

El Programa Cronotopía: un enfoque modelo-teorético para las matemáticas, su epistemología, su historia y su didáctica¹

Carlos Eduardo Vasco Uribe

Resumen

Desde distintos puntos de vista, en los últimos CIAEM el autor ha venido proponiendo un enfoque global para las matemáticas mismas y para su epistemología, su historia y su didáctica: "El Programa Cronotopía". Este pretende analizar la totalidad sincrética introspectiva que podríamos llamar "mi experiencia espacio-temporal personal y privada", para tratar de capturar algunas características de la construcción de mi propio espacio-tiempo mental que llamo "mi cronotopo". Se presentan algunos avances logrados hasta ahora en este programa de investigación —en el sentido de Lakatos, Balzer, Moulines y Sneed— para desarrollar una disciplina académica que se llamaría "la Cronotopía". El Programa Cronotopía pretende reformular las matemáticas mismas desde esta disciplina, en particular la Astronomía, la Geometría y la Aritmética antiguas, y toda la teoría formal de procesos y sistemas, con sus sustratos, sus estructuras y sus dinámicas, para reorientar así su epistemología, su historia y su didáctica.

Palabras clave: epistemología de las matemáticas, historia de las matemáticas, didáctica de las matemáticas, teoría general de sistemas, modelos y teorías.

Abstract

From different viewpoints, in the last few IACME-CIAEM conferences the author has been formulating a global approach to Mathematics, its Epistemology, its History and its Didactics: "The Chronotopy Program". The Chronotopy Program intends to analyze the introspective syncretic totality we might call "my personal, private spatio-temporal experience", to try to capture some characteristics of the construction of my own mental space-time I name "my chronotope". This lecture synthesizes some advances achieved up to now in this Research Programme —in the sense of Lakatos, Baltzer, Moulines and Sneed— in order to develop an academic discipline that would be named "Chronotopy". The Chronotopy Program intends to reformulate Mathematics itself, in particular, ancient Astronomy, Geometry and Arithmetic, and the whole formal theory of processes and systems with their substrates,

C. E. Vasco

Doctorado Institucional en Educación DIE, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia
carlovasco@gmail.com

¹ Este trabajo corresponde a una conferencia paralela dictada por el autor en la XV CIAEM, celebrada en Medellín, Colombia, del 5 al 10 de mayo de 2019.

Recibido por los editores el 14 de junio de 2019 y aceptado el 27 de julio de 2019.

Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática. 2019. Año 14. Número 18. pp 191–198. Costa Rica

structures, and dynamics, in order to reorient accordingly its Epistemology, its History and its Didactics.

Keywords: epistemology of mathematics, history of mathematics, didactics of mathematics, general systems theory, models and theories.

1. Introducción al cronotopo, la Cronotopía y el Programa Cronotopía

El "Programa Cronotopía" se propone construir una ciencia —en el sentido de una disciplina académica o saber explícito, serio y disciplinado que pretende pasar de *doxa* a *episteme*— acerca de todos los aspectos del espacio-tiempo mental interno y el externo, comenzando por los aspectos directa e intuitivamente auto-inspeccionables del interno.

Así pues, la Cronotopía estudia, ante todo, el espacio-tiempo mental interno del sujeto-agente noético-semiótico que trata de practicar esa disciplina, al que, siguiendo una sugerencia de Bakhtin, llamo "mi cronotopo", utilizando las raíces griegas de tiempo-chronos y de espacio-topos.

En mi cronotopo interno parecen fundirse como totalidades indiferenciadas —"sincréticas", diría Piaget al hablar del "sincretismo infantil", o los antropólogos que estudian el sincretismo religioso— el espacio, el tiempo, los cuerpos, los líquidos, el cambio y el movimiento (ver Piaget y García, 1982). Ese trasfondo difuso es el que me permite representarme, imaginarme o *modelar* mentalmente los procesos externos y representarme a mí mismo en forma privada el mundo externo por medio de distintas imágenes y modelos mentales imaginados e imaginarios que proyecto sobre ese trasfondo o que parecen surgir espontáneamente de él. Es en ese trasfondo en donde cada uno de nosotros —al menos yo mismo— se imagina todos los aspectos de las matemáticas antiguas y modernas como ciencias formales, y todos los aspectos de la física antigua o astronomía y la física moderna como ciencias fácticas.

