción y que se pueden convertir mutuamente entre ellas, tomando los valores apropiados. Así, a cada tipo de producto se le asigna un número entero que se interpreta como un valor relativo con respecto al resto de productos. Por ejemplo, los dos primeros productos de la primera columna tienen valores de 50 y 30, lo que significa que la razón del millo al millo descascarado es de 5 a 3 (esto es, 5 unidades de millo valen lo mismo que 3 unidades de millo descascarado). "Tasa" aquí puede significar más bien valor relativo entre dos productos. La normalización (la comparación entre los valores relativos asignados a dos productos) refiere la cantidad de un producto por cada unidad del otro, esto es, la razón entre los dos valores correspondientes.

Tabla 1
Tabla de intercambio de arroz y millo, tomada de (Joseph W. Dauben, 2007, p. 241)

millet rate	50	cooked imperial millet	42
hulled millet	30	soya beans	45
milled millet	27	small beans	45
highly milled millet	24	sesame seed	45
imperial millet	21	wheat	45
fine crushed wheat	13 ½	paddy	60
coarse crushed wheat	54	fermented beans	63
cooked hulled millet	75	porridge	90
cooked milled millet	54	cooked soya beans	103 ½
cooked highly milled millet	48	malt	175

[3] Traducción y comentarios en Joseph W. Dauben (2007), basada en la edición realizada por Lui Hui, hacia el siglo tercero d.C. Este clásico de la matemática de la antigua China, remonta sus orígenes más allá del siglo segundo antes de la era cristiana.

La regla para realizar tales intercambios dice: “tome el número dado y multiplíquelo por la rata buscada. [este producto] es el dividendo. La rata dada es el divisor. Divida” (Joseph W. Dauben, 2007, p. 241). Las explicaciones que da Lui Hui a esta regla son interesantes, por lo que se transcriben a continuación casi en su totalidad:

> Esta es una regla general…como decían los antepasados: "conociendo el pasado se puede predecir el futuro. Se muestra una de las esquinas [de un cuadrado], uno puede inferir las otras tres." Esta regla puede resolver problemas difíciles y complicados y superar las barreras entre cantidades [de diferente naturaleza]. … lo poco es el inicio de lo mucho; la unidad es el fundamento del número. Por lo tanto, la discusión de las tasas debe basarse en la unidad. Según [las reglas de intercambio] millo 5 y millo descascarado 3. Es decir, millo 5 por unidad, millo descascarado 3 por unidad. Para Intercambiar millo por millo descascarado, considerar primero el millo [dado] como unidad. [una] unidad significa reducir [la cantidad dada] por 5. Esto es, 5 como unidad. Multiplíquelo por 3, esto es [uno] 3 como unidad. Por lo tanto, las tasas de dependencia para [una] unidad son equivalentes, es decir de 5 a 3. Divida antes de multiplicar, pero si hay fracciones, entonces invierta [el procedimiento] en la regla. Mirados como enteros, sheng 5 de millo equivale a 3 sheng de millo descascarado. Mirado como fracciones, 1 dou de millo es equivalente a $\frac{3}{5}$ dou de millo descascarado. Utilice denominador 5, numerador 3. Para convertir millo en millo descascarado: multiplica por el numerador y divide por el denominador. Por lo tanto, la tasa buscada es siempre el [numerador y la tasa dada es el] denominador.

El método expresado implica determinar la tasa de intercambio entre dos productos dados (lo que modernamente llamaríamos el precio por unidad), y con base en esta razón, dada la cantidad de uno de los productos, determinar a qué cantidad del otro producto equivale. La explicación muestra conciencia de la existencia de una razón constante (la relación entre las tasas) que permite calcular la cantidad desconocida que se correlaciona con la cantidad dada. La verbalización del método explica cómo hacer la operación que permite calcular la cuarta cantidad desconocida (cuarta proporcional en términos modernos): en general, la tasa de intercambio entre los dos productos es una fracción, y el método explicita cómo usar el tablero para calcular para multiplicar una cantidad entera por una fracción (el numerador y el denominador de la fracción, al igual que el multiplicando, se corresponden de manera invariante a una de las tres cantidades dadas).

