La fértil sencillez de las irracionalidades enteras y el uso de las prácticas argumentativas en el aula[1]

Carlos Sánchez Fernández

Resumen

La sencillez es uno de los atributos que le dan realce a la argumentación matemática, pero a veces nuestra endeble cultura matemática no nos permite apreciar que un asunto matemático con apariencia sencilla esconde muchas alternativas no menos atractivas que el tema original. Nuestro interés es compartir experiencias en el uso de la historia de la matemática como herramienta didáctica para la elevación de la cultura matemática. Ilustramos nuestras ideas con el tratamiento de algunas propiedades aritméticas relacionadas con las irracionalidades enteras. A través de estos contenidos aparentemente sencillos, pero con diversas alternativas y generalizaciones, pretendemos mostrar, además, que las transformaciones de la práctica matemática han incidido en las prácticas argumentativas.

Palabras clave: argumentación matemática, uso de la Historia de la Matemática, irracionalidades enteras, números metálicos, números de Pisot-Vijayaraghavan.

Abstract[2]

Simplicity is one of the attributes that enhances mathematical argumentation, but sometimes our weak mathematical culture does not allow us to appreciate that a mathematical issue with a simple appearance hides many alternatives no less attractive than the original topic. Our interest is to share experiences in the use of the history of Mathematics as a didactic tool for the elevation of mathematical culture. We illustrate our ideas with the treatment of some arithmetic properties related to irrational algebraic integers. Through these seemingly simple contents, but with various alternatives and generalizations, we also want to show that the transformations of mathematical practice have influenced argumentation practices.

Keywords: mathematical argumentation, use of the History of Mathematics, algebraic integers, metallic means, Pisot-Vijayaraghavan numbers.

1. Acerca de la importancia de las prácticas matemáticas argumentativas

Según la experiencia acumulada hasta el momento, consideramos que deberíamos enfocar una atención prioritaria a lograr que los alumnos, con creciente independencia, aprendan

C. Sánchez
Facultad de Matemática y Computación, Universidad de La Habana, Cuba
csanchez@matcom.uh.cu

[1] Este trabajo corresponde a una conferencia paralela dictada por el autor en la XV CIAEM, celebrada en Medellín, Colombia, del 5 al 10 de mayo de 2019.
[2] El resumen y las palabras clave en inglés fueron agregados por los editores.

Recibido por los editores el 8 de junio de 2019 y aceptado el 23 de julio de 2019.

a razonar lógicamente y se acostumbren a usar criterios científicos a la hora de tomar decisiones. Uno de los medios primordiales para desarrollar este pensamiento científico es a través de las prácticas matemáticas argumentativas para explicar, esclarecer, convencer y no solo para justificar la veracidad de las proposiciones. La experiencia y las reflexiones de muchos especialistas en el tema de la argumentación y la prueba matemática (ver p. e. el *19th ICMI Study* editado por Hanna & De Villiers, 2012) nos hace pensar que en la práctica docente el uso de la argumentación y la prueba matemáticas debe atemperarse tomando en consideración los contextos concretos.

En general, el nivel universitario suele incluir demostraciones, aunque a veces son demasiado formales y pierden atractivo para los jóvenes; el nivel primario frecuentemente -es una pena que no sea siempre- prepara para iniciar las prácticas argumentativas, aprovechando la natural curiosidad de los niños expresada en los insistentes *¿por qué?*, ... pero en el nivel intermedio o secundario ¿qué ocurre? Pues que, con asiduidad, nos olvidamos del valor de la argumentación científica y, por una u otra justificante, no se adiestra convenientemente.

Asumimos que todos conocemos la existencia de diferentes "categorías" en las prácticas argumentativas, que van desde una argumentación informal heurística a una prueba formal totalmente rigurosa, es decir, desde una simple explicación plausible hasta una justificación con toda la precisión lógica. En nuestra opinión, para encontrar diferentes argumentaciones dignas, y modos de presentar estas en un aula, además del conocimiento del grupo de alumnos, los contenidos y las prácticas docentes correspondientes, *nos deberíamos auxiliar de la historia de la matemática*. Y no solo la historia antigua, sino también la historia más reciente, incluidas las aplicaciones prácticas que casi siempre aparecen mucho después. Y esto debe hacerse siempre con adecuación a las circunstancias concretas, haciéndolas más accesibles y atractivas al estudiante en un nivel escolar dado. Un maestro con experiencia realiza *a priori* un análisis de los momentos principales del desarrollo histórico de las pruebas conocidas, realiza la *transposición didáctica* y determina lo que expondrá en el aula. De forma tal que lo *histórico*, *lo lógico* y *lo didáctico* del asunto de la clase quede integrado en una sinergia constructiva.