Esos modelos mentales imaginados guían mi actividad, y continuamente tengo que "echarlos a correr" ("run" en el sentido de la informática) para "navegar" en el mundo externo, poniéndolos en marcha rápidamente y conectándolos de alguna manera con mis músculos y mis miembros para poder sobrevivir.

Para decirlo con una sola imagen, supongamos que yo vivo en una casa de dos pisos. El Programa Cronotopía me dice que yo no subo y bajo las escaleras de mi casa, sino que subo y bajo por la imagen sensomotriz de las escaleras que forma parte del modelo mental de mi casa. Para las matemáticas, el Programa Cronotopía me dice que yo no cuento, mido y juego con las figuras geométricas, las letras y los números en las superficies planas de los libros, los cuadernos o los tableros, sino que manipulo imágenes tridimensionales en mis modelos mentales cronotópicos en mi cerebro y trato de externalizarlas con palabras, gestos y dibujos para examinarlas mejor yo mismo y compartirlas con otros.

Una primera conclusión podría ser que en el Programa Cronotopía no hay números reales distintos de los imaginarios: todos son imaginarios e imaginados. Si usted considera que sus imágenes mentales son reales en su cerebro, entonces, para usted también todos los números imaginarios serían reales en ese sentido.

2. Un poco de historia de la especie "sapiens" del género "Homo"

Una vez que algunas especies de un cierto género de antropoides, primates, homínidos u homininos lograron ir separando tiempos para el ocio, el disfrute, el descanso, el ritual, la fiesta, la música y la danza, y en esos ratos de ocio empezaron a dedicar más y más tiempo para la reflexión mental sobre todas esas actividades conscientes y sobre los sueños diurnos y nocturnos, se fueron perfeccionando los lenguajes análogos multimodales de todas las artes y afinando sus productos. Más tarde se fue configurando el lenguaje articulado o digitalizado o cuantizado en sonidos discretos, inicialmente sílabas, que permitieron el cuento, la poesía y el teatro para intentar expresar en forma externa y pública las impresiones, representaciones y valoraciones internas de los fenómenos externos perceptibles directamente por el cerebro de cada uno de los miembros de esa especie privilegiada. No sabemos prácticamente nada acerca del espacio, el tiempo, el cambio y el movimiento "allá afuera", pero sí podemos analizar el cronotopo interno de cada uno y tratar de "comparar notas" con lo que nos externalicen los otros miembros de nuestra especie.

Se fueron configurando así múltiples tallas, pinturas, grabados, estatuas y otras construcciones táctiles y visuales, que en la Cronotopía se llaman "las grañas": dibujos, rasguños, pinturas, esculturas y diagramas que permiten externalizar y hacer públicas las imágenes y modelos mentales de los cerebros cada vez más grandes de los especímenes del género "Homo". Al mismo tiempo se inventaron múltiples narrativas, relatos, admoniciones, prescripciones e instrucciones acerca del espacio y el tiempo, los usos y costumbres, que en la Cronotopía se llaman "las logías": sartas de sonidos, sílabas y palabras articuladas que nos permiten compartir las imágenes y modelos mentales entre los miembros cercanos de nuestra especie "sapiens".

Esas logías y grañas comienzan a ayudar a nuestros antepasados a hacer mejores refugios, a cazar con más eficacia y menos riesgos, a domesticar plantas y animales, a perfeccionar herramientas, a desarrollar la agricultura y a construir las primeras edificaciones y los primeros asentamientos o ciudades. De eso no hace mucho tiempo: menos de diez mil años.