La versión hindú de la regla de tres tiene redacción semejante, pero las diferencias son significativas. Aunque existen diferentes formulaciones[4] según la época o el matemático que la escribiera, en general conservó la siguiente estructura: se dispone de tres cantidades, una primera, llamada la cantidad dada, o el argumento; una segunda, llamada el producto, lo producido por el argumento, y una tercera, llamada la cantidad demandada o deseada, y de la cual se debe calcular el producido. La regla dice que la primera y tercera, que por lo general son de la misma naturaleza, se ponen en primer y último lugar respectivamente, y la segunda, de naturaleza diferente, se pone en el

[4] Por ejemplo, Bibhutibhushan and Narayan (1962) presentan 6 formulaciones diferentes para esta regla, correspondientes a matemáticos de los primeros siglos de la era cristiana.

medio de las otras dos, y la cantidad buscada se obtiene al multiplicar la última con la segunda, y dividir este resultado por la primera.

Una mirada de los ejemplos dados para la aplicación de esta regla (Bhascara, 1817; Bhaskaracarya, 2001; Brahmegupta, 1817), permite proponer a manera de conjetura, que, en general, se trata de dos cantidades relacionadas (argumento y producido) se corresponden de tal forma que el valor de la una depende de la cantidad presente en la otra, estableciendo la regla de equivalencia, de intercambio entre estas dos cantidades. La conciencia de la existencia de esta dependencia de una cantidad con respecto a la otra se puede ver en el Lilavati de Baskhara, donde se lee, posterior al enunciado de la regla, la siguiente aclaración: "Si, en una situación dada, la cantidad que se desea calcular se incrementa (respectivamente decrece) con el incremento de la cantidad demandada (respectivamente decrece), entonces la regla de tres es aplicada por un adepto a las matemáticas" (Bhaskaracarya, 2001, p. 78). No sobra decir que las explicaciones sobre las condiciones para aplicar la regla de tres son muy exiguas, por no decir inexistentes, lo que hace suponer que se estaba frente a un conocimiento común que no requería de aclaraciones extensas, o que estos textos estaban acompañados de una amplia explicación verbal que no quedaba capturada en el verso escrito.

Sin embargo, esta regla, a diferencia de la versión china, pone énfasis en una organización espacial de los términos, a manera de mnemotécnica para recordar la forma de realizar los cálculos. Además, al menos de manera explícita, la regla tampoco parece dar relevancia a la razón constante (el valor por unidad) que pone en relación las dos cantidades dadas, como sí se hace evidente en el caso de la aplicación de la regla de tres en la versión china.

En el Lilavati, casi sin ningún tipo de explicación, para la regla de tres inversa se dice: "Si en una situación dada, la cantidad que se desea calcular se incrementa (respectivamente decrece) en tanto que decrece la cantidad demandada (respectivamente incrementa), entonces regla de tres términos invertida es aplicada por un adepto a las matemáticas" (Bhaskaracarya, 2001, p. 81). En este caso, la expresión regla de tres términos invertida quiere decir que se invierte el orden en que se deben realizar las operaciones, es decir, que después de ordenar las cantidades en línea teniendo en cuenta que las de la misma naturaleza se ponen en primero y último lugar, y la otra en el medio, entonces la cantidad buscada se obtiene multiplicando la primera por la segunda, dividiendo por la tercera. Nótese entonces que la denominación de inversa (para la regla) no tiene que ver con el reconocimiento de que las cuatro cantidades estén en proporción inversa, sino con que la regla original se aplica invirtiendo el orden para el otro tipo de situaciones. Sin embargo, no puede desconocerse que la aplicación de la regla de tres, o bien la inversión de la regla, depende del reconocimiento de una cierta forma de variación entre las dos cantidades que se consideran correspondientes una a la otra.

