Cuadernos
de Investigación y Formación
en Educación Matemática

e-ISSN en línea: 2215-5627
Impresa: ISSN 1659-2573
Vol: 17 · N°. 2 · 2024
35-62
Recibido: 09/01/2024
Aprobado: 08/04/2024

Artículos de investigación

COMPRENSIONES ACERCA DE LOS ERRORES QUE COMETEN LOS ESTUDIANTES AL RESOLVER ECUACIONES CUADRÁTICAS: UNA EXPERIENCIA DE ESTUDIANTES PANAMEÑOS

UNDERSTANDINGS ABOUT THE ERRORS THAT STUDENTS MAKE WHEN SOLVING QUADRATIC EQUATIONS: AN EXPERIENCE OF PANAMANIAN STUDENTS

Mitzela Barrera González[1]
ORCID iD: https://orcid.org/0009-0007-0238-0712

RESUMEN

En la educación media es común observar deficiencias en diferentes áreas de la matemática; no solo en contenidos correspondientes al nivel que se estudia, sino también en contenidos relacionados con conocimientos previos que se enseñan en la educación básica general. Este artículo presenta parte de los resultados obtenidos en una investigación aplicada a 30 estudiantes de 10° de media bachillerato del sistema educativo público panameño con el objetivo de analizar los errores que presentan al resolver ecuaciones cuadráticas utilizando los tres métodos contemplados en el currículo: factorización, completar cuadrados y la fórmula general, a la luz del análisis de errores de Cury. Para la recogida de los datos se aplicó una prueba escrita y se realizaron entrevistas a seis estudiantes, para la comprensión de las resoluciones de los ejercicios de la prueba aplicada.

Los resultados principales mostraron que los estudiantes presentan dificultad en la aplicación de los diferentes métodos debido a la poca destreza en el manejo de contenidos correspondientes tanto al nivel que cursan, 10°, como a contenidos previos pertenecientes a niveles inferiores. Estos últimos fueron los más predominantes; entre ellos, la poca destreza en el uso del lenguaje algebraico. También se observó que prefieren utilizar la fórmula general en lugar de los otros dos métodos, pero presentan deficiencias en el uso de fórmulas. Se concluye que los errores presentados por los estudiantes de 10°al resolver ecuaciones cuadráticas, si bien es cierto indican dificultad en los algoritmos de los métodos estudiados para la resolución de estas, en su mayoría revelan deficiencias relacionadas con contenidos que se enseñan en la educación básica general es decir en conocimientos previos.

Palabras clave: análisis de errores, educación secundaria, álgebra, investigación educativa, Panamá.

1 Departamento de Matemática del Instituto, Profesional Técnico e Industrial de Aguadulce, Ministerio de Educación, Coclé, Panamá. Correo: mitzela1831@gmail.com

ABSTRACT

In secondary education it is common to observe deficiencies in different areas of mathematics, not only in content corresponding to the level being studied but also in content related to prior knowledge taught in general basic education. This article presents part of the results obtained in research applied to 30 10th grade high school students of the Panamanian public educational system with the objective of analyzing the errors they present when solving quadratic equations using the three methods contemplated in the curriculum: factorization, completing squares and the general formula, in light of Cury's error analysis.

To collect the data, a written test was applied, and interviews were conducted with six students, to understand the resolutions of the exercises of the applied test.

The main results showed that students have difficulty in applying the different methods due to poor skill in handling content corresponding to both the level they are studying, 10th, and previous content belonging to lower levels, the latter being the most predominant, mentioning, among them, the little skill in the use of algebraic language. It was also observed that they prefer to use the general formula instead of the other two methods, but they have deficiencies in the use of formulas. It is concluded that the errors presented by 10th grade students, although it is true that they indicate difficulty in the algorithms of the methods studied, the vast majority reveal deficiencies related to contents that are taught in general basic education, that is, in prior knowledge.

Keywords: error analysis, secondary education, algebra, educational research, Panama.

1. INTRODUCCIÓN

Las deficiencias que presentan los estudiantes de 10° (jóvenes entre 15 y 16 años) han sido motivo de preocupación para el departamento de matemática del IPTIA[2] a lo largo de los años, ya que ocasionan un alto porcentaje de fracaso en este nivel, sobre todo en el área de Algebra. Entre los contenidos de 10° que presentan mayor dificultad está la resolución de ecuaciones cuadráticas por los diferentes métodos, pues se les dificulta encontrar sus soluciones e, incluso, saber interpretarlas. Por este motivo surgió el interés en investigar sobre este tema. Además, a lo largo de años de experiencia en la educación media, se ha podido constatar que la resolución de ecuaciones cuadráticas constituye un inconveniente para muchos estudiantes de 11° y 12° al tener que aplicarla en diferentes contenidos y contextos, lo cual ocasiona deficiencias y un bajo rendimiento en estos niveles.

Es importante señalar que esta investigación se desarrolló luego de dos años de educación a distancia por causa de la pandemia Covid-19, por la cual la educación panameña se vio en la necesidad de ofrecer diferentes herramientas que permitieran a los estudiantes continuar con sus estudios adaptándose a sus posibilidades; entre ellas, plataformas digitales, redes sociales y material impreso, como módulos o guías didácticas.

El sistema educativo panameño contempla en el Sub-Sistema Regular, la Educación Pre Escolar, la Educación Básica General (primer nivel, de 1° a 9°), la Educación Media (segundo nivel, de 10° a 12°) y la Educación Superior (tercer nivel, universitario); de las cuales, al ingresar a la Educación Media, el estudiante opta por estudios de Bachillerato o de Segundo Ciclo Industrial. Por lo que es fundamental la secuencia y correlación de contenidos entre un nivel y el otro, para que se dé el principio de continuidad. Por tal razón, el estudiante debe adquirir en Básica General, específicamente en Pre-Media (de 7° a 9°), las habilidades y destrezas matemáticas necesarias que le permitan desenvolverse adecuadamente en su educación Media. Sin embargo, es común observar, que los estudiantes presentan deficiencias en el nivel de Media,

2 El Instituto Profesional Técnico e Industrial de Aguadulce, (IPTIA) es un colegio público de formación técnica que ofrece diez bachilleratos y dos segundos ciclo industrial; ubicado en la provincia de Coclé, distrito de Aguadulce, en una zona urbana y céntrica del país (Panamá) con una población aproximada de 754 estudiantes procedentes de los diferentes corregimientos, incluso de otros distritos, que ingresan en busca de una educación académica técnica

las cuales tienen su origen en la aplicación de conceptos o procedimientos de contenidos que se enseñan durante la etapa de educación Pre-Media.

Cuando el estudiante ingresa a 10° Bachillerato, en el área de Algebra, el currículo contempla "Potenciación con Expresiones Algebraicas", "Radicación con Expresiones Algebraicas" y "Las ecuaciones Cuadráticas" (Meduca, 2014, pp. 32-34).

Para el contenido de ecuaciones cuadráticas, el objetivo de aprendizaje establece que el estudiante debe ser capaz de aplicar distintos métodos de solución como estrategia para determinar las raíces de ecuaciones (Ministerio de Educación [Meduca], 2014, p. 32). También establece que, para obtener sus raíces, deben enseñarse tres métodos de solución, factorización, completación de cuadrados y fórmula general. Cabe destacar que el método gráfico no es considerado en el currículum, aun cuando el avance tecnológico permite trabajar con este de manera más dinámica e interactiva, y permite a los estudiantes interpretar el significado de las soluciones de las ecuaciones de manera visual. El logro del objetivo del currículum es de mucha importancia, ya que el estudiante debe aplicarlo en los siguientes niveles de estudio, 11° y 12°, en áreas tales como Geometría Analítica, Algebra y Cálculo. Aunado a esto, el estudio de las ecuaciones cuadráticas es necesario para solucionar situaciones en diferentes ramas del quehacer humano, como Física, Ingeniería, Mecánica, Arquitectura, entre otros, para lo que se requiere que el estudiante, además de resolver ecuaciones cuadráticas, comprenda el significado de sus soluciones.

Resulta interesante observar que los errores que cometen los estudiantes cuando están aprendiendo los algoritmos de los diferentes métodos de resolución de ecuaciones cuadráticas en muchas ocasiones son comunes y están relacionados con conocimientos previos, aun cuando los estudiantes que ingresan al 10° proceden de diferentes instituciones educativas; pues pertenecen a distintas comunidades y llegan a este colegio en busca de una educación técnica industrial una vez que culminan su educación básica general. Esta situación generó las siguientes interrogantes: ¿cuáles son los errores que presentan los estudiantes? ¿Qué está dando origen a estos errores? ¿En dónde se presentan mayormente los errores: en contenidos previos o en los contenidos del nivel que cursan? ¿Por qué los estudiantes de décimo grado presentan errores comunes, si proceden de distintos centros educativos? El estudio pretende dar respuesta a la primera y tercera pregunta, y deja abierta la posibilidad de que este proporcione los insumos para futuras investigaciones que puedan responder el resto de las interrogantes.