Hace solo cinco o seis milenios, con la invención de la escritura o "logografía" —que es la graña de las logías— empiezan las primeras civilizaciones, se consolidan las élites y las castas sacerdotales y se inician los primeros imperios. Se perfeccionan las medidas y los instrumentos de medición, los números y los cálculos o cuentas, que en la Cronotopía se llaman "las metrías" y se van multiplicando las expresiones de las regularidades, leyes, normas y esquemas que en la Cronotopía se llaman "las nomías".

En menos de mil años se desarrollaron simultáneamente la Física, la Astronomía, la Geometría y la Aritmética antiguas en la China, la India y Mesopotamia. Hace unos 4000 años pasaron estos saberes a Egipto, y hacia el año 700 A.C. a toda el Asia Menor y a las ciudades del Peloponeso, sobre todo a Atenas y, más tarde, volvieron a Egipto: a Alejandría. Ya desde esa misma época se extendieron y refinaron esos saberes a toda la Magna Grecia mediterránea, inicialmente con Tales y Pitágoras, culminando con los maestros atenienses, alejandrinos y sicilianos, entre los que sobresalen Euclides y Arquímedes.

Desde el punto de vista de la Cronotopía, excepto por el desarrollo de mejores tecnologías, es poco lo que han progresado la Astronomía, la Geometría y la Aritmética que practicamos los matemáticos en nuestros modelos mentales cronotópicos. Más bien podría decirse que desde las aritméticas de Boecio y Nicómaco en la Edad Media europea del año 400 al año 1600, y en todos los 300 años desde 1600 hasta el "Programa de Erlangen" de Lie, Klein y Poincaré en 1872 (período que algunos llaman "las Matemáticas Modernas" o "de la Modernidad"), con muy contadas excepciones de matemáticos geniales, poco se progresó en ese mundo mental tridimensional que estudia, analiza y trata de reconstruir y practicar el "Programa Cronotopía".

Esas externalizaciones de los cronotopos mentales de los que llamamos desde la Antigüedad "sabios", "astrólogos", "gurús" o "magos" hasta el Renacimiento europeo de los siglos XV y XVI conformaban las únicas ciencias entonces conocidas.

Antes del año 1600, en la Edad Media y en el Renacimiento europeos no se encuentra ningún uso de la palabra "ciencia" en el sentido actual. Solo después de la invención de la imprenta y la expansión de los libros impresos comenzó la Ilustración de los siglos XVI y XVII. A comienzos del siglo XVII se configuró en Europa central "la ciencia nueva" de los fenómenos terrestres y celestes estudiados por la astronomía de Copérnico, Galileo y Tycho Brahe. Esa "nueva ciencia" que se anuncia con Galileo y empieza a balbucear con Descartes, se formuló explícitamente en Inglaterra con el "Novum Organon" de Francis Bacon,² quien pretendió desplazar al antiguo "Organon" de Aristóteles y a toda la sabiduría filosófica y astronómica medieval. Su primer gran producto fue la Mecánica newtoniana, refinada en la Mecánica analítica leibniziana y lagrangiana. Luego vino la explosión científica del siglo XIX con las teorías del campo electromagnético de Maxwell y la termodinámica de Clausius, Joule y Helmholtz. A comienzos del siglo XX surgen las teorías de la relatividad de Lorenz, Poincaré y Einstein. Poco después, aparecen en solo dos años tres variantes de la Mecánica cuántica: la ecuación de Schrödinger (en 1926), la mecánica matricial de Werner Heisenberg (en 1927) y las ecuaciones de Pauli y Dirac (en 1928).

