Enfoques Emergentes en la Educación Matemática[1]

Luis Moreno-Armella

Resumen

Ya no se puede ignorar que los medios digitales tienen el potencial para democratizar el acceso a principios organizadores matemáticos para articular ideas curriculares para el siglo XXI. La importancia de estos medios se revela a través de las representaciones ejecutables de los entes matemáticos. Como las representaciones simbólicas constituyen el camino privilegiado para entrar en contacto con dichos entes, entonces, cuando las representaciones son digitales, ellas adquieren una naturaleza aumentada: permiten manipular los entes matemáticos como si fuesen objetos materiales. El impacto cognitivo de este hecho singular es enorme y ha sido documentado ampliamente en el trabajo con profesores: desarrollo de nuevas estrategias de resolución de problemas. Comprender los procesos cognitivos en este territorio es urgente pues los nuevos alumnos son nativos digitales. Daremos ejemplos de cómo tiene lugar tanto la reconceptualización de los entes matemáticos así como la transformación de las estrategias de apropiación del conocimiento matemático escolar.

Palabras clave

Tecnologías digitales, currículo de Matemática, representaciones digitales.

Abstract[2]

It can no longer be ignored that digital media have the potential to democratize access to mathematical organizing principles to articulate curricular ideas for the 21st century. The importance of these means is revealed through the executable representations of mathematical entities. Since symbolic representations are the preferred way to get in touch with these entities, then, when the representations are digital, they acquire an augmented nature: they allow manipulating the mathematical entities as if they were material objects. The cognitive impact of this singular fact is enormous and has been widely documented in the work with teachers: development of new problem-solving strategies. Understanding the cognitive processes in this territory is urgent because new students are digital natives. Examples will be given of how both the reconceptualization of mathematical entities as well as the transformation of appropriation strategies of school mathematical knowledge take place.

Keywords

Digital technologies, mathematics curriculum, digital representations.

L. Moreno-Armella
CINVESTAV-IPN, México
lmorenoarmella@gmail.com

[1] Este trabajo corresponde a la conferencia plenaria dictada por el autor en el II CEMACYC, celebrado en Cali, Colombia, del 29 de octubre al 1 de noviembre de 2017.

[2] El resumen y las palabras clave en inglés fueron agregados por los editores.

Recibido por los editores el 10 de marzo de 2018 y aceptado el 3 de mayo de 2018.
Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática. 2018. Año 13. Número 17. pp 179–192. Costa Rica

1. Introducción

El ser humano ha sido capaz de trascender muchas de las limitaciones de su organismo y de su mente. Un teléfono permite que José se comunique con Florentino quien se encuentra a miles de kilómetros de distancia; podemos volar a velocidades de cientos de kilómetros por hora mientras cruzamos el Pacífico y, simultáneamente, vivimos en la realidad virtual de una novela sin abandonar nuestro asiento.

Sin duda, como me sugirió alguna vez Jim Kaput, la tecnología, en todas las épocas, es aquello que permite que gente ordinaria haga cosas extraordinarias.

Si trazáramos una línea de tiempo empezando en los orígenes de nuestra especie, podríamos colocar sobre ella las primeras herramientas: una piedra afilada, una lanza rústica y algunas otras, todas con un mensaje grabado sobre ellas: *herramientas para la supervivencia de la especie*.

2. Origen de la tecnología.

Avanzando sobre esa línea, iríamos apreciando la sofisticación que alcanzaron las sucesivas generaciones hasta llegar a la invención de la escritura. Allí el mensaje fijado diría: *tecnología para para la transformación cognitiva de la especie*.

El efecto inmediato de esa invención fue proporcionarnos un *soporte externo de la memoria*. Así, nuestra capacidad para conservar la información ya no se vió limitada por la biología. Ahora teníamos un recurso que potencialmente aumentaba esa capacidad hasta el infinito. La escritura y la aritmética se tornaron instrumentos esenciales para la organización social y la recaudación de impuestos; el conocimiento del calendario, la astronomía y la geometría se desarrollaron específicamente para los proyectos estatales de riego o para investir a las autoridades con el poder mágico de la predicción de eclipses.

Lo que entre los sumerios resolvió un problema de capacidad, más adelante entre los griegos sufrió una transformación radical: no solo servía para conservar la información sobre el comercio sino que ahora se podía conservar las ideas en un medio estable, confiable.

La escritura es una tecnología simbólica que permitió convertir un muro en una una especie de pizarrón sobre el cual se escribían estas ideas para la discusión colectiva. Además de la escritura alfabética, los griegos también recibieron beneficios mayores de otras culturas: el cero y el sistema posicional de los números. El almacenamiento externo permite que las ideas pueden ser sometidas a un escrutinio público: considerarse, comentarse y criticarse. La ciencia es quizá el ejemplo más claro de los que esa capacidad representa.