Conociendo la importancia de las ecuaciones cuadráticas para la educación media y para la resolución de situaciones cotidianas, las cuales implican además de entender y plantear el problema, conocer y saber aplicar los diferentes métodos para su solución, surge el interés de documentar los errores, analizarlos y categorizarlos. Esto abrirá las puertas para futuras investigaciones sobre las causas de los errores aquí presentados, que permitan elaborar propuestas didácticas para la enseñanza a nivel de Pre-Media y Media.

Por lo antes expuesto, este estudio parte de la consideración de que el error es un aliado en el proceso de enseñanza-aprendizaje, puesto que indagar y reflexionar sobre los errores que cometen los estudiantes proporciona una rica información sobre cómo se construye el conocimiento matemático. Asimismo, constituye una herramienta valiosa para proponer mejoras a la hora de realimentar el proceso de enseñanza-aprendizaje, con el objetivo de mejorar los resultados (Del Puerto et al., 2004). Respecto a esto Torre (2004) afirma que "la pedagogía del error, por su parte, valorara [sic] lo que ya se tiene conseguido y analizara [sic], a través del error, lo que falta mejorar" (p. 7).

Esta situación lleva a la pregunta que es el punto de partida de esta investigación: ¿qué errores presentan los estudiantes de 10° bachiller del Instituto Profesional Técnico e Industrial de Aguadulce, al resolver ecuaciones cuadráticas, utilizando los diferentes métodos de resolución?

2. ELEMENTOS TEÓRICOS

Mientras aprenden matemática, los estudiantes presentan errores que evidencian que los objetivos propuestos no se han logrado; sin embargo, más allá de eso, constituyen una información valiosa para el docente, pues le permitirá tomar decisiones para la mejora del proceso educativo. Al respecto, Abrate et al. (2006) destacan la importancia de que los profesores de matemáticas identifiquen los errores habituales de los estudiantes con el objetivo de implementar medidas remediales basadas en un enfoque constructivista de enseñanza.

De forma tradicional, el error se ha visto como algo malo en las aulas; motivo por el cual los estudiantes temen equivocarse y, en muchas ocasiones, prefieren dejar los problemas sin resolver. Esto priva al proceso de información enriquecedora. Para Del Puerto et al. (2004), los procesos mentales no pueden observarse, por lo que solo se pueden inferir a través de manifestaciones indirectas. Los errores recurrentes, así como los patrones comunes que los caracterizan, son algunos de los indicadores que permiten deducir sobre estos procesos mentales y la forma en que los conocimientos se estructuran.

El error no representa ausencia de conocimiento, más bien es un indicativo de un conocimiento mal aprendido, que al ser expresado ofrece la oportunidad de ser corregido; por ello constituye un insumo valioso para la mejora del proceso educativo. En palabras de Ruano et al. (2003, como se citó en López González y López Ponce, 2017): “los errores son intentos razonables, pero no exitosos de adaptar un conocimiento adquirido a una nueva situación” (p. 655).

El error es un elemento tan valioso en el proceso de enseñanza-aprendizaje que además de ser una metodología de investigación también puede ser utilizado como metodología de enseñanza. Para Cury (2019), las producciones de los estudiantes constituyen un elemento valioso para la labor docente, y su análisis no se debe considerar como un hecho independiente de esta, más bien debería ser integrado como un componente esencial en los planes pedagógicos no solo de las instituciones educativas, sino también en los planes de clase de cada asignatura tomando en consideración sus objetivos de enseñanza.

Con respecto al error como metodología de investigación, Cury (2019) afirma que corregir una prueba no constituye una investigación si no se tiene establecido en primer lugar, un objetivo que dé respuesta a lo que se desea investigar. Además, considera que la actividad de evaluación diaria que realizan los docentes –en donde señalan y clasifican los errores y aciertos en las producciones de los estudiantes, solo para contabilizarlos– es una investigación muy limitada si no se tratan de entender las formas en que los estudiantes presentan sus respuestas:

> Como metodología de investigación, podemos evaluar el contenido de las soluciones de los estudiantes, pasando por las etapas de pre-análisis, exploración del material y tratamiento de los resultados, obteniendo información que nos permita avanzar en el conocimiento de las causas de los errores. (Cury et al., 2008, p.1)

Por lo que en una primera fase se requiere de una lectura rápida que permita separar y codificar las respuestas según el objetivo de la investigación, para luego profundizar en su análisis, llegando en este paso a la unitarización y categorización de los errores.

De acuerdo con Cury et al. (2008), el proceso de unitarización y categorización implica que el investigador comprenda e interprete los datos para establecer criterios que permitan crear las categorías, con el propósito de ofrecer una representación simplificada de los datos obtenidos, mediante su condensación. Las categorías se pueden presentar en forma de tablas que muestren frecuencias y porcentajes, o a través de un resumen de cada una de ellas. Además, se debe incluir ejemplos de los errores observados.

Para efectos de esta investigación el escenario que se tiene es el de un grupo de estudiantes de 10° de educación media, en donde se observa que estos al aplicar conocimientos previos en la utilización de los diferentes algoritmos de los métodos de resolución de las ecuaciones cuadráticas, no solo, no logran el objetivo al presentar errores, sino que la mayoría de estos son comunes, aun cuando los estudiantes proceden de distintas instituciones educativas. En este sentido, Del Puerto et al. (2004) afirman: Hay patrones consistentes en los errores a dos niveles: a nivel individual, ya que las personas muestran gran regularidad en su modo de resolver ejercicios y problemas similares y a nivel colectivo, ya que distintas personas cometen errores semejantes en determinadas etapas de su aprendizaje (p. 4).

Esta es una situación conocida por los docentes y no es exclusiva del ámbito educativo panameño, pues muchos estudios hacen referencia a la dificultad que presentan los estudiantes para adquirir nuevos conocimientos debido a falencias en conocimientos previos. Tettay-Mejía et al. (2019) en su estudio realizado en Barranquilla, Colombia, afirman que los errores relacionados con conocimientos aritméticos, presentados por los estudiantes, revelan deficiencias originadas en cursos anteriores. Esto sugiere que los estudiantes pueden haber recibido una formación en la que no se analizó los errores que estos presentaron o que ignoró el conocimiento no adquirido; lo que trae como resultado, que al enfrentarse a nuevos contenidos o al intentar abordar nuevas tareas matemáticas, como en el caso específico de la resolución de ecuaciones de primer grado, los estudiantes presentan deficiencias que contribuyen a la aparición de nuevos errores y dificultan el aprendizaje de nuevos conocimientos.

Candray (2021), en su estudio realizado en El Salvador, también hace referencia a este tema. Dentro de las categorías identificadas por el aporte de los docentes con relación a las operaciones con fracciones, se destaca ausencia de conocimientos tanto teóricos como prácticos del tema, frecuentemente denominadas como conocimientos previos.

3. ABORDAJE METODOLÓGICO

El desarrollo de esta investigación se realizó bajo el enfoque cualitativo, de tipo descriptivo. Según Quecedo Lecanda y Castaño Garrido (2003), la metodología cualitativa se caracteriza por generar información descriptiva, que incluye expresiones verbales o escritas de las personas, así como su comportamiento observable. Para recolectar los datos se aplicó una prueba escrita y se realizaron seis entrevistas. Este estudio pretende categorizar los errores encontrados en la resolución de ecuaciones cuadráticas en estudiantes de 10° del Bachiller en Electrónica y Electricidad, y producir comprensiones a través de entrevistas realizadas a los estudiantes acerca de sus procedimientos en la resolución de ecuaciones cuadráticas. Estas comprensiones se produjeron con el propósito de servir como base para futuras investigaciones e intervenciones pedagógicas que ayuden a identificar y solucionar problemas en el ámbito educativo, lo que la convierte en una investigación aplicada. En palabras de Espinoza y Toscano (2015): “las investigaciones según su finalidad son aplicadas si solucionan problemas prácticos en el ámbito educativo” (p. 32).

El estudio se realizó con 30 estudiantes de 10°, quienes en 8° y 9° recibieron clases a distancia de la siguiente forma: el 70% estudió utilizando una plataforma digital (Classroom o MS Team), apoyados por la red social WhatsApp; el 23.3 %, utilizó solo la red social WhatsApp; 3.3% estudió con módulo impreso, y 3.3% utilizó solo la plataforma MS Teams. De los 30 estudiantes participantes del estudio, el 57% realizó sus estudios de Pre-Media (7°, 8°, 9°) en siete centros educativos distintos, mientras que el 43% lo hizo en el IPTIA.