Es necesario *atemperar* y *acondicionar* el discurso matemático en el salón de clase, de forma que las prácticas argumentativas sean atractivas y eficaces en cada nivel de enseñanza; para esto consideramos que también el recurso de la historia es un ingrediente eficaz. En su origen y desarrollo los hechos matemáticos pasan por diferentes etapas, en la clase no tenemos que reproducir todas estas fases que tienen relación con la actividad investigativa, pero a medida que el conocimiento del maestro sea más amplio y profundo la clase podrá ser más rica y atractiva. Esto favorece el cumplimiento de uno de los principales objetivos del maestro: *facilitar la comprensión del hecho matemático*.

El conocimiento de las diversas pruebas que se han sucedido en la historia nos provee de una cultura matemática sobre el teorema o proposición correspondiente que sobrepasa con creces el simple conocimiento de una sola de las pruebas –sobre todo si la única conocida es la más concisa y más formal–. Por ejemplo, en el texto de Dawson (2015) podemos encontrar razones contundentes para recomendar el conocimiento de diferentes demostraciones de una misma proposición, por muy simple que parezca su enunciado.

Nuestros argumentos sobre este asunto los hemos venido exponiendo en diferentes escenarios y los más recientes se pueden encontrar en Sánchez Fernández (2018) y en Sánchez Fernández & Valdés Castro (2016), aquí solo hemos hecho una breve síntesis de nuestras ideas, antes de pasar al núcleo central de este trabajo: el desarrollo de prácticas argumentativas en el estudio de las *irracionalidades enteras*. A diferencia y como complemento de los planteamientos expresados en nuestros artículos más recientes, aquí intentamos mostrar cómo el proceso combinado del desarrollo del conocimiento científico, dado por *generalización* y por *especialización*, viene acompañado históricamente de una *diversificación* de las prácticas argumentativas, sobre todo a partir de la introducción de la rama conocida como *Matemática Experimental*. Estas ideas centrales se ilustran a través del tratamiento del tema de los números irracionales, asunto que aparece en casi todos los currículos de enseñanza secundaria y es retomado posteriormente en el nivel universitario. Un tema que cuándo se le comprende bien transparenta simpleza e importancia, tanto en el plano didáctico, como en el plano lógico e histórico. Por supuesto, la simpleza y la importancia son atributos muy relativos que dependen del tiempo y del estado de otros ingredientes de la cognición.

Con este objetivo, presentamos las prácticas argumentativas asociadas a tres niveles cognitivos de uno de los tipos más simples de irracionalidades numéricas: las *irracionalidades enteras*. Un primer nivel incluye las irracionalidades obtenidas en la resolución de problemas que conllevan a ecuaciones algebraicas del tipo más simple $x^n - p = 0$, donde p es un número primo; un segundo nivel, más general, de ecuaciones con coeficientes enteros dadas por un polinomio mónico del tipo

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \text{ con primer coeficiente } a_n = 1.$$

En este nivel aparecen los llamados *números metálicos* asociados a polinomios cuadráticos y los números plásticos soluciones de ecuaciones cúbicas, con atractivas propiedades de argumentación simple; en el siguiente y último nivel que trataremos, encontramos a los denominados *números de Pisot-Vijayaraghavan* una clase muy especial de enteros irracionales con unas propiedades topológicas y analíticas más abstractas y por tanto, que necesitan competencias argumentativas más sofisticadas, especialmente del uso del experimento matemático auxiliado por computadoras. La primera parte, que abarca los dos primeros niveles, puede ser motivadora para maestros de secundaria y enseñanza preuniversitaria, mientras que la segunda sirve como motivación para la introducción de temas muy fértiles de álgebra, topología y análisis, asociados al nivel universitario.