Hoy, la huella de la escritura es tan profunda en cada uno de nosotros que no sabemos, ni podemos imaginar siquiera cómo es no saber escribir.

La escritura y el sistema decimal son tal vez las tecnología simbólicas que tienen un efecto más profundo y permanente sobre nuestras formas de pensar. Saber escribir y saber contar se tornaron muy pronto en tecnologías infraestructurales. La invención de la imprenta, unos cincuenta años antes de la invención de América representó una ruptura mayor: permitió abrir el camino hacia la democratización de la escritura que dejó, gradualmente, de ser un privilegio de los escribas. Se calcula que, por ejemplo, cada semana, el 10 % de la población adulta de Inglaterra leía el capítulo más reciente de la última obra de Charles Dickens. Hablamos del siglo XIX. En pleno siglo XX, los colombianos esperaban, casi arrebatándose de las manos, el ejemplar del día del diario El Espectador, para enterarse de cómo había sido el día del náufrago que García Márquez instaló en la conciencia colectiva. En el libro *The Alphabet and the Goddess*, su autor L. Schlain nos cuenta la historia del momento cuando un príncipe africano comprende la escritura. Narra cómo este príncipe va entendiendo, paso a paso, que aquellos símbolos son *palabras encerradas* en las letras.

Cada uno de estos ejemplos, ligeramente narrados aquí, señalan algo crucial: la escritura afecta profundamente la conciencia colectiva e individual. En su libro, *A Mind so Rare*, Merlin Donald explica profusamente (pp. 302-305) cómo la apropiación de la escritura genera una reorganización de circuitos neuronales que estaban ausentes antes de la escritura. Es necesario que transcurra un tiempo considerable en el terreno educativo para lograr esta transformación en la arquitectura funcional del cerebro que impacta en consecuencia, el funcionamiento cognitivo de las personas. El cerebro alfabetizado es un producto cultural, pero el efecto de estos símbolos externos no se detuvo a nivel de la arquitectura del cerebro individual sino que transformó la arquitectura colectiva, distribuida, de la cognición a nivel de la sociedad. Basta mirar a nuestro alrededor para comprender el impacto distribuido de las tecnologías simbólicas, ya no solo de la escritura. Como viajeros de un caballo de Troya, estas tecnologías, han colonizado las sociedades, en mayor o menor grado, de maneras casi imperceptible, durante los últimos cinco mil años y sobretodo después de la invención de la imprenta, tecnología que funcionó desde entonces, como una correa de transmisión cultural.

Kepler solía decir que la tabla de logaritmos había añadido algo así como veinte años de vida a los astrónomos. Gracias al ingeniero flamenco Simón Stevin, fue posible romper con la idea aristotélica del número e introducir con pleno derecho la representación decimal de los números fraccionarios. De allí a los logaritmos, solo hubo que esperar un tiempo para que Napier hiciera su tarea. Si se lo piensa un poco, puede entenderse que la llamada Revolución Científica (del siglo XVII) tuvo, aparte de la escritura que permitió recuperar y leer la ciencia griega, un asidero fundamental en el sistema numérico. De allí surgen las razones que produjeron el plano inclinado y la caída libre, en manos de Galileo y en las de Newton, más tarde, la ley de gravitación universal y el sentido físico de la elipse. Y el Cálculo infinitesimal. Y las formas de racionalidad contemporáneas.

Más cerca de esta orilla del tiempo, nos distrae el sonido monótono del telégrafo. Sin embargo, gracias a este invento, el espacio y el tiempo se contrajeron y con ello se transformó de raíz la comunicación. Ya no era necesario enviar una carta de urgencia mientras se esperaba un tiempo largo a que llegara a su destino. La presencia del telégrafo cambió estas circunstancias y sus consecuencias las vivimos hoy, acostumbrados ya a unas comunicaciones casi instantáneas. Podría decirse que a partir del telégrafo la tecnología de la comunicación ha materializado lo que en otra parte hemos denominado (véase Moreno-Armella & Hegedus, S. 2009) la *zona de desarrollo potencial de un instrumento*.

La acción de una tecnología se adelanta mediante herramientas materiales e instrumentos que son, básicamente de carácter simbólico.

Una ciudad, por ejemplo, es un tipo de museo tecnológico *per se*. Hoy día, las tecnologías vienen incorporadas mayoritariamente, en instrumentos híbridos, con fuerte presencia digital.

Si viajamos a Japón, tendremos un vuelo muy largo y sin escalas. Encerrados en un artefacto compuesto por más de un millón de piezas, de tornillos y motores a instrumentos de navegación... ¿De dónde sale la confianza con la que allí conciliamos el sueño? ¿Cómo saben los pilotos a dónde van en medio de la noche?