3. Un poco de historia autobiográfica

Este intento que guía el Programa Cronotopía —el de reconstruir todas las matemáticas antiguas y modernas a partir de mis propios modelos mentales que puedo examinar y analizar en mi cronotopo mental privado— tiene ya una larga historia en mi vida académica. Comenzó con mi tesis de pregrado en filosofía sobre el espacio-tiempo en la Relatividad

² Francis Bacon, conde de Verulamio, se propuso elaborar una reestructuración de lo que hoy llamamos "ciencias" en su *Instauratio magna*, que tenía varias partes. En 1620 publicó dos libros de aforismos sobre la interpretación de la naturaleza y el reino humano, que llamó *Novum Organum sive indicia vera de interpretatione Naturae*. Esta obra, con la de William Gilbert en 1600: *De Magnete, Magneticisque Corporibus, et de Magno Magnete Tellure*. London: Peter Short, y con cuatro escritos de Galileo entre 1610 y 1638 (1610: *Sidereus Nuncius*; 1623: *Il Saggiatore*; 1632: *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo*; 1638: *Discorsi e Dimostrazioni Matematiche*, intorno a due nuove scienze) pueden considerarse los pilares fundamentales que en una sola generación establecieron "la nueva ciencia" en el sentido actual de esa palabra. Antes de 1600 no se encuentra diferencia entre conocimiento y ciencia, y se utilizaba para todo la misma palabra: "scientia".

Especial, dirigida por mi maestro Carlo Federici en 1960. Después, continuó con mi tesis de doctorado, que terminé en 1968, en la que analicé todas las posibles fórmulas algebraicas que combinaran productos conmutativos o no, asociativos o no asociativos, de dos y tres variables, sin importar su interpretación sino solo sus propiedades formales. Por eso llamo a esa rama del álgebra no asociativa "el álgebra abstracta e inútil", pero puedo garantizarle al lector o lectora que ha sido muy apasionante y divertida.

Cuando regresé a Colombia en 1971, empecé a trabajar de nuevo con mi antiguo maestro Carlo Federici, colaborándole en el Instituto de Ciencias del Instituto Colombiano de Pedagogía Icolpe de 1972 a 1976, y luego, de 1976 a 1978, en la recién creada Dirección General de Capacitación y Perfeccionamiento Docente, Currículo y Medios educativos del Ministerio de Educación Nacional de Colombia en Bogotá. También encontré un nuevo gran maestro, el Dr. Alberto Campos del Departamento de Matemáticas y Estadística de la Universidad Nacional de Colombia en Bogotá. El Dr. Campos me invitó a colaborar en algunos de los cuatro cursos de Lógica y Matemática I a IV que él había diseñado para los estudiantes de Filosofía de la Universidad Nacional.³ Sin los cursos, discusiones y escritos de Alberto Campos de 1972 a 1992, no me hubiera adentrado en la historia de las matemáticas, comenzando desde los Presocráticos, Tales, Pitágoras y Euclides; pero con sus aportes, me atreví a preparar y escribir mi trabajo de ascenso sobre la historia del álgebra del Renacimiento, y desde entonces no he dejado de estudiar y disfrutar la historia de las matemáticas, su epistemología, su práctica y su didáctica.

En especial, con el Programa Aritmo-Geométrico pitagórico que aprendí con el Dr. Campos, he venido tratando de reconstruir las matemáticas a partir de la Astronomía Antigua, mucho más antigua que Tales y Pitágoras, descubriendo cada vez más profundidad en la teoría eudoxiana de las razones, las proporciones y las desproporciones, en la de las razones cruzadas, la armonía y la anarmonía.

Sin los cursos de filosofía y epistemología de las matemáticas que el Dr. Campos logró establecer en la Universidad Nacional de Colombia en Bogotá, y sin las oportunidades de dirigir yo mismo algunos de esos cursos, no hubiera empezado a trabajar yo mismo y a enseñar en distintas universidades cursos de epistemología de las matemáticas en los que presentaba las cuatro escuelas dominantes en los siglos XIX y XX: el Platonismo, el Formalismo, el Logicismo y el Intuicionismo y, luego, otros cursos más generales de epistemología.