2. Las “inexpresables” raíces de los polinomios irreducibles con coeficientes enteros

¿Hay algo más sencillo que resolver ecuaciones como $x^n - p = 0$, donde p es un número entero? En el caso que el entero p sea una potencia enésima de otro entero es sumamente fácil encontrar al menos una raíz. Pero, ¿si p no es una potencia enésima? Aparentemente sigue siendo simple, basta tomar las raíces enésimas del número p, lo que puede reducirse al conocimiento de las raíces enésimas de la unidad. Temprano en la enseñanza secundaria aprendemos que este problema casi nunca tiene una solución racional, es decir, no es un *número expresable* como cociente de dos números enteros. Más adelante comprendemos que este problema sencillo está relacionado con la misma esencia de unos *números inexpresables* que, con aparente desestimación, se acostumbra a llamarles a unos "números irracionales" y a otros, "números complejos".

¿Cómo podemos trasmitir la importancia matemática de estos números inexpresables? ¿Cómo podemos mostrar su riqueza cognitiva sin lastrar su sencillez originaria? ¿Qué debemos revelar en cada nivel educacional? Estas interrogantes y muchas otras se pueden responder mejor con el conocimiento de su historia y de sus diferentes propiedades.

En un principio número y magnitud estaban ineludiblemente ligados. Se suele decir que fue en la Grecia Clásica donde se "descubrieron" los números inexpresables asociados a las magnitudes inconmensurables. Pero mucho antes, los babilonios "inventaron" métodos para representar con cierta precisión las *magnitudes inexpresables* con números enteros o fraccionarios.

Por ejemplo, los babilonios utilizaron la relación pitagórica en triángulos con hipotenusa irracional y sus aproximaciones a las raíces cuadradas usando sucesiones recurrentes con números fraccionarios que pueden considerarse pasos heurísticos hacia el descubrimiento que nunca hicieron. En una tablilla de arcilla, datada en un momento cercano al 1800 a.C., que se conserva en la Universidad de Yale, aparece la aproximación en fracciones sexagesimales para la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles de cateto unitario que con la notación actual es:

$$\sqrt{2} \approx 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} \approx 1,41421296296.$$

Muy cercana al valor aproximado que hoy conocemos en representación decimal

$$\sqrt{2} \approx 1,41421356237.$$

También en Egipto, la India y en China se han encontrado documentos antiquísimos que atestiguan el interés originario de dar un valor aproximado a esos "números inexpresables" de manera racional, aunque ¿no es *completamente racional* buscar una medida aproximada? En muchas culturas antiguas y medievales ese era un procedimiento natural. Pero hoy nos aferramos a desarrollar el origen histórico de los números irracionales mencionando solo la idea del valor exacto inexpresable como cociente de enteros, enfoque que nos llega desde la Hélade Clásica. Por supuesto, esta idea no es descabellada y también podemos utilizarla aderezándola con el condimento histórico. Veamos.

Al parecer fue el pitagórico Teodoro de Cirene (siglo V a. C.), maestro de Platón, uno de los primeros en plantear una argumentación para el estudio de números inexpresables que será recogida en los *Elementos* de Euclides. En particular, con sus conocimientos de geometría demostró que *los lados de los cuadrados cuya área era un número primo eran inconmensurables con el lado del cuadrado de área unidad*. Otro alumno de Teodoro, Teeteto de Atenas (s. IV a.C.) clasificó las irracionalidades. No consideraba lo mismo $\sqrt{17}$, que $\sqrt{17} + \sqrt{13}$ o $\sqrt[3]{1 + \sqrt{17}}$. Esto tiene fácil comprensión si lo llevamos al campo del álgebra de los polinomios con coeficientes enteros: $\sqrt{17}$ es raíz de un polinomio irreducible de segundo grado, $\sqrt{17}+\sqrt{13}$ es raíz de un polinomio de cuarto grado y no menos, $\sqrt[3]{1+\sqrt{17}}$ satisface un polinomio con coeficientes enteros de sexto grado como mínimo.

Platón en su diálogo "Teeteto" glorifica uno de los argumentos más socorridos para probar la irracionalidad de la raíz cuadrada de 2:

> **Demostración** (en su esencia presentada por Platón). Si $\sqrt{2}$ fuese racional representable en la forma $\sqrt{2} = m/n$ con $(m, n) = 1$, se cumpliría $m^2 = 2n^2$, luego m sería par $m = 2k$ y de ahí se obtendría que $2k^2 = n^2$ y n también sería par, contradiciendo la suposición de que m y n no tenían factores comunes.