3. La mediación instrumental

Lo que hemos narrado sobre la escritura tiene una extensión natural a las demás tecnologías. Si observamos a un pianista mientras ejecuta una pieza, digamos las variaciones Goldberg de Bach, podemos tener la impresión que su ejecución fluye con notable facilidad. Lo que no apreciamos en esos momentos son las largas horas que invirtió el artista para dominar no solo las dificultades de ejecución de la música de Bach sino para conocer a fondo las posibilidades del pieno. Ante una gran inerpretación llegamos a pensar que el piano es una extensión del artista, como si sus manos se prolongaran naturalmente hacia las teclas del instrumento. Lo que ha ocurrido es que, durante los años de aprendizaje del instrumento, el pianista en ciernes ha ido conociendo las posibilidades del instrumento, ha aprendido a conocerlo hasta el punto que ahora se expreesa musicalmente no solo con el instrumento sino a través del instrumento. Como si el instrumento no existiera separado de él sino integrado a él. Así como un tenor utiliza su voz para expresarse, el pianista hace lo propio a través de su piano.

El resultado de ese complejo proceso de apropiación de un instrumento cualquiera que este sea, provee a la persona de una capacidad que no poseía o que poseía de manera limitada. A veces el instrumento solamente aumenta una capacidad que ya poseíamos, por ejemplo, si somos muy cortos de vista, podemos auxiliarnos de una potente lupa para leer un texto.

En general los sentidos humanos tienen sensibilidades muy notables que pueden ser mejoradas. Por ejemplo, si un músico entra un poco tarde a la ejecución de un solista, desdeel fondo del teatro donde se lleva a cabo la función puede percibir que el solista está ligeramente desafinado mientras que eso pasa desapercibido para la mayoría de los asistentes. Cómo lo logra? Con la mediación de su cultura musical que incluye haber escuchado el solo de violín de hoy, muchas veces con la guía de su maestro. Para un experto cocinero, hay muchos sabores que puede percibir allá escondidos en un platillo que degusta mientras visita un restaurante. Cada uno de los sentidos tiene un umbral de desarrollo, de refinamiento que va más allá de lo puramente biológico y que logra realizarse gracias a una dimensión de la cultura.Eso se conocce genéricamente como la dimensión histórica de los sentidos. Los instrumentos que hayamos utilizado en cada caso para lograr estos niveles de mediación cognitiva, no solo han aumentado nuestras sensibilidades cognitivas sino que las han *reestructurado*. A través de dichos instrumentos podremos *conocer* de maneras que no eran posible en ausencia de ellos. Por ejemplo, un biólogo que utiliza un microscopio electrónico tiene acceso a un nivel de la realidad material que le era totalmente inaccesible en ausencia del instrumento. Entonces puede *conocer* y generar conocimiento que resulta inseparable del microscopio. Algo similar ocurre con el telescopio del astrónomo y con el computador del desarrollador de *software* matemático. Los ejemplos son interminables y van haciendo ver que el conocimiento es esencialmente *mediado* (por un instrumento). En su libro *Orígenes*, Neil de Grasse Tyson y Donald Goldsmith (2014) reflexionan al final de la obra sobre la mediación instrumental y sumnistran varios ejemplos notables. Por ejemplo, si hubiéramos nacido con ojos que llevaran incrustados detectores del movimiento Doppler, habríamos visto desde hace milenios, que todo el universo está expandiéndose y que todas las galaxias lejanas se alejan cada vez más de nosotros. Si fuéramos capaces de detectar partículas de altas energías, localizaríamos sustancias radiactivas a gran distancia. Todo esto es posible hoy, gracias a la *mediación instrumental*.

Es como si desde nuestros orígenes, estuviésemos evolucionando de manera extragenética tornándonos seres hipersensibles provistos de sentidos artificiales. Hoy somos cíborgs alfabéticos, cíborgs decimales y tal vez pronto seremos cíborgs digitales plenos, similares a Walter, del filme *Alien: Covenant* (2017) de Ridley Scott.

4. Tecnologías y Educación Matemática

Hay muchas formas de tecnología que han acompañado el desarrollo de la instrucción matemática. Desde el simple pizarrón como espacio de representación, hasta la regla y el compás. Más adelante, hemos visto la presencia de calculadoras científicas y graficadoras, sensores con traducción cartesiana del movimiento y muchas otras versiones de la tecnología digital al día de hoy.