La prueba escrita aplicada consistió en cinco ejercicios de resolución de ecuaciones cuadráticas utilizando los métodos de factorización, completar cuadrados y fórmula general. El instrumento fue estructurado en tres partes; en la primera, se propusieron tres ejercicios de opciones múltiples que indican el método a utilizar, en donde se les solicitó justificar sus respuestas con los procedimientos; en la segunda, se propusieron dos ejercicios sin opciones de respuestas, en donde los estudiantes eligieron el método a utilizar y justificaron su elección; finalmente, en la tercera parte se les solicitó indicar los ejercicios más fáciles y difíciles para ellos. A los estudiantes no se les permitió el uso de calculadora, y se les facilitó la fórmula general. La prueba se aplicó en dos periodos de clase, que corresponden a 76 minutos, con la presencia de la investigadora y la docente de la asignatura como observadora.

Para la selección de los ejercicios se utilizó la Tesis de maestría de Orlando Martínez, (Martínez, 2014), investigación que fue aplicada en un colegio de Panamá. También, se recurrió al Temario para la prueba de conocimientos generales de ingreso a la universidad de Panamá y, finalmente, se seleccionó un ejercicio del libro Algebra de Baldor, texto utilizado como referencia por los docentes del centro educativo en estudio.

Una semana después de la aplicación de la prueba, se realizó una entrevista a seis estudiantes del grupo de estudio, la cual fue grabada con la autorización por escrito de los estudiantes. Estos fueron seleccionados a partir de los siguientes criterios: resultados más altos y más bajos, así como hallazgos considerados significativos por la investigadora en procedimientos tales como escritura de mensaje en la prueba; ejercicios en blanco en la segunda parte, aun cuando demostraron conocimiento de un método en la primera parte; no resolución del ejercicio 1 por factorización, aun cuando se demostró dominio del método en otro ejercicio; elección de opciones sin procedimientos en la primera parte, pero con intento de resolución en la segunda parte de desarrollo. De estos seis estudiantes, el 33.3% realizó sus estudios de Pre-Media en el IPTIA, el 50% en colegios de diferentes comunidades de la provincia y el 16.7% proviene de colegios de otra provincia.

La entrevista se realizó de forma individual en el aula de PROPRAT (Proyecto de perfeccionamiento docente y reforzamiento académico apoyado en el uso de las Tics), con la única presencia de la investigadora. La misma fue grabada con apoyo de un dispositivo móvil, y luego almacenada en una carpeta temporal creada para tal fin. A los estudiantes se les mostró la prueba realizada, y luego se les realizaron las preguntas. El tiempo de las entrevistas osciló aproximadamente entre 2 y 5 minutos cada una.

El análisis de los resultados se hizo siguiendo la metodología propuesta por Cury (2008), apoyada por la estadística de los resultados cuantitativos que dan respuesta a la pregunta de investigación y abren las puertas a otros estudios relacionados con los hallazgos presentados.

Para el proceso cualitativo, se procedió a la codificación de las pruebas y al análisis de los errores para cada ejercicio; fue necesario digitalizar, copiar y recortar las pruebas, lo que permitió agrupar y realizar una observación más detallada y minuciosa de cada ejercicio. En palabras de Cury (2019):

> Para tratar de interpretar los resultados de la investigación, obtenidos a través de este análisis detallado de errores, primero es necesario preguntarse: ¿qué querían decir los estudiantes? Es decir, ¿qué pueden revelar sus producciones escritas, no sólo sobre lo que no saben, sino también sobre lo que sí saben? (p. 83)

Para el análisis y categorización de los errores, se inició con una lectura discriminativa de las respuestas obtenidas en los instrumentos, que condujo a la obtención del corpus de la investigación. Se separaron las respuestas correctas con procedimientos, las incorrectas con procedimientos y las que no tuvieron procedimientos, para facilitar su interpretación y establecer los criterios que dieron origen a las clases o categorías. Se describieron sus características y se presentaron ejemplos para cada ejercicio. Las clases van desde la que contempla las respuestas totalmente correctas hasta la clase en donde los procedimientos no fueron comprendidos, o los errores no presentaron patrones.

4. RESULTADOS

En este artículo se presenta un extracto de los resultados obtenidos en el estudio, limitándolo a la categorización de los errores presentados en los tres ejercicios de opción múltiple de la primera parte del instrumento, y apoyados por datos obtenidos en el estudio cuantitativo y las entrevistas.

4.1. ANÁLISIS DEL EJERCICIO 1

Resuelve la siguiente ecuación cuadrática por factorización e indica la respuesta correcta.

$$y^2 + y - 6 = 0$$

a) $y = -6$; $y = 1$

b) $y = 6$; $y = -1$

c) $y = 3$; $y = -2$

d) $y = -3$; $y = 2$

Los datos presentados en la Tabla 1 muestran que el 63.3 %; es decir, aproximadamente 6 de cada 10 estudiantes no resolvieron este ejercicio. Mientras que el 23.3% presentaron procedimientos incorrectos, solo el 10% resolvió correctamente la ecuación cuadrática por el método indicado. Esta situación queda evidenciada en el hecho de que solo el 17.9 % de los estudiantes consideraron este ejercicio como el más fácil (ver Anexo 4). Otro resultado con respecto a la factorización, lo constituye el hecho de que un estudiante que eligió resolver el ejercicio de la tercera parte utilizando este método, justificó su elección haciendo el siguiente comentario: “aunque es el más fácil, este método en ocasiones no funciona muy bien” (ver Anexo 2). Finalmente, de una de las entrevistas también se rescata el hecho de que la dificultad se pudo dar porque la ecuación estaba expresada en términos de y en lugar de x. (Ver Anexo 3)

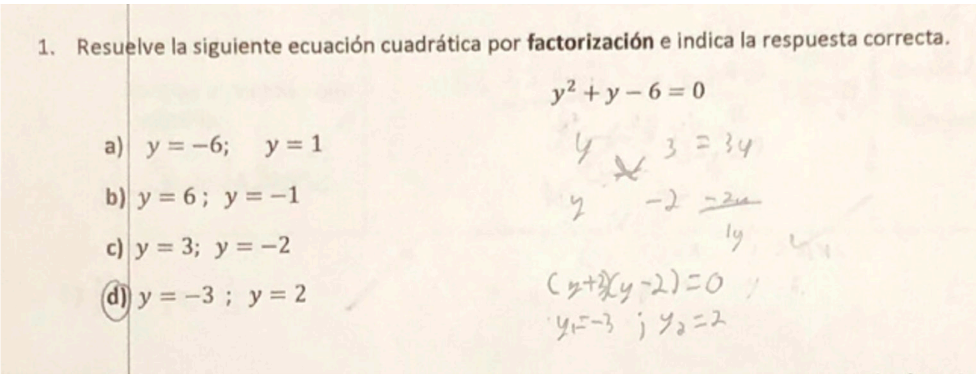
Tabla 1 - Resultados para el ejercicio 1 de opciones múltiples de la primera parte de la prueba.

Resolver la ecuación $y^2 + y - 6 = 0$ por el método de factorización.		
Opciones	**Total**	**Porcentaje**
Opción a $y = -6$; $y = 1$	1	3.3%
Opción b $y = 6$; $y = -1$	3	10.0%
Opción c $y = 3$; $y = -2$	2	6.7%
Opción d (correcta) $y = -3$; $y = 2$	3	10.0%
Opción correcta pero no corresponde con el procedimiento presentado.	1	3.3%
Sin selección debido a procedimientos incompletos o errados.	1	3.3%
En blanco	19	63.4%
Totales	30	100.0%

Para este ejercicio se analizaron 11 respuestas, puesto que 19 lo dejaron en blanco, y se obtuvieron 4 clases.

Clase A: corresponde a las soluciones correctas con sus respectivos procedimientos. En este caso se obtuvieron tres soluciones correctas. Los tres estudiantes utilizaron el método del aspa simple para factorizar la ecuación. Se obtuvo también una cuarta respuesta correcta, pero que utilizó un método diferente al solicitado. En la Figura 1 se muestra una de las soluciones.

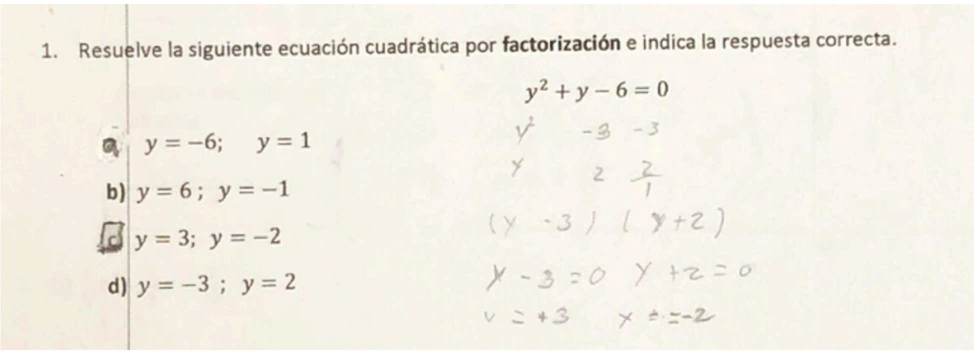
Figura 1 - Respuesta del estudiante 15 al ejercicio 1.