En suma, en la versión hindú de la aplicación de la regla de tres se puede decir que había un reconocimiento del proceso de dependencia de las cantidades involucradas en la situación (en términos modernos, la covariación positiva o negativa según el caso directo o inverso). Reconocida esta dependencia, se tomaba la decisión de aplicar el orden directo o inverso de las operaciones implicadas en la regla de tres. Sin embargo, el énfasis estaba en la organización espacial (distribución horizontal) de las tres cantidades involucradas en la situación, y no en el reconocimiento de la razón constante (en proporción directa o inversa) que correlaciona las dos magnitudes involucradas en la situación.

1.1. Leonardo de Pisa: una nueva mirada al mismo problema

El texto de Fibonnaci, titulado Liber Abacci (Leonardo (de Pisa), 1202/2003), aborda el tema de la proporcionalidad en el capítulo 8 y siguientes presentando los aspectos relativos a la regla de tres (simple, inversa y compuesta). En las primeras líneas del capítulo 8 se lee:

> …cuatro números proporcionales siempre se encuentran en todas las negociaciones de los cuales tres son conocidos y uno efectivamente desconocido; el primero de los tres conocidos es el número de cualquier mercancía que se quiere vender, número de unidades, de peso, de medida… [después de dar una serie de ejemplos sobre los tipos de cantidades que pueden expresarse como este primer número continua]. El segundo es el precio de la venta de este primer número… [igualmente da ejemplos de cantidades que pueden representar este segundo número]… El tercer número es alguna cantidad del mismo tipo de mercancía que se desea vender, para la cual se desconoce el precio, a saber, la cuarta cantidad: y este entonces debe ser alguna cantidad de la misma especie que el segundo número… [es decir, es el precio de venta de la segunda cantidad de mercancía]… Por lo tanto, como el número desconocido se puede encontrar a partir de los conocidos, nosotros enseñamos para todas esas situaciones una regla general, a saber… [continua con la descripción verbal de la forma de distribución espacial de las cuatro cantidades en una tabla de dos por dos, tal como lo hacemos hoy en día (ver 1), haciendo énfasis en que las cantidades que quedan en la misma columna deben ser de la misma naturaleza (cualidad o cantidad).]… Así escritas [las cantidades] es evidente que dos de los números escritos son siempre opuestos por la diagonal, y si uno se multiplica por el otro, y el producto de la multiplicación es dividido por el tercer número restante, entonces la cuarta cantidad desconocida, puede ser efectivamente encontrada. (Leonardo (de Pisa), 1202/2003, pp. 127-128)

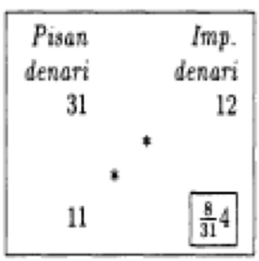

Figura 1: Organización de las cantidades en un problema de regla de tres. (imagen tomada de Leonardo (de Pisa), 1202/1872, p. 104).

El algoritmo presentado se basa, entonces, en la figura que se obtiene de distribuir las cantidades de acuerdo a las instrucciones dadas. Esta forma de representación espacial de las cantidades es utilizada sistemáticamente en todos los ejemplos (¡más de cuarenta páginas!) en los que explica el funcionamiento de la regla de tres para diferentes sistemas monetarios, diferentes sistemas de pesos y medidas, y para diferentes tipos de números: enteros y fraccionarios.

Se pueden hacer tres comentarios con relación a esta extensa cita:

(i) la forma de interpretar las cantidades es similar a la que presentaron los matemáticos hindúes: la primera es una causa, la segunda un efecto, la tercera es otra causa, y la cuarta su efecto. De estas cuatro, tres son conocidas y una desconocida. Además, tal como lo hicieron los matemáticos árabes, reconoce que las cuatro cantidades pertenecen a dos tipos de magnitudes.[5] La forma de organización espacial de las cuatro cantidades obedece a este reconocimiento de la naturaleza de tales cantidades, y de las relaciones de covariación de unas con respecto a otras. Pero lo más importante es el énfasis de Leonardo para hacer explícita tanto la relación de dependencia de las cantidades dadas, como la proporción entre las cuatro cantidades.