Sin embargo, las resistencias frente a estas ha sido muy variada y algunas desde hace más de un siglo, por ejemplo:

a) *Los estudiantes de hoy dependen mucho de la tinta. No saben cómo usar una navaja para sacar punta a un lápiz. ¡La pluma y la tinta nunca sustituirán al lápiz!*

National Association of Teachers, 1907.

b) *Los estudiantes de hoy dependen de la tinta comercial. No saben cómo preparar la suya. Cuando se les termine, no podrán escribir nada hasta su próximo viaje al pueblo. Es un comentario triste sobre la educación moderna.*

The Rural American Teacher, 1929.

c) *El bolígrafo será la ruina de la educación de nuestro país. Los estudiantes los usan y después los tiran. Las virtudes americanas de economía y ahorro se están perdiendo. Los negocios y los bancos nunca permitirán tales lujos.*

Federal Teacher, 1950.

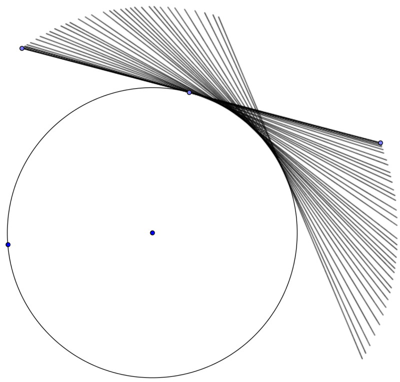
Aparte de estas resistencias a las tecnologías más elementales, también abundan las resistencias a las tecnologías digitales, por ejemplo a las calculadoras, aún hoy día, por suponer que comprometen la autonomía y el desarrollo intelectual de los estudiantes. Vale la pena aquí observar que esta posición supone que la cognición del estudiante es intrínseca y que en todo caso se trataría de estimularla. En consecuencia, la cognición es un invariante. El único papel que podría jugar cualquier forma de tecnología es un papel de amplificador. Como la lupa. Estas posiciones desconocen que la escritura, el sistema decimal son tecnologías y que han transformado ya los modos de pensar de las personas tanto en la escuela como fuera de ella. Lo que ocurre en el fondo es que la escritura y la aritmética están tan profundamente enraizadas en nosotros que se han tornado invisibles. El teléfono en su versión de *smartphone* parece estar en ruta de transformarse si es que ya no lo hizo en una tecnología invisible en sus efectos estructurantes de nuestras formas sociales de comunicación.

Por otra parte, también se manifiesta la posición que supone que las nuevas tecnologías resolverán los problemas educativos. Esta posición es tan exagerada e inexacta como la anterior. Cada tecnología cognitiva impacta nuestro pensamiento y nuestro conocer. El uso que la educación haga de ellas debe ser sometida a un cuidadoso análisis y puesta en escena para experimentar sus efectos.

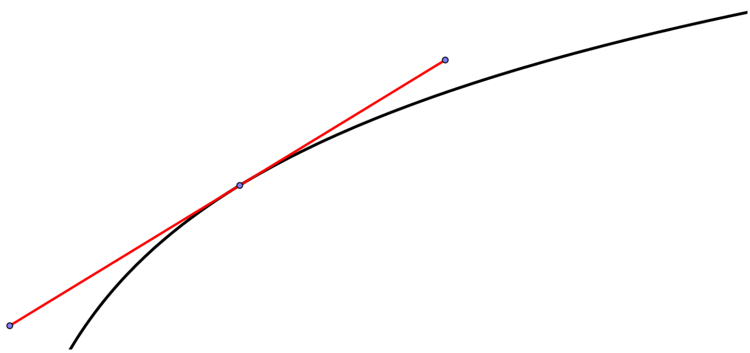
A continuación vamos a presentar algunos pasajes del trabajo con profesores-estudiantes con quienes se experimentó tratando de cambiar una base de conocimientos por otra enraizada en un medio dinámico como el geogebra. Presentaremos ejemplos básicamente de geometría. Aquí, las exploraciones digitales encuentran en algunos ámbitos, cierta resistencia con respecto al valor epistémico de los argumentos. Para empezar vale la pena observar que un medio como geogebra (y otros) ha potenciado la *visualización* matemática y los argumentos de corte inductivo. Tal vez hay que considerar detenidamente que no se trata de visualizar una idea matemática como si esta visualización fuera un añadido, un apoyo, sino que dicha visualización es es parte constitutiva de la idea matemática.

Esto corresponde al principio de mediación instrumental que hemos enunciado previamente, a saber, que *las características centrales de una forma de conocimiento están en íntima relación con los instrumentos que sirven como mediadores en el proceso de construcción de ese conocimiento*.

Las figuras digitales para representar un objeto matemático constituyen una de las formas de representación de dichos objetos. A diferencia de las representacines estáticas, las representaciones digitales (en geogebra, en particular) son *ejecutables*. Por ejemplo, consideremos una circunferencia y elijamos un punto sobre ella. Tracemos la recta tangente a la circunferencia por ese punto y ahora desplacemos el punto sobre la circunferencia. Lo que vemos es como la tangente se va actualizando a medida que el punto se desplaza sobre la circunferencia.