Fuente: Prueba aplicada para recolección de datos.

Clase B: corresponde a las dos respuestas en que los estudiantes utilizaron el algoritmo del método del aspa simple correctamente, encontraron los factores primos, pero equivocaron sus signos. Esto indica falta de dominio de factorización o en la regla de los signos para la suma y resta con números enteros, contenidos correspondientes a conocimientos previos (ver Figura 2).

Figura 2 - Respuesta del estudiante 25 al ejercicio 1.


1. Resuelve la siguiente ecuación cuadrática por **factorización** e indica la respuesta correcta.

$$y^2 + y - 6 = 0$$

a) $y = -6;\quad y = 1$

b) $y = 6;\quad y = -1$

c) $y = 3;\quad y = -2$

d) $y = -3;\quad y = 2$

$y^2 \quad -3 \quad -3$

$y \quad 2 \quad \frac{2}{1}$

$(y-3)(y+2)$

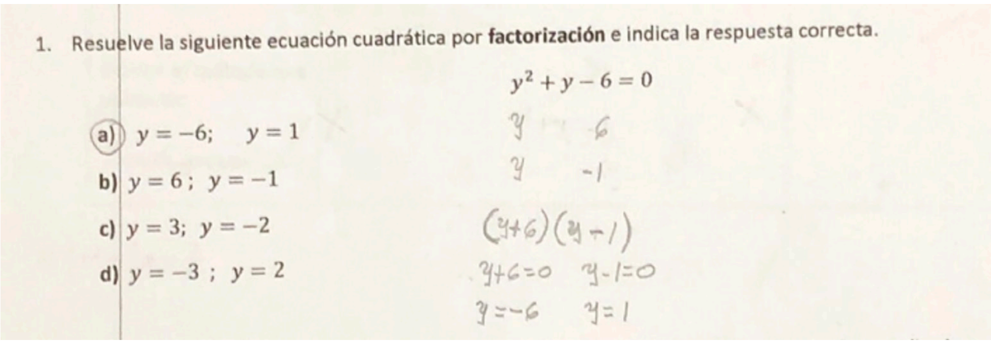
$y-3=0 \quad y+2=0$

$y=+3 \quad y=-2$

Fuente: Prueba aplicada para recolección de datos.

Clase C: corresponde a dos respuestas en las que los estudiantes no encontraron los factores primos correctos. Esta clase, a diferencia de la anterior, denota desconocimiento del proceso de factorización. En la Figura 3 se observa una de las respuestas.

Figura 3 - Respuesta del estudiante 2 al ejercicio 1.


1. Resuelve la siguiente ecuación cuadrática por **factorización** e indica la respuesta correcta.

$$y^2 + y - 6 = 0$$

a) $y = -6;\quad y = 1$

b) $y = 6;\quad y = -1$

c) $y = 3;\quad y = -2$

d) $y = -3;\quad y = 2$

$y \quad 6$

$y \quad -1$

$(y+6)(y-1)$

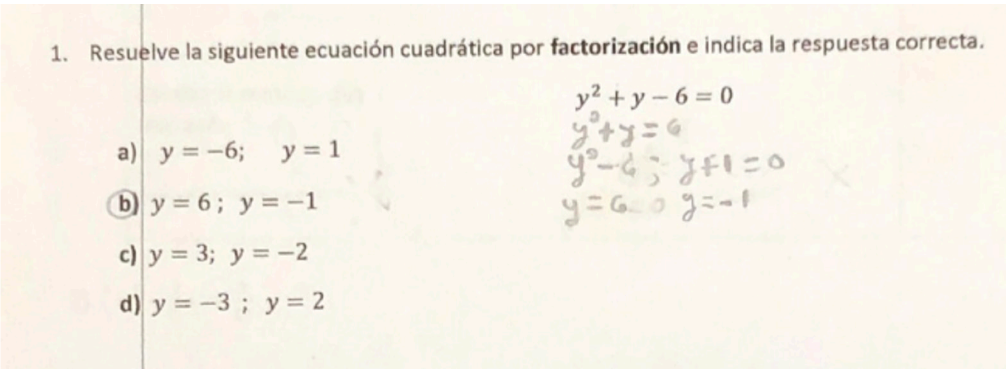
$y+6=0 \quad y-1=0$

$y=-6 \quad y=1$

Fuente: Prueba aplicada para recolección de datos.

Clase D: corresponde a las respuestas de tres estudiantes, en las cuales no se pudieron comprender los procedimientos utilizados. Para ilustrar una de estas soluciones se presenta la Figura 4.

Figura 4 - Respuesta del estudiante 19 al ejercicio 1.


1. Resuelve la siguiente ecuación cuadrática por **factorización** e indica la respuesta correcta.

$$y^2 + y - 6 = 0$$

$y^2 + y = 6$

$y^2 - 6 ;\ y + 1 = 0$

$y = 6 \text{ o } y = -1$

a) $y = -6; \quad y = 1$

b) $y = 6\ ; \quad y = -1$

c) $y = 3; \quad y = -2$

d) $y = -3\ ; \quad y = 2$

Fuente: Prueba aplicada para recolección de datos.

Finalizado el análisis del ejercicio 1, se pudo observar que los errores principales de utilizar el método de factorización están asociados a los conocimientos previos específicamente a su algoritmo, tema contemplado en 9° del currículo panameño. Además, generó confusión el hecho de expresar la ecuación cuadrática en términos de y en lugar de x.

4.2 ANÁLISIS DEL EJERCICIO 2

Resuelva la siguiente ecuación cuadrática utilizando el método de completar cuadrados e indica la respuesta correcta

$$x^2 + 12x - 45 = 0$$

a) $x = -3$; $x = -9$

b) $x = 3$; $x = -15$

c) $x = 15$; $x = 3$

c) $x = 9$; $x = 3$

Los resultados de la Tabla 2 muestran que solo el 3.3 % utilizó correctamente el método de completar cuadrado para resolver la ecuación cuadrática, mientras que el 43.3 % presentó errores en los procedimientos. Esto los llevó a elegir la opción equivocada o a no elegir ninguna opción. Se puede observar también que un alto porcentaje (36.7%) dejó el ejercicio sin resolver, lo que se explica en el hecho de que los estudiantes consideran este como uno de los ejercicios más difíciles, por lo que ocupa la segunda posición (ver Anexo 6). Solo un estudiante manifestó que este ejercicio lo había considerado el más fácil (ver Anexo 2).

Tabla 2 - Resultados para el ejercicio 2 de opciones múltiples de la primera parte de la prueba.

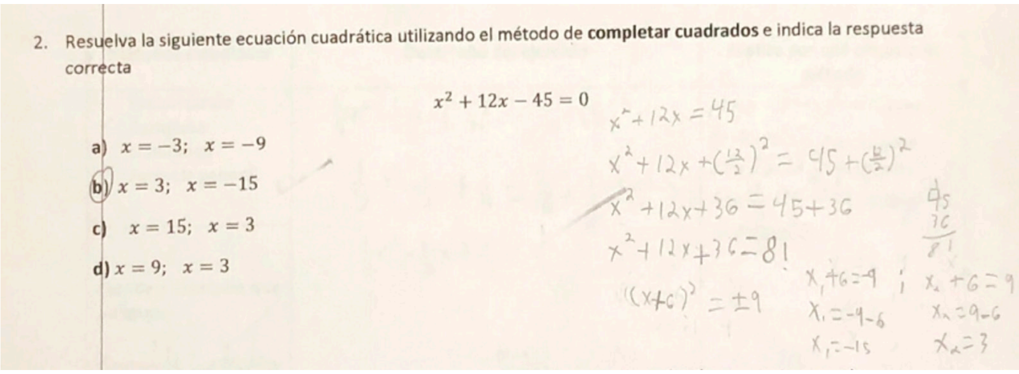
Resolver la ecuación $x^2 + 12x$ - 4 5= 0 por el método de completar cuadrados.		
Opciones	**Total**	**Porcentaje**
Opción a $x = -3$; $x = -9$	4	13.3%
Opción b (correcta) $x = 3$; $x = -15$	1	3.3%
Opción c $x = 15$; $x = 3$	2	6.7%
Opción d $x = 9$; $x = 3$	1	3.3%
Opción correcta pero no corresponde con el procedimiento presentado.	5	16.7%
Sin selección debido a procedimientos incompletos o errados.	6	20.0%
En blanco	11	36.7%
Totales	30	100.0%

Fuente: Elaboración propia.