(ii) la forma de organización de las cantidades introduce una técnica innovadora: la organización espacial en una tabla de doble entrada. Esto permite diferenciar con precisión la naturaleza de cada una de las cantidades involucradas, y representar en el esquema la cantidad desconocida por un cuadro vacío el cual se llena después de realizar los cálculos. De esta manera, Leonardo puede mostrar fácilmente (ver cita más adelante) que no importa cuál de las cantidades sea la desconocida, siempre la multiplicación de las dos cantidades conocidas en extremos opuestos de la diagonal, dividida por la otra cantidad, da como resultado la cuarta cantidad (lo cual es innovador con respecto a la versión tradicional de la regla de tres tradicional conocida hasta el momento).

(iii) finalmente, el algoritmo introducido, similar al que utilizamos hoy en día, se basa en la figura que se obtiene de la representación espacial de las cantidades. De esta forma, se descarga la mente de una serie de consideraciones necesarias para tener éxito en la utilización de la regla de tres (la relacionada con el orden de las cantidades), heredada de los indo-árabes, en donde la distribución de las cantidades se hacía linealmente.

Pero en este punto no termina el trabajo de Leonardo, sino que igualmente hace un esfuerzo importante en mostrar los fundamentos aritméticos que hacen que la regla funcione

> … y como todo esto debe ser claramente comprendido, lo explicaremos con diferentes ejemplos de precios y mercancías. Pero primero debemos mostrar cómo es que este método procede, que hay de hecho, en que en todos los negocios hay IIII

[5] Alkhuarizmi (Muhammad ibn Mūsā al-Khuwārizmī & Rosen, 1831; Muhammad ibn Mūsá Khuwārizmī & Robert (of Chester), 1143/1915) en su libro de álgebra, dedica un capítulo a las situaciones comerciales, y allí afirma que en este tipo de situaciones se tienen cuatro cantidades y dos ideas. Sin más explicaciones, se pueden interpretar que “idea” se refiere a la naturaleza de las cantidades: las cuatro cantidades se agrupan dos a dos según su naturaleza.

> [N.A Así se representaba el número 4] números que son proporcionales: a saber, como el primero es al segundo, es el tercero al cuarto, esto es, como el número de alguna cantidad de mercancía es al número de la cantidad del precio, así cualquier otra cantidad de la misma mercancía es al número de su precio; o como cualquier cantidad de mercancía es a cualquier cantidad de la misma mercancía, también el precio de una es al precio de la otra; y si hay IIII cantidades proporcionales, el producto de la segunda por la tercera debe ser igual al producto de la primera por la cuarta, como es en las demostraciones de la aritmética o la geometría; por lo tanto si la cuarta cantidad es la única desconocida, de hecho la multiplicación de la segunda cantidad por la tercera dividida por la primera, efectivamente da como resultado la cuarta cantidad;... similarmente si la tercera cantidad es la desconocida, esta es el resultado de la primera multiplicada por la cuarta y dividida por la tercera,... (Leonardo (de Pisa), 1202/2003, p. 128)

Es importante rescatar el interés de Fibonacci por justificar teóricamente la aplicación de los procedimientos aritméticos a los fines prácticos del desempeño eficiente en los negocios. Para ello muestra que el método funciona, en tanto que las cuatro cantidades involucradas son proporcionales entre sí (bien sea, comparando las dos parejas de cantidades homogéneas, o comparando las dos parejas de cantidades heterogéneas), y por ende, puede aplicar los teoremas de las proporciones para la aritmética y la geometría (se refiere a los libros V y VII de los Elementos).