Si dibujamos la circunferencia sobre el papel, tendremos que imaginar como se desplaza la recta tangente. Aquí, lo vemos directamente sobre la pantalla. Ese es el significado de una representación ejecutable. Desde luego, esto mismo se puede lograr si en lugar de una circunferencia tenemos la gráfica de una función suave, que tenga recta tangente en todos sus puntos.Recorriendo la curva podemos observar el comportamiento de la recta tangente con lo cual tendremos información sobre la curva misma. Esa es, desde el punto de vista geométrico, la esencia del cálculo diferencial. Ese es el caso de la gráfica de logaritmo, por ejemplo:



Las representaciones ejecutables nos permiten incorporar el movimiento como una dimensión del objeto bajo estudio: aparecen entonces en la visualización sobre la pantalla, características que estaban ausentes en la representación estática. Eso es similar a lo que ocurre cuando un pequeño insecto (una polilla, por ejemplo) se queda quieto sobre la corteza de un árbol. Un pájaro predador no lo ve, solo ve corteza excepto si el insecto se mueve pues entonces queda visible para el pájaro.

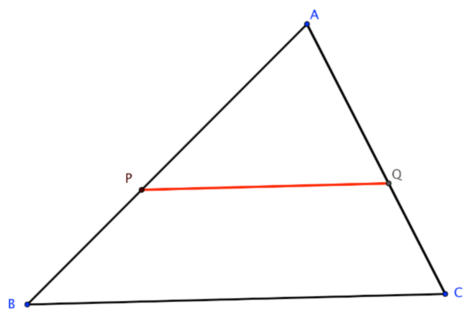
Las posibilidades de manipulación directa de las representaciones crea un sentimiento de realidad material para las representaciones digitales. Para el estudiante se presenta aquí la posibilidad de *sentir* más cercano a sí mismo el objeto a través de esta forma de representación.

5. Reflexiones sobre actividades en el salón de clases

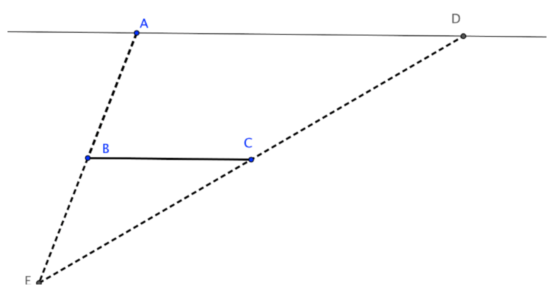
Presentaremos ahora algunos ejemplos con los que hemos trabajado en diferentes experiencias didácticas. Durante la narración iremos comentando sobre las reacciones que han mostrado estudiantes y profesores en servicio a lo largo del desarrollo de las actividades.

En las primeras sesiones de trabajo con geogebra (los participantes tenían ya un conocimiento muy básico del funcionamiento del medio) retomamos resultados que consideramos importantes de la geometría como plataforma para el diseño de las exploraciones que seguirían.

El teorema de Thales sobre proporcionalidad de triángulos:



Dado el triángulo ABC si el segmento PQ es paralelo a la base BC, entonces los triángulos ABC y APQ son semejantes. La recíproca también es cierta: si los triángulos son semejantes entonces PQ es paralela a BC. Es un resultado muy básico pero poderoso. A partir de él exploramos (no era necesario todavía el empleo de geogebra) el siguiente problema: Dada una recta BC y un punto A exterior a ella, trazar por A una paralela a BC. La idea de la solución esperada se cristalizó de la siguiente manera:

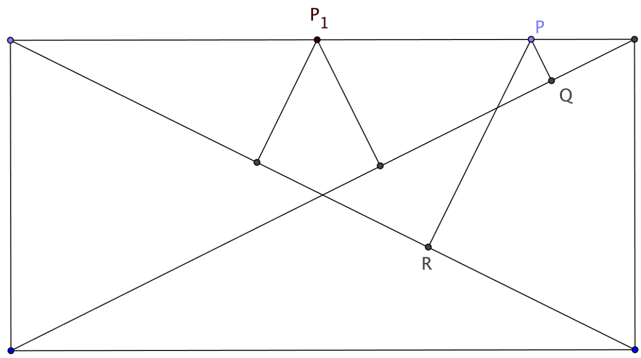


Desde A trazamos el segmente AF con B como punto medio. Desde F trazamos FD con C como punto medio. Entonces, AD es paralela a BC.