Para el análisis de los errores presentados en este ejercicio, se analizaron las 19 respuestas con procedimientos, de las cuales se obtuvieron siete clases.

Clase A: corresponde a las soluciones correctas con sus respectivos procedimientos. En este caso, una respuesta en la cual el estudiante utilizó correctamente la completación de cuadrados y eligió la opción correcta. En la Figura 5 se puede observar esta solución.

Figura 5 - Respuesta del estudiante 15 al ejercicio 2.



Fuente: Prueba aplicada para recolección de datos.

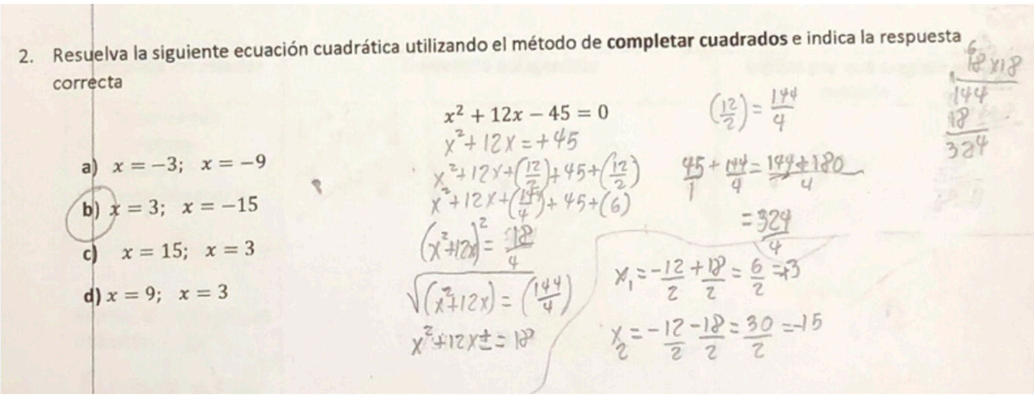
Clase B: corresponde a dos soluciones en que los estudiantes presentaron algunas inconsistencias en el algoritmo del método, específicamente poca comprensión de este y algunos errores en operaciones algebraicas. Además, presentaron errores del lenguaje algebraico, como omisión de signos y símbolos, que dificultaron el proceso, pero igualmente se aproximaron a la respuesta correcta o llegaron a ella, lo cual indica un manejo mecánico del procedimiento. A continuación, se describe una de esas respuestas:

Este estudiante omitió el signo igual (=), lo que hace difícil aplicar las propiedades correctamente; además, no comprende el algoritmo de complementación del trinomio cuadrado perfecto ni balanceo de la ecuación. Esto se evidencia en que omitió la potencia 2 del término que completa el trinomio cuadrado perfecto en ambos lados de la ecuación, pero luego la desarrolló solo en el lado izquierdo, para posteriormente corregir su error realizando la suma correcta del lado derecho. De allí en adelante muestra gran confusión en el algoritmo y en operaciones algebraicas, tales como factorización del trinomio cuadrado perfecto y la radicación. Sin embargo, lo interesante de esta respuesta radica en que, finalmente, pese a la no comprensión del algoritmo, llegó a la respuesta correcta de forma mecánica: planteando y resolviendo las raíces, utilizando las siguientes fórmulas y omitiendo en gran parte el procedimiento que había realizado hasta ese momento.

$$x = -\frac{b}{2} + \sqrt{c + \left(\frac{b}{2}\right)^2} \qquad \text{y} \qquad x = -\frac{b}{2} - \sqrt{c + \left(\frac{b}{2}\right)^2}$$

Veamos su procedimiento en la Figura 6.

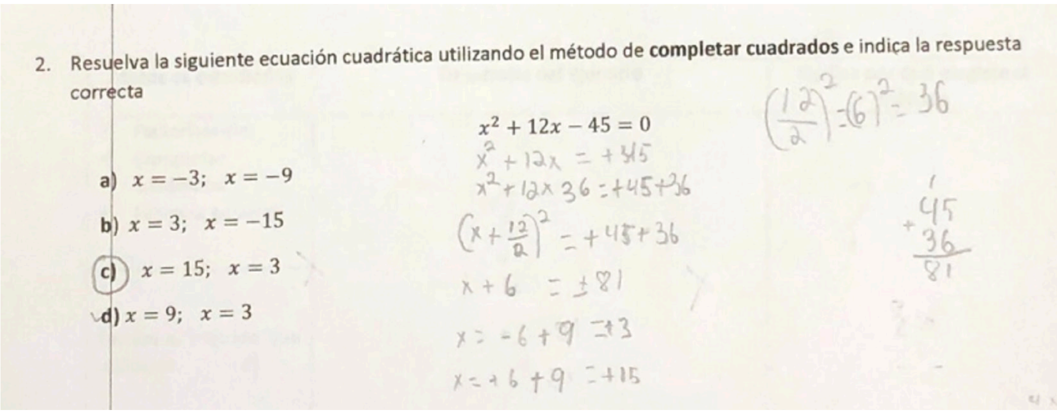
Figura 6 - Respuesta del estudiante 21 al ejercicio 2.



Fuente: prueba aplicada para recolección de datos.

Clase C: corresponde a una solución en la cual se observan nuevamente errores de lenguaje algebraico al omitir el signo más (+) al sumar el término que completa el trinomio cuadrado perfecto de lado izquierdo. A pesar de esto, demuestra dominio del algoritmo del método, pero se equivocó nuevamente en el procedimiento al despejar la ecuación lineal, pues cambió el signo del valor 6 al calcular la segunda raíz en lugar de cambiarlo al valor 9. (ver Figura 7).

Figura 7 - Respuesta del estudiante 4 al ejercicio 2.



2. Resuelva la siguiente ecuación cuadrática utilizando el método de **completar cuadrados** e indica la respuesta correcta

$x^2 + 12x - 45 = 0$

a) $x = -3;\ x = -9$
b) $x = 3;\ x = -15$
c) $x = 15;\ x = 3$
d) $x = 9;\ x = 3$

$\left(\frac{12}{2}\right)^2 = (6)^2 = 36$

$x^2 + 12x = +45$

$x^2 + 12x\ 36 = +45 + 36$

$\left(x + \frac{12}{2}\right)^2 = +45 + 36$

$x + 6 = \pm 81$

$x = -6 + 9 = +3$

$x = +6 + 9 = +15$

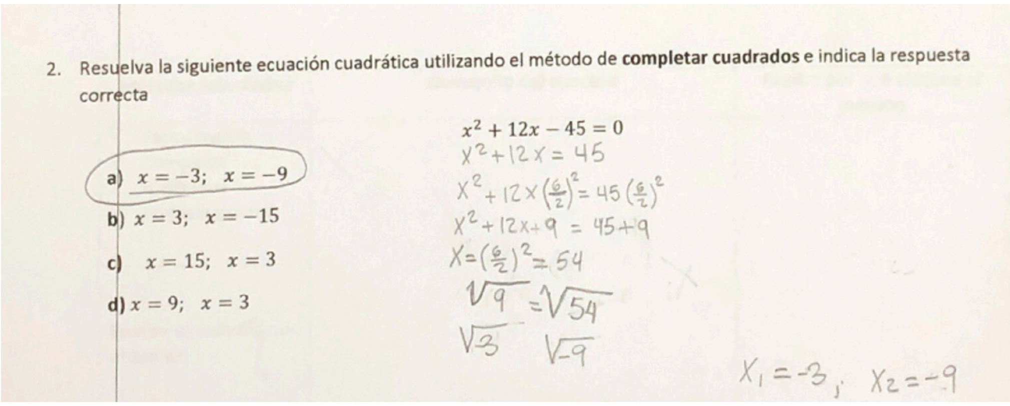
$45 + 36 = 81$

Fuente: prueba aplicada para recolección de datos.

Clase D: corresponde a una solución en la cual el estudiante completó el trinomio cuadrado perfecto correctamente y balanceó la ecuación, pero luego, en lugar de factorizar, presentó error algebraico de conocimientos previos al sumar términos no semejantes y dejar el procedimiento incompleto.

Clase E: corresponde a dos soluciones en las cuales los estudiantes equivocaron el algoritmo para completar el trinomio cuadrado perfecto, pues dividieron entre 2 el coeficiente de x dos veces para luego elevarlo al cuadrado. Adicionalmente, presentan errores en el proceso de factorización de trinomios cuadrados perfectos y errores aritméticos al extraer raíces cuadradas. Una de las soluciones se muestra en la Figura 8.

Figura 8 - Respuesta del estudiante 17 al ejercicio 2.