Desde entonces acá han proliferado las pruebas de la irracionalidad de las raíces de números que no son potencia de números primos. En el caso de la raíz cuadrada de 2, por ejemplo, podemos clasificar los tipos de prueba en cinco clases:

1. Las que como la prueba de Teeteto suponen la representación irreducible como fracción y deducen que esta fracción irreducible es reducible, llegando a una contradicción;

2. Las pruebas basadas en el método de descenso infinito popularizado por el abogado francés Pierre de Fermat en la primera mitad del siglo XVII. Con este método se supone la expresión racional y a diferencia de la prueba según Teeteto, en la argumentación no se contradice tal expresión sino que se prueba la existencia de otra expresión de valor racional menor, proceso que puede continuarse indefinidamente, lo cual es absurdo porque en todo conjunto de números enteros positivos hay un elemento mínimo;

3. Las pruebas visuales sobre la imposibilidad geométrica de encontrar dos cuadrados de lados enteros, tales que el área del mayor duplique el área del menor;

4. Pruebas con argumentos puramente aritméticos, por ejemplo, uno de los argumentos más utilizados se refiere a la expresión de los números en un sistema de base 3, en lugar de la base 10 ordinaria; entonces en tal sistema triádico $\{0, 1, 2\}$, los cuadrados terminan en 0 o en 1, por tanto, no pueden ser iguales al doble de un número cuadrado perfecto;

5. Pruebas que conjugan dos o más de estos procedimientos.

Nos parece conveniente que en el aula de secundaria se manejen varios tipos de argumentación. Por ejemplo, después de hacer referencia al origen del problema y relatar alguna de las anécdotas se puede plantear la prueba como la cuenta Platón, subrayar el basamento en la lógica bivalente para llegar a contradicción. Preguntar si será posible alguna otra prueba que no use el mismo argumento, dejar pensar y al rato, si no hay propuestas, introducir otro argumento, por ejemplo, hacer uso de que el numerador es mayor que el denominador, sea $n = m + p$ para $p > 0$, elevar al cuadrado $m^2 + 2mp + p^2 = n^2 = 2m^2$ e inferir que $m > p$. Consecuentemente, y razonando análogamente, para algún entero positivo $a > 0$, $m = p + a$ y $n = 2p + a$, luego $(2p + a)^2 = 2(p + a)^2 \rightarrow a^2 = 2p^2$ y el proceso puede repetirse indefinidamente: $n > m > a > p > \ldots$ lo que es un absurdo pues todo conjunto de números naturales tiene un elemento mínimo. Seguidamente se puede buscar una interpretación geométrica de esta prueba: si existen dos cuadrados uno teniendo el doble de área que el otro, entonces siempre existe otro par de cuadrados más pequeños con la misma propiedad. En el capítulo 4 del clásico texto de Hardy & Wrigth (1938) se encuentran varias demostraciones y exquisitos comentarios históricos.

El problema enseguida se puede generalizar a la determinación de la no racionalidad de otras raíces cuadradas como $\sqrt{3} \approx 1,73205\,08075$, $\sqrt{5} \approx 2,23606\,79775$ aproximadas por las fracciones $\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780}$ –usada por Arquímedes– y $\frac{682}{305} < \sqrt{5} < \frac{161}{72}$, asociadas a mediciones en triángulos, pentágonos, hexágonos y otras figuras geométricas, tienen también una historia adjunta muy fructífera. Fértiles son, además, las historias asociadas a raíces cúbicas como $\sqrt[3]{2} \approx 1,25992\,10499\ldots$ vinculada con el famoso problema de la duplicación del cubo. Como se narra en muchos textos de Historia de la Matemática en la búsqueda de una solución a este problema, Hipócrates de Quíos probó que era equivalente al problema de hallar dos medias proporcionales entre dos magnitudes x y $2x$. Es decir, encontrar dos segmentos de longitud m y n tales que $\frac{x}{m} = \frac{m}{n} = \frac{n}{2x}$. Tratando de resolver este otro problema fueron introducidas las curvas cónicas por Menecmo de Atenas. La solución se daba por intersección de dos parábolas o por la intersección de una parábola y una hipérbola. Más tarde, se inventaron otras curvas como la concoide y la cisoide con el fin de resolver este problema. Todas estas historias pueden matizar una clase de riqueza cultural y donde además se utilicen diferentes prácticas argumentativas tanto de carácter aritmético (las proporciones) como geométrico (cónicas de segundo grado y curvas de grado superior). La referencia más actual y relativamente simple que conocemos con argumentación general de la irracionalidad de raíces cuadradas es Lord (2018).