Con estudiantes menos preparados la construcción se presentó como una especie de receta asegurando que *AD* era paralela a *BC*. Al proponer que usaran el medio digital para verificar que la "receta" siempre generaba una paralela, varios de ellos cambiaron, sobre la construcción hecha, el punto F y gradualmente se convencieron que no se podía "destruir" el paralelismo. Es interesante ver en acción este empleo del arrastre como mecanismo de validación; desde luego no se pretende aquí insinuar que esto toma el lugar de la prueba deductiva. Sin embargo la fuerza de convencimiento que otorga la acción de tratar de invalidar el paralelismo es suficiente para que los estudiantes acepten el resultado. Cómo comparar esto con la deducción validatoria que puede hacerse a partir del teorema de Thales? Nuestra convicción sobre la prueba deductiva es que vale la pena presentarla si aumenta el nivel de coherencia de los conocimientos que tiene quien aprende. El rigor por el rigor a este nivel no se justifica frente a la necesidad de esclarecer el modo de existencia de los objetos matemáticos, es decir, que el estudiante logre darle un sentido a las manipulaciones que puede ejercer sobre las representaciones que tiene ante sí. En el ejemplo que estamos analizando, la representación que tenemos ante nosotros es una representación ejecutable y por lo tanto, se trata de potenciar el significado matemático que tal representación *captura*. Lo que hicieron los estudiantes, al intentar invalidar la conclusión sobre el paralelismo de *AD*, fue alargar el segmento BC, cambiar de posición el punto *A* y al no lograr la invalidación mencionada aceptan que la construcción de la recta paralela es robusta. *Que no pudieron derrotarla*. Ese nivel de estabilidad frente a las posibles transformaciones que sufra la figura construida es lo que caracteriza a un teorema. Acaso no aumenta esto el nivel de coherencia del conocimiento de los estudiantes? Es una pregunta abierta que no admite una respuesta simplista.

Los cambios en las estrategias de resolución de problemas una vez que trabajamos en un medio dinámico, posiblemente se deban a que la visualización adquiere un papel activo, a que es viable razonar sobre la figura dinámica con la certeza de que se trata de una genuina representación del objeto. De esta manera se abre una ruta hacia una justificación de tintes tradicionales. Nuestra posición es que, cada medio que tiene la capacidad de enunciar significativamente un teorema, debe tener al menos a nivel inductivo la posibilidad de producir un argumento sobre su validez o su coherencia dentro de la franja de conocimientos a la que pertenece. La posición que tiene la visualización va más allá de ser un simple apoyo al razonamiento, en efecto, se constituye en una pieza articuladora de producción del conocimiento.

Trabajando con los profesores, propusimos inicialmente una tarea que pretendía iniciar la exploración del razonamiento dinámico. La tarea consistía en esto (ver la figura que sigue):

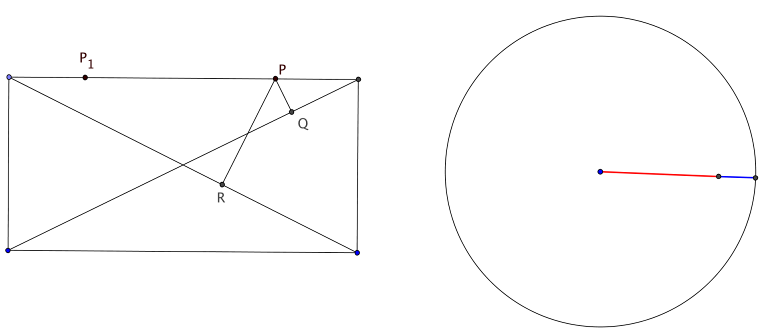


Dado un punto P sobre un lado del rectángulo, sean Q y R los pies de los segmentos perpendiculares desde P a las diagonales. Probar que la suma de longitudes $PQ+PR$ es una constante.

La figura ilustra una posición diferente cuando desplazamos P sobre el lado al que pertenece hasta una posición P1. Desde luego, hay una infinidad. Aquí comprobamos algo que se sabía de antemano:

cada uno de nosotros recicla lo que sabe.

En este caso, los profesores-estudiantes trataron de reciclar lo que sabían del medio estático tradicional trayéndolo a la situación que demandaba un uso del medio dinámico. Empezaron argumentando provisionalmente a partir de la idea de que al avanzar P hacia, digamos, la posición P1, lo que "sube" R sobre su diagonal equivale a lo que "baja" Q sobre la suya. Por lo tanto parecía razonable que la suma $PQ+PR$ fuese constante. Ya tenían una conjetura, ahora había que sustanciarla. Una de las soluciones sugeridas por *la conjetura de la compensación* como la llamaron los profesores fue construir una circunferencia cuyo radio fuese la suma $PQ+PR$ para una primera (arbitraria) posición de P y luego observar qué ocurría al desplazar P sobre su lado hasta una posición P1 arbitraria sobre ese lado. El resultado, como ilustra la figura siguiente es:



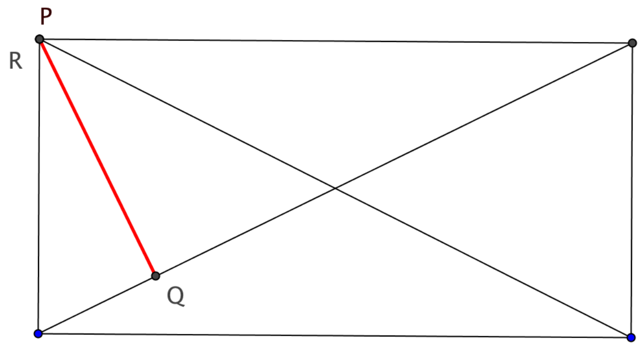
El radio de la circunferencia está formado por dos segmentos congruentes respectivamente con PR y PQ. Al desplazar P podemos observar que la circunferencia permanece inalterada lo cual muestra que $PR + PQ$ es constante. Como se aprecia, la presencia del medio dinámico *invita* a los participantes a reorganizar su conocimiento para adaptarlo y adoptarlo al medio dinámico. No es exagerado afirmar que uno de los efectos tangibles de la mediación digital es que *la interiorización del medio,* en este caso geogebra, *reconfigura las estrategias de resolución de problemas*.

En este ejemplo, la construcción de una verificación en el medio digital es válida como una prueba inductiva, *con alto valor epistémico*. Ha sido muy intensa, en el medio de investigación de nuestra disciplina, la reflexión sobre lo que puede ser aceptable como argumento probatorio en un medio escolar-digital. Insistimos en que una prueba debe ser aquel argumento que aumente el grado de coherencia de los conocimientos que tenga un estudiante. La prueba tiene un contexto y un tiempo, no es un absoluto. Desde luego, después de milenios de matemáticas sobre el papel, transformar esta visión encuentra fuertes resistencias. Vale la pena traer a colación dos visiones diferentes sobre los objetos matemáticos. Una de ellas, de N. Abel quien afirmaba que las series divergentes debían ser expulsadas de las matemáticas; Heaviside, por su parte, afirmaba que si la serie era divergente, entonces se podía hacer algo útil con ella. Es claro que la epistemología de las matemáticas ha recorrido un largo camino y que las pruebas estructurales, deductivas, revelan su sello de legitimidad. Hoy, vista esta situación desde la didáctica, nos parece que un giro más cultural puede ser indispensable. Los *teoremas de existencia de los estudiantes* no pueden ser ignorados.

La narración que aquí presentamos no hace justicia a la riqueza de la discusión de los profesores con el instructor, a la discusión entre ellos y a *los efectos estructurantes* del medio dinámico sobre sus formas de razonamiento. Poco a poco se percibía un cambio sutil en sus formas de pensar, en las maneras como hacían uso de los recursos que el medio les facilitaba. Iban generando nuevas formas de pensar la resolución de problemas y transformando su base de conocimientos.

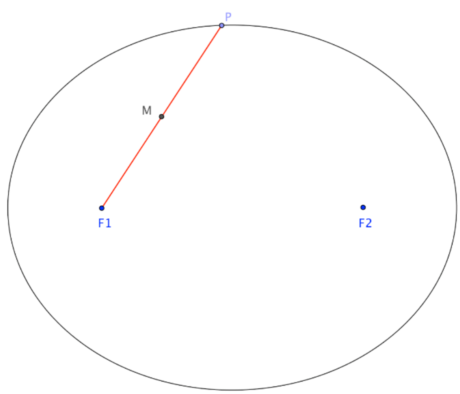
Lo que aquí presentamos consolida la idea de que la visualización no es una ayuda a secas sino parte sustancial del razonamiento. La figura es un instrumento de mediación en el sentido que hemos explicado previamente. Pero las cosas no terminaron aquí. Se tenía una verificación inductiva, empírica de que la suma $PR + PQ$ era una constante, pero ¿qué constante era? Acaso podría saberse a partir de la figura original?

Una profesora participante en la tarea puso en marcha la idea de llevar el punto P hasta uno de los extremos del lado que contenía a P obteniendo la siguiente configuración:



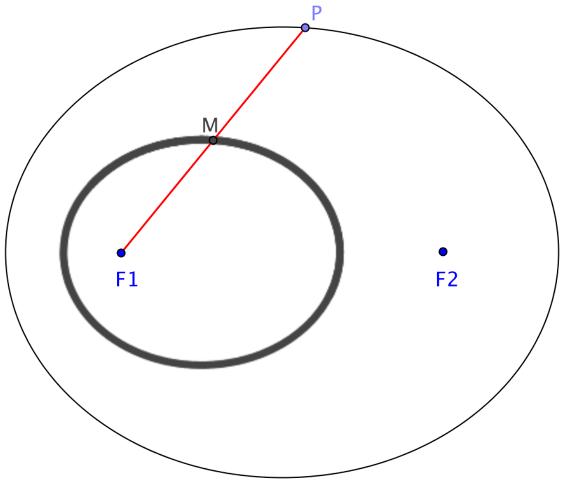
Aquí, los puntos P y R coinciden en el extremo, tal como se aprecia en la figura. La constante era entonces la longitud de PQ. En este momento se propuso a los profesores que demostraran el resultado sobre el papel. Es decir, con sus recursos euclidianos tradicionales. Entonces, la capacidad expresiva del medio digital se hizo palpable.