Pero en el libro de Fibonacci también se encuentra un tratamiento detallado de la regla de tres compuesta (capítulo 9), a partir de situaciones de intercambio en las que la razón entre la cantidad desconocida y su correspondiente cantidad conocida se puede expresar como la composición de las razones (al menos dos) de parejas de cantidades correspondientes. Al igual que en el caso anterior, se describe la regla general (basada en una distribución de las cantidades dadas en una tabla de tres columnas, una para cada especie de cantidad), y luego se dan una serie de explicaciones sobre los fundamentos que garantizan la validez teórica de dicho procedimiento. Los ejemplos de aplicación inician con situaciones que involucran seis cantidades (formando tres parejas de cantidades, cada una de naturaleza distinta), una de las cuales es desconocida (Este tipo de situaciones fueron llamados por árabes o hindúes como situaciones de 5, 7, ... términos). Una descripción general del procedimiento sugerido por Leonardo para el caso de tres cantidades podría intentarse así:[6] sean A, B y D tres Magnitudes, tales que la cantidad a en A equivale a la cantidad b en B, y que la cantidad b' en B equivale a la cantidad d en D. Entonces, ¿Qué cantidad en A, le corresponde a la cantidad d' de D? Siguiendo el procedimiento sugerido por Fibonacci, se deben organizar los datos en una tabla como sigue:

$$\begin{array}{ccccc} A & & B & & D \\ a & & b & & d' \\ \square & \ddots & b' & \therefore & d \end{array}$$

De donde se tiene, entonces, que la cantidad desconocida se obtiene de multiplicar las tres cantidades a, b y d', (las tres cantidades conocidas que quedan opuestas

[6] No se hace la descripción como la muestra Leonardo en su texto, pues el estilo retórico de la misma la hace muy difícil de traducir. Sin embargo, lo que se expresa en estas líneas, conservan la estructura conceptual de las formas de razonamiento seguidas por él.

por las diagonales sucesivas) y dividir este producto por el producto de las otras dos cantidades conocidas (igualmente opuestas por la diagonal). La justificación para este método puede parafrasearse como sigue (igualmente en términos modernos para evitar los giros de una presentación retórica): lo primero es preguntarse: *si a es a b, entonces ¿qué cantidad de A es a la cantidad b' en B? Sea z esta cantidad*. Luego afirma: como la cantidad b' se corresponda con la cantidad d, entonces, la cantidad z se corresponde con la cantidad d. Por lo tanto, ahora se puede hacer la pregunta final: *si la cantidad z es a la cantidad d, ¿qué cantidad de A se corresponde con la cantidad d'*?

Simbólicamente lo que se tiene es: $\frac{a}{b} = \frac{z}{b'}$; $\frac{x}{d'} = \frac{z}{d}$; por lo tanto, $\frac{x}{d'} = \frac{z}{d} = \frac{\frac{a}{b}b'}{d} = \frac{ab'}{bd}$ de donde $x = \frac{ab'd'}{bd}$. Esta secuencia de razones se puede entender mejor si se usa la siguiente distribución espacial de las cantidades:

$$\begin{array}{ccccc} A & & B & & D \\ a & & b & & \square \\ \square & \ddots & b' & & d \\ \square & & \square & \ddots & d' \end{array}$$

Donde la cantidad auxiliar z, de acuerdo a las ecuaciones anteriores, quedaría localizada debajo de la cantidad a, pues la pregunta inicial, de alguna manera fue: ¿qué cantidad z se corresponde con la cantidad d, de tal forma que se pueda determinar la cantidad de A que se corresponde con la cantidad d'? La misma línea de razonamiento se podría utilizar, pero ahora localizando la cantidad auxiliar z encima de la cantidad d: ¿qué cantidad de D se corresponde con la cantidad a de tal forma que se pueda determinar la cantidad de A que corresponde con la cantidad conocida d'? En cualquiera de los dos casos, el paso de las cantidades de A a las cantidades de D, está mediado por los pasos de A a B, y de B a D. Esto en tanto la razón de cantidades de A a cantidades de D es la composición de dos razones: una de cantidades de A a cantidades de B, y otra de cantidades de A a cantidades de D. La conciencia de estos elementos teóricos detrás del método se ve en la siguiente cita, donde Leonardo explica un ejemplo sobre cambio de monedas de diferentes lugares:

> ...y así uno se puede hacer hábil para encontrar el precio de cualquier cantidad de dinero como lo he demostrado por el método de la sexta proporcional; la proporción es compuesta de dos proporciones dadas. Y como cualquier proporción es compuesta de un número de proporciones, ésta es llamada una proporción de proporciones, y he demostrado claramente cómo es que esta composición se hace. Hay un número del cual resulta un segundo número por una proporción de dos números, y del segundo número uno hace un tercero por una proporción de otros dos números, y el tercer número lleva el cuarto, y así por pasos sucesivos; entonces la proporción del primer número al último se dice que es la compuesta de todas las proporciones, y efectivamente la proporción compuesta es hecha de todos los números a antecedentes a todos los números consecuentes, del primero al último. (Leonardo (de Pisa), 1202/2003, p. 205)

2. A manera de conclusión

Se tiene, entonces, a partir del trabajo de Leonardo, lo que se podría llamar la versión moderna de la regla de tres: una representación espacial de las cantidades, organizadas en dos columnas según su naturaleza y sus relaciones, con un algoritmo basado en dicha organización espacial. Pero a la vez, el reconocimiento de que este algoritmo funciona bien en todos los casos posibles en virtud de que las cuatro cantidades involucradas son proporcionales entre sí. La regla de tres, con la justificación teórica que ahora posee, tiene el poder de permitir el tratamiento de situaciones de proporcionalidad directa sin necesidad de reconocer de manera explícita la función lineal que modela la relación entre las cantidades variables. Esto en tanto la regla modela la proporción entre las cuatro cantidades involucradas en la situación, y permite operar con ellas sin que sea necesario reconocer explícitamente la constante de proporcionalidad entre las cantidades involucradas.

Nótese entonces que, en los casos analizados, la regla de tres es una forma de tratar con problemas de proporcionalidad directa, cuando las cantidades involucradas son homogéneas. La razón constante que define las tasas de intercambio de cantidades de un tipo en cantidades del otro, es una especie de transformador lineal que, aplicado sobre una cantidad produce la otra (Obando, Vasco, & Arboleda, 2013; Obando Z., 2015). En las técnicas a partir de las cuales se resolvían este tipo de problemas en la antigua China, esta función de la razón como regla de intercambio, queda oculta en las versiones mnemotécnicas de la regla de tres. Pero esto no quiere decir que en dicha regla no esté como fondo conceptual la razón como transformador (baste para ello, ver las extensas explicaciones que da Fibonacci para mostrar que el soporte conceptual del método de la regla de tres está en la teoría de razones y proporciones de los libros V y VII de los Elementos de Euclides).

Este rápido recorrido por el viaje de este algoritmo tan popular en nuestras escuelas hoy en día, deja lecciones pedagógicas. En primer lugar, nos muestra su importancia epistémica, representada en su valor heurístico, pues permite resolver ciertos tipos de problema (proporcionalidad directa), en ausencia de una conceptualización de la función lineal. En segundo lugar, que este valor epistémico descansa en una concepción fuerte de nociones asociadas a las razones y las proporciones que quedan escondidas tras la regla nemotécnica que permite recordar el cálculo. En tercer lugar, la regla de tres se muestra entonces como un algoritmo potente en la enseñanza escolar de la proporcionalidad, precisamente, por este valor heurístico y epistémico. Sin embargo, cuando esta enseñanza se hace sin el reconocimiento de los fundamentos teóricos que le dan su valor matemático, es una regla vacía, carente de significado que se aplica de forma indistinta a cualquier situación de cuatro términos, donde uno de ellos es desconocido, sin importar si las formas de covariación entre tales cantidades permite su aplicación. Como Leonardo lo muestra, es fundamental comprender el método, pero también su fundamento.

Referencias y bibliografía

Bhascara. (1817). Lilavati (H. Colebrooke, Trans.). In H. T. Colebrooke (Ed.), *Algebra, with arithmetic and mensuration, from the Sanscrit of Brahmegupta and Bhascara* (pp. 1-127). London: John Murray.