En esos cursos y lecturas fui impulsado y retado por el maestro Alberto Campos y por mi otro gran maestro, Carlo Federici, a intentar formular mi propia filosofía de las matemáticas de tal manera que, teniendo en cuenta las cuatro escuelas de filosofía de las matemáticas, el Platonismo, el Logicismo, el Formalismo y el Intuicionismo, lograra superar sus vacíos y limitaciones, ante todo para tener en cuenta la producción de nuevas matemáticas del siglo XX desde el "Programa de Erlangen" de Félix Klein en 1872.

³ El Dr. Alberto Campos Sánchez imprimió una edición mecanografiada de sus notas de clase en dos tomos, *De Pitágoras a Euclides* y *De Euclides a Hilbert y Bourbaki*. Posteriormente, en 1994 publicó una revisión de esa obra en la Universidad Nacional de Colombia en Bogotá: *Axiomática y geometría: desde Euclides hasta Hilbert y Bourbaki*.

El profesor Fernando Zalamea fue el que señaló la ausencia de las matemáticas más avanzadas de todo el siglo XX en los libros, la historia y la filosofía de las matemáticas, y quién lo creyera, hasta en la docencia de las matemáticas universitarias en toda Latinoamérica. En todos los currículos de la educación media o bachillerato y en los de los cuatro primeros semestres de las universidades, solo aparecen matemáticas elaboradas *antes* del final del siglo XIX.

El profesor Zalamea me ganó muy pronto la carrera de producir una nueva filosofía de las matemáticas que incluyera las matemáticas de 1870 año 2000, cuando publicó su filosofía sintética de las matemáticas (Zalamea, 2009). Apenas ahora, 50 años después de ese remoto comienzo con mis maestros Federici y Campos, y diez años después del desafío que me lanzó la filosofía sintética de Fernando Zalamea, estoy intentando configurar una filosofía propia que llamo "sincrético-analítica", basada en tres teorías generales: la de Procesos y Sistemas (como Metafísica), la de Modelos y Teorías (como Metagnósica) y la de Representaciones e Interpretaciones (como Metasémica).

La filosofía que sustenta el Programa Cronotopía, que propongo llamar "Filosofía Sincrético-Analítica" para distinguirlas de las filosofías analíticas y sintéticas, se puede resumir en esas tres partes: su Ontología con la Teoría General de Procesos y Sistemas (basada en von Bethalanffy, 1950/1976 y 1979; Klir, 1972; Vasco, 1980, 1991, 1995), su Gnoseología y su Epistemología con la Teoría General de Modelos y Teorías (Lakatos, 1978; Balzer, Moulines & Sneed, 1988; Balzer & Moulines, 1996; Sneed, Moulines & Balzer, 2000; Díez & Moulines, 2003; Chang & Keisler, 1973; Vasco, 2013; 2014; 2016) y su Semiología con la Teoría General de Representaciones e Interpretaciones, basada en Charles Sanders Peirce, pero sobre todo en Duval (1995/2004; 2017) y en D'Amore, Fandiño & Iori (2014).

La idea central del Programa Cronotopía es la de volver a examinar la lógica, las matemáticas, la teoría de la información y la física antigua y nueva, comenzando no desde la ciencia actual de los siglos XX y XXI, sino desde la Astronomía Antigua, pasando por Heráclito, Parménides y Zenón, por Tales, Pitágoras, Eudoxo, Euclides, Apolonio y Arquímedes, hasta las modernas teorías cosmológicas, relativistas y cuánticas. No se trata de preguntarse si son verdaderas o no, ni quién inventó qué y en dónde, sino de reinventarlas yo mismo en mi propio cerebro.