De las sencillas raíces cuadradas se puede pasar a otros números aparentemente más complicados, pero que son muy atractivos, como $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ conocido como el *número de oro*, raíz positiva de la ecuación cuadrática $x^2 - x - 1 = 0$. Paso a paso, sin saltos cognitivos, se amplía el campo numérico y el tipo de argumentación; se puede proceder por analogía, por generalización, por adaptación y por sustitución de los argumentos que no sean aplicables en el nuevo campo. De tal forma, con naturalidad, se pasa al tratamiento de problemas más generales con polinomios de coeficientes enteros.

3. Paseo por el universo de los irracionales enteros

Decimos que α es un *entero algebraico* si cumple $\alpha^n + b_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + b_1\alpha + b_0 = 0$, para ciertos b_i todos enteros. Obsérvese que en esta definición se exige que el polinomio sea *mónico*, es decir, el coeficiente principal $b_n = 1$. Por supuesto, los números enteros son enteros algebraicos, pues son solución de la ecuación $x - n = 0$, y son los únicos números racionales que satisfacen una ecuación lineal con coeficientes enteros, por ello se llaman *racionales enteros*, los demás se suelen llamar *irracionales enteros*, denominación por cierto aparentemente contradictoria si nos mantenemos con la mentalidad de la aritmética clásica. Reafirmemos que un aporte significativo de la introducción en el siglo XIX de estos nuevos tipos de números es precisamente el fomento de un cambio radical de la mentalidad dogmática aferrada a los clásicos campos numéricos, donde se cumplen siempre propiedades como la representación única en factores primos o la no existencia de divisores de cero, que en algunas de estas nuevas estructuras numéricas no se conservan.

Consideramos que el tratamiento de estos hechos históricos adaptándolos al contexto escolar tiene un valor didáctico incuestionable. El maestro interesado tiene mucha literatura a su disposición, en particular, recomendamos el segundo capítulo sobre *Arquitectura Aritmética* de nuestra biografía de uno de los responsables en difundir las bondades de tales números algebraicos, el alemán Richard Dedekind (Sánchez Fernández & González Ricardo, 2015, especialmente pp. 81-93). Con la obra de Dedekind se considera que el concepto de número real se separa definitivamente del concepto de magnitud física como se venía haciendo, con razón, desde la antigüedad clásica.

Es sencillo probar que los enteros algebraicos o son racionales enteros o irracionales enteros, es decir, no pueden ser racionales fraccionarios como $\frac{2}{3}$ o $-\frac{7}{5}$. Para argumentar esto, basta suponer $\alpha^n + b_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + b_1\alpha + b_0 = 0$ para $\alpha = \frac{p}{q}$, sustituir en la ecuación y llegar a que el denominador q solo puede ser 1 y el numerador debe ser un entero divisor del término independiente b_0. A este resultado tan sencillo se suele llamar *Teorema de la raíz racional* o se asocia al *Lema de Gauss* para la factorización de polinomios, aunque muchos otros matemáticos lo usaron anteriormente sin formalizar su idea.

Los enteros algebraicos cumplen propiedades interesantes, como es que son estables por adición y multiplicación, por tanto, toda potencia entera de tales números es también un entero algebraico . Existen muchos ejemplos atractivos y simples de irracionalidades enteras que pueden estudiarse en el aula de secundaria, no solo raíces elementales de números libres de potencias. Por ejemplo todos los *números metálicos* definidos como la raíz positiva de la ecuación $x^2 - Nx - 1 = 0$, donde N es un entero no negativo y que son determinados por la fórmula: $\delta_N = \frac{N+\sqrt{N^2+4}}{2}$. Para $N = 1$ obtenemos el número de oro $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,6180339887$. Cuando $N = 2$, $\delta_2 = 1 + \sqrt{2} \approx 2,4142135624$ *número de plata*. Para $N = 3$, $\delta_3 = \frac{3+\sqrt{13}}{2} \approx 3,3027756377$ es conocido como *número de bronce*. Si $N = 4$ obtenemos $\delta_4 = 2 + \sqrt{5} \approx 4,2360679775$ llamado *número de cobre*. Todos los números metálicos se pueden aproximar por cocientes racionales formados por términos consecutivos de *sucesiones de Fibonacci*. Así, por ejemplo, si definimos la sucesión de Fibonacci por recurrencia: $F(1) = F(2) = 1$ y $F(n+1) = F(n) + F(n-1)$, se prueba que $\lim_n \frac{F_{n+1}}{F_n} = \Phi$ y, generalizando, se toma la sucesión recurrente $G(n)$ definida por: $G(n+1) = kG(n) + G(n-1)$ para $n > 1$, $G(1) = G(2) = 1$, que para cada $k > 1$, genera a uno de los miembros de la familia de números metálicos como límite del cociente $\frac{G_{n+1}}{G_n}$. Si no se ha introducido aún el concepto límite, se puede argumentar a través de una práctica computacional sencilla dada la fórmula de recurrencia correspondiente. Esta no es una argumentación formal, pero si se hace con cuidado resulta muy convincente y a los estudiantes de nivel secundario les satisface más que una demostración rigurosa -estas y otras curiosidades de los números metálicos aparecen en Sánchez Fernández & Roldán Inguanzo, 2012, pp. 58-64.