2. Resuelva la siguiente ecuación cuadrática utilizando el método de **completar cuadrados** e indica la respuesta correcta

$x^2 + 12x - 45 = 0$

a) $x = -3;\ x = -9$
b) $x = 3;\ x = -15$
c) $x = 15;\ x = 3$
d) $x = 9;\ x = 3$

$x^2 + 12x = 45$

$x^2 + 12x\left(\frac{6}{2}\right)^2 = 45\left(\frac{6}{2}\right)^2$

$x^2 + 12x + 9 = 45 + 9$

$x = \left(\frac{6}{2}\right)^2 = 54$

$\sqrt{9} = \sqrt{54}$

$\sqrt{3}\quad \sqrt{-9}$

$x_1 = -3;\ x_2 = -9$

Fuente: Prueba aplicada para recolección de datos.

Clase F: corresponde a cuatro soluciones en las cuales los estudiantes equivocaron el valor para completar el trinomio cuadrado perfecto al no elevar al cuadrado el resultado de la división 12/2. A partir de allí, presentaron errores algebraicos, aritméticos y de sintaxis que les impidieron terminar el procedimiento. Entre ellos:

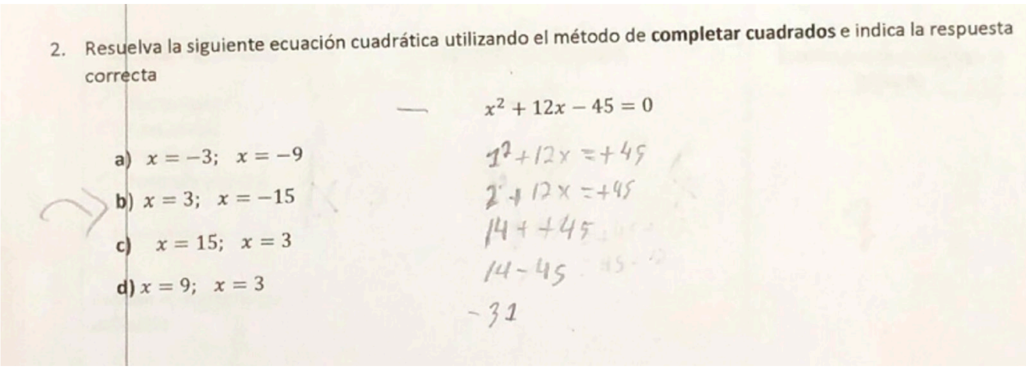
$x^2 + 12x - 45 = 0$ al despejar $x^2 + 12x = -45$

$45 + (12/2) = 77$

$\sqrt{6} = 3$

Clase G: corresponde a ocho soluciones en las cuales no se entiende el procedimiento o utilizaron de forma incorrecta un método alternativo al solicitado. La Figura 9 presenta una de estas respuestas.

Figura 9 - Respuesta del estudiante 1 al ejercicio 2.


2. Resuelva la siguiente ecuación cuadrática utilizando el método de **completar cuadrados** e indica la respuesta correcta

$x^2 + 12x - 45 = 0$

a) $x = -3; \quad x = -9$

b) $x = 3; \quad x = -15$

c) $x = 15; \quad x = 3$

d) $x = 9; \quad x = 3$

$1^2 + 12x = +45$

$2 + 12x = +45$

$14 + +45$

$14 - 45$

-31

Fuente: Prueba aplicada para recolección de datos.

Como se puede observar en las diferentes categorías presentadas para este ejercicio, un gran número de estudiantes mostraron dificultad en el uso del método de completación de cuadrados por falta de comprensión del proceso. Aunado a esto, presentaron gran deficiencia en el uso del lenguaje algebraico, lo que condujo a errores en la sintaxis del algoritmo; fue muy común la omisión del signo de igual y el de la operación de suma. Además, las producciones evidencian poco manejo en las operaciones algebraicas tales como factorización, resolución de ecuaciones lineales, radicación, suma o resta de términos semejantes y suma de fracciones; contenidos que son enseñados en la educación Pre-Media.

4.3. ANÁLISIS DEL EJERCICIO 3

Resuelva la siguiente ecuación cuadrática utilizando la formula general e indica la respuesta correcta

$$a^2 + 4a - 3 = 0$$

a) $a = -2 + \sqrt{7}$; $a = -2 - \sqrt{7}$

b) $a = -3$; $a = -1$

c) $a = 12$; $a = -16$

c) $a = 2 + \sqrt{14}$; $a = 2 - \sqrt{14}$

Formula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Este ejercicio fue considerado, por la mayoría de los estudiantes, como el más fácil (ver Anexo 4); se obtuvo que solo el 13.4% no lo resolvieron (ver Tabla 3), a diferencia de los ejercicios 1 y 2 (ver Tabla 1 y Tabla 2). Sin embargo, ningún estudiante resolvió correctamente el ejercicio, pues el 10% que llegó a la solución correcta utilizó otro método distinto al solicitado. En tanto que el 76.6 %; es decir, aproximadamente 7 estudiantes de cada 10 resolvieron incorrectamente o no completaron el procedimiento, lo que provocó que el 30% de los estudiantes no eligiera ninguna de las opciones dadas. Con este resultado se puede observar una preferencia de los estudiantes por el uso del método de la fórmula general, pues el 66.7 % lo eligió para resolver el ejercicio 4 (ver Anexo 1). Además, cuatro estudiantes de los seis entrevistados consideraron como ejercicio más fácil aquel en donde utilizaron el método de la fórmula general, y expresaron, también, que aun cuando lo prefieren, les causa dificultad su uso (ver Anexo 2).

Sin embargo, este no fue el mismo escenario para el ejercicio 5, que presentaba una ecuación cuadrática con coeficientes racionales no enteros, para el cual solo el 16.7 % eligió utilizar la fórmula general, sin obtener resultados correctos; mientras que el 70%, es decir, 7 de cada 10 estudiantes no eligieron ningún método de resolución y dejaron el ejercicio sin resolver (ver Anexo 1). Lo anterior muestra la dificultad que presentan los estudiantes al operar con coeficientes no enteros, y esta situación genera la pregunta: ¿están los docentes utilizando ecuaciones cuadráticas con coeficientes racionales no enteros cuando enseñan el método de la fórmula general?

Es importante señalar, también, que ningún estudiante aplicó el concepto de ecuaciones equivalentes para resolver el ejercicio 5, lo que denota deficiencia en este concepto. Se evidencia la necesidad de trabajar más con el conjunto de los números racionales; específicamente con los no enteros, pues los estudiantes revelan que el tener que trabajar con estos números les causa temor y mucha dificultad, lo que queda evidenciado al ser este ejercicio considerado por ellos como el más difícil (ver Anexo 4). Además, se rescatan las palabras de algunos de los entrevistados, con las que manifestaron la dificultad que representa para ellos trabajar con fracciones al utilizar la fórmula general, pues no saben qué hacer con ellas. Incluso, uno de ellos considera que "esta ecuación no podría resolverla por la formula general por tener fracciones como coeficientes" (ver Anexo 3).

Tabla 3 - Resultados para el ejercicio 3 de opciones múltiples de la primera parte de la prueba.

Resolver la ecuación $a^2 + 4a - 3 = 0$ por el método de fórmula general.		
Opciones	**Total**	**Porcentaje**
Opción a (correcta) $a =- 2 + \sqrt{7}$; $a = - 2 - \sqrt{7}$	0	0.0%
Opción b $a = - 3$; $a = - 1$	4	13.3%
Opción c $a = 12$; $a = - 16$	6	20.0%
Opción d $a = 2 + \sqrt{14}$; $a = 2 - \sqrt{14}$	4	13.3%
Opción correcta pero no corresponde con el procedimiento presentado.	3	10.0%
Sin selección debido a procedimientos incompletos o errados.	9	30.0%
En blanco	4	13.4%
Totales	30	100%

Fuente: Elaboración propia.

Para el análisis de este ejercicio se trabajó con un corpus de 26 respuestas, dado que solo 4 no presentaron procedimientos. Lo que resultó en cinco clases.

Clase A: corresponde a las soluciones correctas sustentadas con el procedimiento del método indicado. Para este ejercicio solo hubo una solución con respuesta correcta, pero sin procedimiento para sustentarla, por lo que fue descartada.