Se trata de reconstruir individualmente las ciencias que Federici llamaba "formales y fácticas pre-antrópicas" —o por lo menos las abióticas— no solamente desde el registro escrito acumulado en los 25 siglos anteriores, sino desde su reinterpretación interna en los modelos mentales cronotópicos que fabrica incansablemente esa maravillosa imaginación personal y privada mía, mi "máquina de sueños". Lo que me da la ilusión de avanzar en este programa (claramente megalomaniaco) es que confío en que cada niño o niña, adolescente o persona adulta neurológicamente sana tiene una máquina de sueños igual o mejor que la mía. No creo poder enseñarle gran cosa a ninguno de ellos y ellas, pero sí me considero capaz de atender a sus intentos de explicitar sus modelos mentales, a hacerles preguntas que los lleven a poner en ejercicio su propia máquina de sueños y a disfrutar esa gimnasia mental que es francamente adictiva. El Programa Cronotopía propone nada menos que esa adicción a las matemáticas mentales es la más apropiada para evitar o superar cualquier

otra adicción a la que se sientan inclinados los y las jóvenes del siglo XXI. Para ejercitarme en la Cronotopía, trato de mirar de lado y de reojo, escudriñando alrededor de mis modelos mentales multimodales, el trasfondo espaciotemporal en el que parecen estar inmersos. A ese trasfondo difuso lo llamo con Michail Bakhtin "mi cronotopo mental".

Consecuentemente, llamo a este programa que he venido proponiendo desde hace unos 20 años "el Programa Cronotopía", porque se trata de la vivencia subjetiva de construir y examinar los modelos mentales que surgen en mi cronotopo mental, personal y privado, y de "echar teorías" sobre ellos (ver Vasco, 2006; 2011).

Así trato de reconstruir en poco tiempo las largas cuatro fases por las que supongo va pasando toda ciencia del pasado o del futuro: la acumulación de logías y graffas, como serían la Cronología y la Cronografía para las vivencias del tiempo y la Topología y la Topografía para las vivencias del espacio. Estas dos fases se podrían llamar retrospectivamente "pre-científicas", para avanzar luego en el desarrollo de las dos fases de consolidación científica: las métricas o las metrías, como la Cronometría y la Topometría, las que nos permiten establecer las regularidades, patrones, esquemas, leyes o nomías, que configurarían, en nuestro caso, la Crononomía y la Toponomía. Así se avanzaría en una Cronotoponomía integrada: la Cronotopía del futuro.

Mi conjetura actual y mi apuesta de vida en los pocos años que me queden, es que en el avance de la tercera a la cuarta fase del Programa Cronotopía, que consiste en ir perfeccionando las metrías para pasar a la síntesis de las nomías para configurar esa futura disciplina, la Cronotopía, se sintetizarían de nuevo, –desde la Astronomía Antigua– todas las ramas de lo que ahora llamamos las matemáticas, la lógica, la teoría de la información y la física matemática, tanto la clásica como la relativista y la cuántica, incluyendo la cosmología o astrofísica. Esta ontología sincrético-analítica de procesos y sistemas, con las tres teorías generales (la de Procesos y Sistemas TGPS, la de Modelos y Teorías TGMT y la de Representaciones e Interpretaciones TGRI) tomaría lo mejor del Platonismo, el Logicismo, el Formalismo y el Intuicionismo para formular una filosofía de las matemáticas que podríamos llamar "modelo-teorética".

Referencias y bibliografía

- Balzer, W., Moulines, C. U., & Sneed, J. D. (1988). *An architectonic for science: The Structuralist Program* (Synthese Library, 186). Dordrecht: Kluwer.
- Balzer, W., & Moulines, C. U. (1996). *Structuralist theory of science: Focal issues, new results* (Perspectives in Analytical Philosophy, Bd. 6). New York/Berlin: De Gruyter.
- Bertalanffy, L. von (1976). *Teoría General de los Sistemas: Fundamentos, desarrollo, aplicaciones*. México: Fondo de Cultura Económica. (Obra original publicada en 1950).
- Bertalanffy, L. von (1979). *Perspectivas en la Teoría General de Sistemas*. Madrid: Alianza.
- Chang, C. C., & Keisler, H. J. (1973). *Model theory*. Amsterdam: North-Holland.
- D'Amore, B., Fandiño, M. I., & Iori, M. (2014). *Semiótica en la didáctica de la matemática*. Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio.
- Díez, J. A., & Moulines, C. U. (2003). *Fundamentos de filosofía de las ciencias*. Barcelona: Ariel.

- Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. (2a. ed. Trad. Myriam Vega Restrepo). Cali: Peter Lang/Universidad del Valle. (Obra original publicada en 1995: *Sémiosis et pensée humaine*. Bern: Peter Lang).
- Duval, R. (2017). *Understanding the mathematical way of thinking: The registers of semiotic representations*. Berlin, New York, etc.: Springer-Verlag.
- Klir, G. J. (Ed.). (1972). *Trends in General Systems Theory*. New York: John Wiley & Sons.
- Lakatos, I. (1978). *La metodología de los programas de investigación científica y Matemáticas, ciencia y epistemología*. Madrid: Alianza Editorial.
- Piaget, J., y García, R. (1982). *Psicogénesis e historia de la ciencia*. México: Siglo XXI.
- Sneed, J. D., Moulines, C. U., & Balzer, W. (2000). *Structuralist knowledge representation. Paradigmatic examples*. (Poznań Studies in the Philosophy of the Sciences and the Humanities 75). Poznan: Rodopi.
- Vasco, C. E. (1980). Teoría de sistemas y metodologías científicas. *Ciencia, Tecnología y Desarrollo*, 4(4), 463-482.
- Vasco, C. E. (1991). Conjuntos, estructuras y sistemas. *Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales*, 18(69), 211-223.
- Vasco, C. E. (1995). La teoría general de procesos y sistemas. En: Misión Ciencia, Educación y Desarrollo, *Educación para el desarrollo* (Informes de Comisionados I. Colección Documentos de la Misión, Tomo 2, pp. 377-652). Santafé de Bogotá: Presidencia de la República-Consejería Presidencial para el Desarrollo Institucional-Colciencias.
- Vasco, C. E. (2006). Cronotopía: Un «Programa de Bogotá» para lo que se suele llamar «Geometría». En C. Ruiz et al. (Eds.), *Memorias: XVI Encuentro de Geometría y sus aplicaciones - IV Encuentro de Aritmética* (Bogotá, Junio 23-24-25 de 2005, vol. 1, pp. 1-28). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.
- Vasco, C. E. (2011). La cronotopía, antes y después de la geometría. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática* (Costa Rica), 6(9), 77-91. Disponible en el URL: <http://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/6961>
- Vasco, C. E. (2013). La interacción entre modelos y teorías en la enseñanza de la cronotopía. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*. Costa Rica 8(11), 133-148. Disponible en el URL: <http://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/14721>
- Vasco, C. E. (2014). Procesos, sistemas, modelos y teorías en la investigación educativa. En C. J. Mosquera (Comp.). *Perspectivas educativas. Lecciones inaugurales, N. 1* (pp. 25-79). Bogotá: Universidad Distrital-Doctorado Interinstitucional DIE. Disponible en el URL http://die.udistrital.edu.co/publicaciones/perspectivas_educativas
- Vasco, C. E. (2016). Matemáticas Modelo-Teóricas: un programa neo-estructuralista para las matemáticas, su historia, su epistemología y su didáctica en el siglo XXI. Conferencia invitada en la XIV CIAEM de Tuxtla Gutiérrez (Chiapas) en 2015. La primera parte pp. 1-15, fue presentada parcialmente en la ENHEM 3, Cali, 28 de octubre de 2010. La segunda parte: pp. 14-27 con correcciones y complementos, fue presentada en la ENHEM 4, Cali, 10 de octubre de 2013. Está disponible en el URL <https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/23956>
- Zalamea, F. (2009). *Filosofía sintética de las matemáticas contemporáneas*. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.