En otra dirección de generalización por analogía, se puede introducir la ecuación cúbica: $x^3 - Nx - 1 = 0$ la cual determina una familia de irracionales enteros conocidos como *números plásticos* pl_N y en el caso $N = 1$ su valor puede expresarse por la fórmula encontrada en el siglo XVI para la solución de la ecuación cúbica:

$$pl_1 = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{3}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{3}}} \approx 1,3247179572.$$

El concepto de número plástico fue descrito primeramente por el monje benedictino holandés Hans van der Laan en 1928 cuando era un novicio aficionado a la arquitectura. Con esta *proporción plástica* diseñó la abadía de San Benito en Holanda. Posteriormente el número plástico pl_1 fue estudiado con mayor profundidad por el arquitecto inglés Richard Padovan (n. 1935), quién definió una sucesión de números enteros cuyos cocientes aproximan a este número plástico. La sucesión de Padovan se define de forma análoga a la sucesión de Fibonacci por medio de una relación de recurrencia

$$A(n+1) = A(n-1) + A(n-2), \text{ para } n > 2 \text{ y } A(1) = A(2) = A(3) = 1.$$

Entonces el cociente $\frac{A_{n+1}}{A_n} \to pl_1 \approx 1,324718$. Por supuesto, mientras mayor sea n, la aproximación del entero irracional por fracciones racionales es más precisa. La argumentación al igual que antes con los números metálicos se puede hacer *experimentalmente* con el uso de los medios de computación electrónica.

En la literatura especializada se puede encontrar familias de números irracionales enteros con una fértil y atractiva historia. Por ejemplo, familias de números plásticos (Spinadel & Buitrago, 2009) con múltiples usos en diseño, arquitectura y en el estudio de cuasicristales. Una de las clases de enteros irracionales que más nos sorprende por sus múltiples aplicaciones a dominios de la ciencia tan disímiles, es la clase más amplia consistente de los números de Pisot-Vijayaraghavan (Bertin et al., 1992).

Hace precisamente un siglo, en 1919, el matemático inglés G. H. Hardy encontró que la clase de los posteriormente denominados *números de Pisot* era efectiva para la solución de problemas de aproximaciones numéricas (Hardy, 1919). Posteriormente el indio Tirukkannapuram Vijayaraghavan, alumno de Hardy, extendió estos resultados (Vijayaraghavan, 1931). Aproximadamente, por la misma época el joven francés Charles Pisot, graduado de la Escuela Normal Superior de París, en su tesis de doctorado (1938) hizo un estudio muy amplio de tales números encontrándoles aplicación en el análisis armónico. Desde entonces en la literatura occidental se les llama números de Pisot y pocas veces números de Pisot-Vijarayaraghavan, por simplificación histórica y retórica, aunque es justo si consideramos que fue Charles Pisot quién les encontró las principales propiedades, los hizo visibles en la literatura científica y fundó un seminario en París con un grupo de discípulos.

Esta clase sorprendente de números irracionales enteros, gracias a los adelantos tecnológicos de las ciencias de la computación, se ha convertido en un modelo ideal para interpretar las características de la estructura ordenada, pero aperiódica de los cuasicristales, rompiendo un paradigma clásico de la cristalografía -un lector curioso puede encontrar agradable la historia matemática de los cuasicristales como es narrada por el brillante matemático ruso Vladimir Igorevich Arnold y que aparece traducida al inglés en Arnold (1990).