Bhaskaracarya. (2001). Lilavati of Bhaskaracarya. A treatise of mathematics of vedic tradition (K. S. Patwardhan, S. A. Naimpally, & S. L. Singh, Trans.). In. Dheli, India: Motilal Banarsidass Publishers.

Bibhutibhushan, D., & Narayan, A. (1962). *History of Hindu mathematics: A source book* (Vol. 1 & 2). Bombay, India: Asia Publishing House.

Bourbaki, N. (2007). *Éléments d'histoire des mathématiques*. Berlin: Springer Berlin Heidelberg.

Brahmegupta. (1817). Algebra (H. Colebrooke, Trans.). In H. Colebrooke (Ed.), *Algebra with Arithmetic and Mensuration* (pp. 277-378). London: John Murray.

Dauben, J. W. (2007). Chinese mathematics. In V. Katz (Ed.), *The Mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, India and Islam* (pp. 187-384). New Jersey, NJ: Princenton University Press.

Dauben, J. W. (2008). Suan Shu Shu a book on numbers and computations: English translation with commentary. *Archive for History of Exact Sciences, 62*(3), 91-178. doi:10.1007/s00407-008-0023-0

Leonardo (de Pisa). (1202/1872). Il Liber Abaci. In B. Boncompagni (Ed.), *Scritti di Leonardo Pisano matematico del secolo decimoterzo pubblicati da Baldassarre Boncompagni: Il Liber abbaci di Leonardo Pisano*. Roma.

Leonardo (de Pisa). (1202/2003). Liber abaci (L. Sigler, Trans.). In G. J. Toomer (Ed.), *Fibonaccis Liber Abaci. A translation into modem english of Leonardo Pisanos book of calculation*. New York, NY: Springer.

Muhammad ibn Mūsā al-Khuwārizmī, & Rosen, F. (1831). The Algebra of Mohammed Ben Musa (F. Rosen, Trans.). In F. Rosen (Ed.), *The algebra of Mohammad ben Musa*. London: J. L. Cox.

Muhammad ibn Mūsá Khuwārizmī, & Robert (of Chester). (1143/1915). Robert of Chesters Latin translation of the Algebra of al-Khowarizmi (L. C. Karpinski, Trans.). In L. C. Karpinski (Ed.), *Latin traslation of the Algebra of Al-Khowarizmi with an introduction, critical notes and an english version*. London: The Macmillan Company.

Obando Z., G., Posada, F., & Múnera C.órdoba, J. J. (2006). *Pensamiento Variacional y Razonamiento Algebraico*. Medellín: Gobernación de Antioquia.

Obando Z., G. (2009). Praxeologías matemáticas en torno al número racional, las razones, las proporciones y la proporcionalidad en la educación básica. In *10 SEM* (pp. 194–201).

Obando, G., Vasco, C. E., & Arboleda, L. C. (2013). Razón, proporción y proporcionalidad: configuraciones epistémicas para la Educación Básica. In R. Flórez (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Vol. 26, pp. 977-986). Mexico, DF.: Comite Latinoamericano de Matemática Educativa.

Obando Z., G. (2015). *Sistema de prácticas matemáticas en relación con las Razones, las Proporciones y la Proporcionalidad en los grados 3º y 4º de una institución educati-*

va de la Educación Básica. (Doctor), Universidad del Valle, Cali, Co. Retrieved from http://bibliotecadigital.univalle.edu.co/bitstream/10893/9472/1/CB-0519794.pdf

Rajeswara, S. (2002). Rule of three and its variations in India. In B. v. Dalen, J. W. Dauben, Y. Dold-samplonius, & M. Folkerts (Eds.), *From China to Paris: 2000 Years Transmission of Mathematical Ideas* (pp. 133-156). Stuttgart: Franz Steiner Verlag.

Nota del autor: Este documento toma como referencia la tesis Doctoral del Autor (Obando Z., 2015), en la sección titulada "proporcionalidad directa", páginas 134-147,