Clase B: corresponde a las soluciones que presentan correctamente la sustitución en la fórmula y su manejo, pero presentan errores aritméticos en la operación de radicación. Se puede observar como una vez extrajeron la raíz cuadrada, volvieron a escribir el signo radical, lo que demuestra falta de comprensión de la operación. En esta clase tenemos seis soluciones. En la mayoría de los casos utilizaron las opciones dadas que tenían similitud con su procedimiento para indicar la opción de respuesta, aun cuando no habían llegado a la misma. Se ilustran algunos de los errores presentados:

- $\sqrt{28} = \sqrt{14}$ (4 soluciones)
- $\sqrt{28} = \sqrt{7}$ (1 solución)
- $\sqrt{28} = \sqrt{2}$ (1 solución)

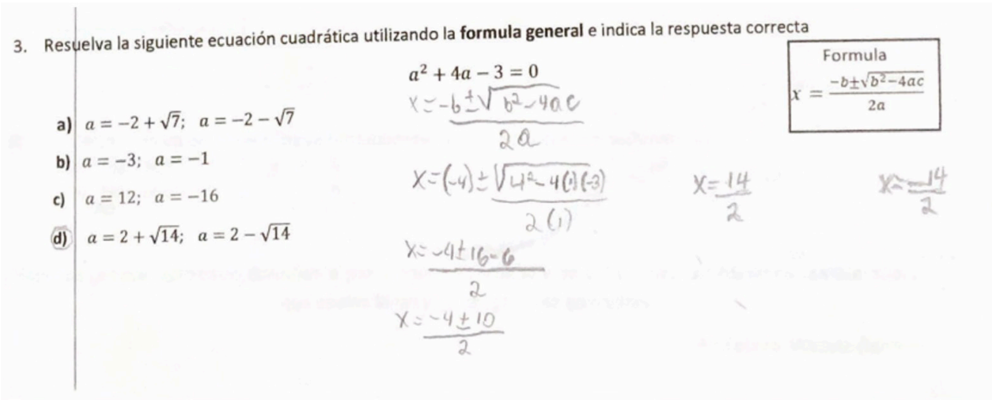
Clase C: corresponde a las siete soluciones en las que los estudiantes sustituyeron correctamente en la fórmula, pero presentaron errores al no manejar correctamente operaciones aritméticas como la potencia, multiplicación, suma y resta con números enteros dentro del radical y en pasos posteriores, lo cual conllevó a respuestas equivocadas o a no culminar el procedimiento. A continuación, algunos errores:

- $- 4 (1) (- 3) = - 12$ (regla de los signos para la multiplicación, 4 soluciones)

- $4^2 = 8$ (potenciación, 3 soluciones)
- 2 errores al multiplicar $4 \times 1 \times 3$ (tablas de multiplicación)
- $-4 + 2 = -6$, $-4 - 2 = -2$ (ley de los signos para la suma y resta, 3 soluciones)

Clase D: corresponde a cinco soluciones en las que los estudiantes presentaron dificultad en el manejo de la fórmula una vez sustituyeron correctamente los valores de a, b y c; omitieron el signo del radical, además de cometer errores de origen aritmético (ver Figura 10).

Figura 10 - Respuesta de estudiante 30 al ejercicio 3.



Fuente: Prueba aplicada para recolección de datos.

Clase E: corresponde a ocho soluciones en las cuales los estudiantes no supieron sustituir los coeficientes a, b y c correctamente en la fórmula, además de cometer errores aritméticos en el cálculo de raíz cuadrada y leyes de los signos para la suma y resta.

- Identificación incorrecta de a, b y c en la ecuación, prevaleciendo el hecho de que no identifican el coeficiente a = 1 y, en su lugar, utilizan el exponente 2. (4 soluciones)
- Sustitución errónea, dejar letra sin sustituir o sustituir una mal o equivocar los signos de los coeficientes. (4 soluciones)
- $\sqrt{28} = 14$, radicación (una solución)
- $1 - 14 = 13$, leyes de los signos para la resta (una solución)

Del análisis y categorización de los errores de este ejercicio de aplicación de la fórmula general para resolver una ecuación cuadrática se puede observar que, aun cuando existe preferencia en su uso, los errores presentados en su mayoría corresponden a operaciones con números reales, entre ellas, la radicación. Los estudiantes parecen no comprender su significado, y no reconocen el signo radical como indicativo de una operación que, al resolverse, ya no debe escribirse. Además, resuelven la operación como la mitad del radicando; al igual que resuelven la potencia 2 como el doble de la base. También, es común observar las dificultades en la aplicación de las reglas de los signos para la suma, resta y multiplicación de números reales.

Otro hallazgo significativo lo vemos en los errores presentados en la multiplicación, los cuales reflejan deficiencias en las tablas de multiplicar. Los errores antes mencionados corresponden a contenidos enseñados en la educación Primaria y Pre-Media, por lo que son conocimientos previos del estudiante.

Con relación a la comprensión del método, los errores encontrados fueron menos que los referidos a las operaciones con números reales; en este sentido algunos estudiantes presentaron omisiones de algunos elementos de la fórmula, como el signo radical o los signos de las operaciones de suma y resta, lo que dificultó la correcta sintaxis del algoritmo. Además, en algunas ocasiones olvidaron sustituir alguna de las tres variables.

Es importante señalar que se observó gran dificultad en el reconocimiento del coeficiente cuando este es 1, para lo cual señalan que es 2 si se refiere al coeficiente a (término que contiene la variable al cuadrado) y en el caso de que sea b, escriben la variable de exponente 1 como el coeficiente.

5. CONCLUSIONES

Luego de realizar este estudio, se pueden documentar los errores que cometen los estudiantes de décimo grado del bachiller del Instituto Profesional, Técnico e Industrial de Aguadulce en la resolución de ecuaciones cuadráticas al utilizar los diferentes métodos contemplados en el currículo panameño. Como se pudo observar, los errores corresponden tanto a dificultades en conocimientos previos, de origen aritmético y algebraico, cuanto a errores correspondientes a los algoritmos propios de cada método (errores de procedimiento y de lenguaje algebraico). Los primeros fueron los más predominantes y explican la dificultad para lograr resolver ecuaciones cuadráticas; dado que corresponden a conocimientos previos del estudiante, este rara vez podrá llegar a la solución correcta, incluso si maneja correctamente el algoritmo del método a utilizar. Es importante señalar la dificultad que presentan los estudiantes en el uso de fórmulas, ya que esta habilidad es muy necesaria en una educación técnica industrial, por lo que se deben tomar acciones correctivas en esta vía.

A continuación, se presenta una lista resumida de las categorías detalladas en la sección de resultados para cada método de resolución solicitado en los ejercicios de opciones múltiples.

Método de factorización:

- Uso correcto del algoritmo del método del aspa simple, encontrando los factores primos, pero equivocando sus signos, lo cual denota dificultad en la regla de los signos para suma y resta.

- Uso incorrecto del método del aspa simple al no encontrar los factores primos correctos. Esta clase, a diferencia de la anterior, denota desconocimiento del proceso de factorización.

- Procedimientos no comprendidos.

Método de completar cuadrados:

- Inconsistencias en el algoritmo del método, específicamente poca comprensión de este y algunos errores en operaciones algebraicas; además, errores del lenguaje algebraico, como omisión de signos y símbolos, que dificultaron el proceso, pero igualmente se aproximaron a la respuesta correcta o llegaron a ella, lo cual indica un manejo mecánico del procedimiento.

- Errores de lenguaje algebraico al omitir el signo + al sumar el término que completa el trinomio cuadrado perfecto de lado izquierdo. A pesar de esto, la solución demuestra dominio del algoritmo del método, pero se equivocó nuevamente al despejar la ecuación lineal, pues cometió errores en el procedimiento, cambiando el signo del valor 6 en lugar de cambiarlo al 9 cuando calculó la segunda raíz.

- Uso correcto del proceso para completar el trinomio cuadrado perfecto y balance de la ecuación, pero luego, en lugar de factorizar, el estudiante presentó error algebraico de conocimientos previos al sumar términos no semejantes y dejar el procedimiento incompleto.

- Errores en el algoritmo para completar el trinomio cuadrado perfecto, pues dividieron entre 2 el coeficiente de x dos veces para luego elevarlo al cuadrado. Adicionalmente presentan errores en el proceso de factorización de trinomios cuadrados perfectos y errores aritméticos al extraer raíces cuadradas.

- Error al encontrar el valor para completar el trinomio cuadrado perfecto al no elevar al cuadrado el resultado de la división 12/2. A partir de allí, presentaron errores algebraicos, aritméticos y de sintaxis que les impidieron terminar el procedimiento.

- Procedimientos no comprendidos.

Método de la fórmula general:

- Uso correcto de la sustitución de los coeficientes en la fórmula y las operaciones de potencia, multiplicación y suma o resta, pero con errores aritméticos en la operación de radicación. Se puede observar cómo una vez extrajeron la raíz cuadrada, volvieron a escribir el signo radical, lo que demuestra falta de comprensión de la operación. En la mayoría de los casos utilizaron las opciones dadas que tenían similitud con su procedimiento para indicar la opción de respuesta, aun cuando no habían llegado a la misma.