Comentemos algunas características de los *números de Pisot* que no hemos encontrado en ningún texto de enseñanza secundaria o universitaria, las cuales nos parecen muy atractivas y además sabemos que son muy útiles para comprender mejor ciertos conceptos de álgebra abstracta y argumentar su importancia dadas sus aplicaciones a problemas ligados a la cristalografía. Ante todo, definamos qué entendemos por *números de Pisot*: son los enteros algebraicos $p > 1$ cuyo polinomio mínimo irreducible no tiene otra raíz (real o compleja) que sea de módulo mayor o igual a 1, es decir, si llamamos *conjugados* de p a todas las otras raíces de su polinomio mínimo, entonces $p > 1$ es un número de Pisot si sus conjugados son todos de módulo estrictamente menor que la unidad. Por ejemplo, si p es un irracional cuadrático tiene un único conjugado irracional entero p' y el par de raíces reales puede ser de solo dos formas:

Caso 1. $(p = a + \sqrt{D} > 1,\ p' = |a - \sqrt{D}| < 1)$ o

Caso 2. $(p = (a + \sqrt{D})/2 > 1,\ p' = |a - \sqrt{D}|/2 < 1)$

Ejemplos de números de Pisot p son el número de oro $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ y el número de bronce $\frac{3+\sqrt{13}}{2}$ en el segundo caso, mientras que el número de plata $1 + \sqrt{2}$ y el número de cobre $2 + \sqrt{5}$ son ejemplos del primer caso. El número plástico pl_1 es un ejemplo de irracional cúbico y sus dos conjugados algebraicos son los respectivos complejos conjugados uno del otro como ocurre con todas las raíces complejas de polinomios con coeficientes reales. Todas estas aseveraciones pueden argumentarse basándose en propiedades simples del álgebra de los polinomios. Se conoce que pl_1 es el mínimo número de Pisot-Vijayaraghavan, es decir entre 0 y $pl_1 \approx 1,3247$ no existe otro número de Pisot, pero esta propiedad no es fácil de argumentar.

Fácil de argumentar es la propiedad que Hardy encontró, sobre la aproximación de números enteros mediante las potencias enteras de un número de Pisot p^n, potencias todas que son también números de Pisot. Como todos sus conjugados tienen módulo menor que la unidad al elevarlos a la potencia $n-$ésima se hacen cada vez más y más pequeños. Además, la suma de todas las potencias de las raíces del polinomio mínimo asociado es un entero, por tanto, se acercan a un determinado número entero y con velocidad exponencial.

Los estudiantes secundarios pueden muy bien apreciar el atractivo computacional de esta propiedad y en particular pueden comprobarla (no demostrarla) tomando las potencias de los números metálicos o plásticos. Podemos observar mejor esta propiedad al hacer una tabla (ver Tabla 1):

Tabla 1. Parte fraccionaria con seis cifras exactas de algunas potencias del número de oro

Potencia	Valor de $\{\Phi^n\}$
10	0,991 869 ...
11	0.005 025...
20	0,999 953...
21	0,003 614...
30	0,999 999...
31	0,000 000...

Se observa en la Tabla 1 que la parte fraccionaria de las potencias impares tiende a cero y que la parte fraccionaria de las potencias pares tiende a uno, por tanto, se subraya que estas potencias se aproximan cada vez más y mejor a números enteros. Algo similar ocurre con todos los números irracionales enteros de Pisot como se puede argumentar refiriéndose a las *identidades de Newton* -que fueron usadas en 1629 por el francés Albert Girard, casi 40 años antes que Newton en 1666- (ver p. e. Mead, 1992).

El conjunto de los números de Pisot, denotado por la letra S, posee una serie de propiedades topológicas que lo hacen atractivo para aplicaciones en diferentes campos del análisis. Por ejemplo, es cerrado en la topología natural de los números reales, encierra a todos sus puntos de acumulación, el más pequeño de estos puntos de acumulación es precisamente el número de oro y entre el número de oro y el número plástico -que es el más pequeño de todos los números de Pisot- existen solo otros 10 números que, evidentemente, son aislados en la topología natural. Las pruebas de estas propiedades necesitan de un conocimiento superior de cuestiones del algebra de los polinomios, análisis y geometría de la recta real y el plano complejo, por supuesto, sale de los límites de este trabajo, aunque lo mencionamos para lectores curiosos que deseen profundizar y adaptarlos para usarlos en sus clases de nivel universitario. El texto de los discípulos de Pisot, escrito después de la muerte de su maestro (Bertin et al,, cuyo capítulo 3 se dedica a los números de Pisot-.