Continuando con problemas que tuviesen al teorema de Thales como un *mediador* propusimos el siguiente (véase la figura):

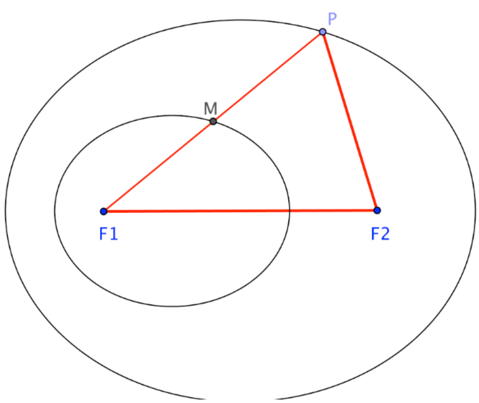


Dada una elipse cuyos focos son $F1$ y $F2$, determinar la trayectoria que sigue el punto medio M del segmento $PF1$ cuando O recorre la elipse.

La capacidad expresiva del medio digital-dinámico sugiere un recurso: activar el trazo de M cuando M recorre la elipse. Entonces se obtiene,



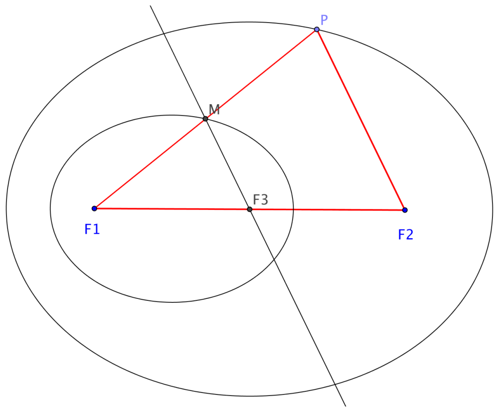
El trazo de M tiene una apariencia elíptica. De hecho, una vez convencidos por lo que veían, los participantes activaron el lugar geométrico (locus) para *manipular* mejor las figuras –aquí cabe mencionar que la sensación de realidad material que genera la representación digital, es muy intensa, tanto que uno se olvida casi que está manipulando una representación y no el objeto matemático así representado. Esto tiene un valor epistémico inequívoco.



Una vez que hubieron trazado el locus, se les sugirió a los participantes que observaran cuidadosamente el triángulo (rojo en la figura anterior) y lo consideraran para explorar esto: *al producir el locus o girar P a lo largo de la elipse, parece que F1 es uno de los focos de la nueva elipse*.

Entonces, si es así, cómo hallar el segundo foco? Es claro que tiene que estar sobre el segmento entre $F1$ y $F2$.

Durante un largo tiempo se suscitaron varias discusiones entre los participantes (parte de lo que hemos denominado *co-acción* en Moreno-Armella & Hegedus, 2009) y final-mente se sugirió considerar el teorema de Thales. Entonces una participante trazó un segmento paralelo a $PF2$ hasta el punto $F3$:



Ahora era claro que $F1$ y $F3$ eran los focos y el teorema de Thales garantizaba que la suma de distancias $MF1 + MF3$ era una constante, cumpliéndose así la definición de elipse de focos $F1$ y $F3$.

La trayectoria que siguieron los participantes en esta actividad puede decirse que es *híbrida* en el sentido que la manipulación digital (i.e.: la exploración inductiva) da pie al recurso de Thales para concluir *formalmente* que el lugar geométrico es una elipse. Entonces, aún para quienes puedan ser más críticos frente a los medios digitales, habrían de plantearse que este medio genera una nueva corriente inductiva en la resolución de problemas. Evidentemente este problema admite varias generalizaciones. Dejamos al lector explorar estas posibilidades.

A medida que las personas penetran en el empleo de estos medios digitales, el proceso de interiorización se consolida y se hace tangible que la forma de razonar y la naturaleza del conocimiento producido son indisociables del instrumento de mediación.

Referencias

M. Donald (2001). *A Mind so Rare*. Norton: New York.

Moreno-Armella & Hegedus, S. (2009). Co-action with digital technologies. *ZDM* 41(4), 505-519.

N. de Grasse-Tyson & D. Goldsmith (2014). *Orígenes*. Paidós: México.

L. Schlain (1998). *The Alphabet versus the Goddess*. Penguin: New York