Como hemos querido mostrar las prácticas matemáticas han cambiado en el decurso del tiempo y con estas han evolucionado las prácticas argumentativas y, en general, las prácticas docentes. Con el uso actual de las técnicas introducidas en la llamada *Matemática Experimental* podemos argumentar de manera informal y convencer de la validez de muchos resultados de apariencia complicada, pero fácilmente representables por ecuaciones algebraicas con coeficientes enteros y manejables con sencillos algoritmos al alcance de los jóvenes estudiantes (recomendamos profundizar en estas ideas con el texto de Bailey & Borwein, 2008)

Es perceptible que muchas de las propiedades de los números irracionales salen de los objetivos de la enseñanza secundaria, sin embargo, existen multitud de otras propiedades simples de los números irracionales enteros como hemos visto más arriba. ¿Pero qué les sucede a muchos maestros de nivel secundario que discriminan estos números y prefieren etiquetarlos como “difíciles”, solo porque son *irracionales*? ¿Por qué los profesores de Álgebra Superior en sus cursos sobre polinomios no introducen los polinomios de Pisot asociados a los irracionales enteros de Pisot? ¿No creen ustedes que cuándo se conoce bien su origen y desarrollo lógico-histórico, vislumbramos que su fertilidad nos puede ayudar en la elevación de la cultura matemática de nuestros alumnos y formarlos mejor como ciudadanos útiles?

Referencias y bibliografía

Arnold, V. I. (1990). *Huygens and Barrow, Newton and Hooke: Pioneers in mathematical analysis and catastrophe theory from evolvents to quasicrystals*, Eric J. F. Primrose translator, Dordrecht. Ed. Birkhauser.

Bertin, M. J. et al. (1992). *Pisot and Salem Numbers*. Basel. Springer Verlag.

Bailey, D. & Borwein, J. (2008). *Mathematics by Experiment. Plausible Reasoning in the 21st. Century*. Second Ed. Boca Raton, FL.CRC Press Taylor & Francis.

Borwein, P. (2002). *Computational Excursions in Analysis and Number Theory*. CMS Books in Mathematics. Springer-Verlag. Cap. 3.

Dawson, J. W. (2015). *Why Prove It Again? Alternative Proofs in Mathematical Practice*. Dordrecht. Ed. Birkhauser.

Hanna, G. & Villiers, M. de (Eds.) (2012) *Proof and Proving in Mathematics Education. The 19th ICMI Study*. Dordrecht. Springer-Verlag.

Hardy, G. H. (1919). A problem of diophantine approximation. *Journal Indian Math. Society* 11: 205–243

Hardy, G. H. & Wright, E. M. (1938). *An Introduction to the Theory of Numbers*. Oxford University Press. En su 70 aniversario (2008) apareció una 6ta. ed. complementada por Andrew Wiles et al.

Lord, N. (2018). Another proof of the irrationality of square roots. Descargado de **https://doi.org/10.1017/mag.2018.124** en enero de 2019.

Mead, D.G. (1992). Newton's Identities. *The American Mathematical Monthly* (Mathematical Association of America) 99 (8), 749–751

Sánchez Fernández, C. (2018). ¿Probar o argumentar? ¿Vencer o convencer? Reflexiones sobre las prácticas docentes. *Cuadernos de investigación y formación en Educación Matemática*, año 13, n°17, 17-34.

Sánchez Fernández, C. & González Ricardo, L. G. (2015). *Dedekind. El arquitecto de los números.* Madrid. Ed. Nivola.

Sánchez Fernández, C. & Roldán Inguanzo, R. (2012). *Paseo por el universo de los números.* La Habana. Ed. Academia.

Sánchez Fernández, C. & Valdés Castro, C. (2016). Problematización histórica de temas matemáticos fértiles. *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Ed. Matemática*, n° 46, 09-32.

Spinadel, V. W. de & Buitrago, A. R. (2009). Towards van der Laan's Plastic Number in the Plane. *Journal for Geometry and Graphics*. Vol. 13, N2, 163-175.

Vijayaraghavan, T. (1931). On the fractional part of the powers of a number. *Proceedings Cambridge Philosophical Society* 37, 349-357.