- Sustitución correcta de los coeficientes en la fórmula, pero presentaron errores al no manejar correctamente operaciones aritméticas como la potencia, multiplicación, suma y resta con números enteros dentro del radical y en pasos posteriores.

- Dificultad en el manejo de la fórmula una vez sustituyeron correctamente los valores de a, b y c; omitieron el signo del radical, además de cometer errores de origen aritmético.

- Error al sustituir los coeficientes a, b y c en la fórmula; además de errores aritméticos en el cálculo de raíz cuadrada y leyes de los signos para la suma y resta.

- Identificación incorrecta de a, b y c en la ecuación; prevalece el hecho de que no identificaron el coeficiente a=1 y, en su lugar, utilizaron el exponente 2.

- Sustitución errónea, dejar letra sin sustituir o sustituir una mal o equivocar los signos de los coeficientes.

- Interpretar la raíz cuadrada como una división por 2.

De las entrevistas realizadas se rescata el señalamiento de los estudiantes de que los procesos son meramente memorísticos, y que suelen olvidarlos con facilidad; además de que ninguno de los seis estudiantes entrevistados sabía qué representaban las soluciones de dichas ecuaciones (ver Anexo 2). Por ello, utilizar un método para resolverlas se convierte en un camino sin sentido; no comprendieron el para qué ni el porqué, lo cual se vio reflejado en la primera parte de opción múltiple de la prueba, en donde ninguno de los 30 estudiantes utilizó las opciones dadas para comprobar las soluciones correctas. Esta situación puede derivarse del hecho de que el currículum panameño no contempla el método grafico para la resolución de ecuaciones cuadráticas, algo que permitiría al estudiante observar dichas soluciones de forma gráfica con ayuda de la tecnología, y entender mejor el significado de estas.

Un resultado no esperado lo constituyó el alto porcentaje (63.4%) de respuestas en blanco para el ejercicio 1, el cual consistía en una ecuación cuadrática de la forma $x^2 + bx + c = 0$. Esta ecuación debía ser factorizada, pero, en lugar de ser expresada en términos de x, se utilizó la letra y, lo que causó dificultad para los estudiantes. Por tal razón es de suma importancia que, al enseñar ecuaciones, se insista en el significado de las variables y se utilicen letras diferentes de x. Otro resultado, quizás un poco más esperado, fue el temor y dificultad de los estudiantes al trabajar con fracciones; el ejercicio 5, que consistió en una ecuación cuadrática con coeficientes racionales no enteros, resultó ser el ejercicio más difícil para ellos, por lo que fue el menos resuelto. Este hecho nos lleva a la siguiente pregunta: ¿se aplica la fórmula general con coeficientes no enteros? En caso de no ser así, ¿por qué? Es importante que las ecuaciones no solo sean presentadas con coeficientes enteros, sino que se incluyan coeficientes no enteros para los diferentes métodos (donde apliquen). Esto con el objetivo de que los estudiantes obtengan destrezas en el manejo de operaciones con números racionales no enteros, y no los perciban como números extraños o con los cuales no se puede operar.

Otra observación importante es el hecho de que los estudiantes muestran confusión para reconocer los coeficientes a y b cuando son iguales a 1, por lo que se sugiere hacer actividades para reforzar este aprendizaje. Se puede concluir, también, que los estudiantes tienen preferencia por el uso del método de la fórmula general; sin embargo, presentan dificultad en su uso, la cual radica principalmente en la falta de destreza en el uso de fórmulas y en el poco dominio de las operaciones básicas con números reales (leyes de los signos, identificación de la operación de sumas y restas, potenciación y radicación). Por lo que sería importante revisar el currículum y analizar la utilidad de considerar el uso y manejo de fórmulas como contenido previo al de ecuaciones cuadráticas y uso de la fórmula general, así como reforzar las operaciones con números reales.

Si bien es cierto que este estudio no pretende generalizar los resultados, en la experiencia docente en educación media bachiller se observa como los errores aquí documentados se han venido repitiendo cada año por las diferentes generaciones. Es importante entonces que, a partir de estudios como este, que proporcionan insumos para futuras investigaciones, se establezcan estrategias remediales que ayuden a minimizar los errores de los estudiantes, ya sean de conocimientos previos o del año en curso. Para esto, también debe considerarse la integración de los docentes de los niveles educativos Primaria, Pre-Media y Media de las diferentes instituciones que dan continuidad a la formación de estudiantes dentro de un mismo sector geográfico.

A modo de reflexión, y tal como lo indica Cury (2019):

> Si bien los investigadores pretenden comprender los errores que cometen los estudiantes y descubrir sus causas, remediarlos o utilizarlos como “herramientas para el aprendizaje”, parece que la mayor dificultad a la que se enfrentan está relacionada con la falta de actividades que desafíen al estudiante a querer cambiar su actitud hacia ese error. (p. 54)

Es importante que los docentes incursionen en esta metodología de investigación y se conviertan en investigadores de aula, valoren el error como insumo necesario para el proceso de enseñanza aprendizaje e inculquen el valor de este a los estudiantes a través de diferentes actividades. Esto ayudaría a cambiar la percepción del error en las aulas de clase, y que este elemento sea aprovechado al máximo.

DECLARACIONES DE CONTRIBUCIONES DE LAS PERSONAS AUTORAS

MBG concibió la idea y desarrolló toda la investigación, desde la recogida y análisis de los datos hasta la presentación del trabajo final de forma individual.

DECLARACIÓN DE DISPONIBILIDAD DE DATOS

Los datos que respaldan los resultados de este estudio estarán disponibles por MBG, previa solicitud razonable.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a la SENACYT por la oportunidad brindada con el diplomado Investigación en el aula de matemática, el cual me proporcionó los insumos necesarios para llevar a cabo esta investigación.

6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Abrate, R., Pochulu, M. y Vargas, J. (2006). Errores y dificultades en Matematica: Análisis de causas y sugerencias de trabajo. 1ra Edición. Buenos Aires: Universidad Nacional de Villa María.

Ávila, C., Becerra, O., Rodríguez, D. y León, L. (2018). Solución de Ecuaciones Cuadráticas con una incógnita y con raíces Reales.

Baldor, A. (2011). Algebra. México: Ultra S.A. de C.V.

Bardin, L. (1996). El análisis de contenido. Madrid: Akal.

Candray, J. C. (2021). Concepciones Docentes a cerca de los Errores que cometen los estudiantes al resolver operaciones básicas con Fracciones. Revista Paradigma, Vol. LXII, Nro. 1, 130-155.

Cury, H. N. (2019). Análise de erros: o que podemos aprender das respostas dos alunos. 3ra Edición. Autêntica editores: Belo Horizonte.

Cury, H., Bisognin, E. y Bisognin, V. (2008). A análise de erros como metodología de investigación.

Del Puerto, S. M., Minnaard, C. L. y Seminara, S. A. (2004). Análisis de los errores: una valiosa fuente de información acerca del aprendizaje de las matemáticas. Revista Iberoamericana de Educación.

Dirección general de admisión. (2016). Temario para la prueba de conocimientos generales. Panamá: Universidad de Panamá.

Espinoza Freire, E. y Toscano Ruiz, D. (2015). Metodología de Investigación Educativa y Técnica. Machala: UTmach.

López González, W. O. y López Ponce, W. d. (2017). Las dificultades conceptuales en el proceso de aprendizaje de la matematica en el segundo año de educación media. Educere, 653-667.

Martínez, O. (octubre de 2014). El Método Genético como recurso didáctico para la enseñanza de las ecuaciones de primero y segundo grado. Tesis. Penonomé, Panamá.

Ministerio de Educación. (2014). Programa Curricular de Matemática. Décimo Grado. Panamá, Panamá: Dirección Nacional de Currículo y Tecnología Educativa.

Quecedo Lecanda, R. y Castaño Garrido, C. (2003). Introducción a la metodología de investigación cualitativa. Revista de Psicodidáctica, nº 14 , 5-40.

Socas, M. M. (2007). Dificultades y errores en el aprendizaje de las Matemáticas. Análisis desde el enfoque Lógico Semiótico. Investigación en Educación Matemática XI, 19-52.

Tettay-Mejía, S. I., Pulgar-García, M. y Rojas- Sandoval, Y. (2019). Errores en la resolución de problemas con ecuaciones de primer grado en estudiantes de secundaria. Praxis, 15(2), 193-205.

Torre, S. d. (2004). Aprender de los errores. Buenos Aires (Argentina): Magisterio del Rio de la Plata. Primera Edición.

Anexo 1

Preferencias en la elección del método de resolución para los ejercicios N°4 y N°5

	Ejercicio N°4 Resuelva $8x^2 - 2x - 15 = 0$ Por cualquiera de los métodos estudiados.		**Ejercicio N°5** Resuelva $\frac{1}{5}x^2 - \frac{1}{2}x = \frac{3}{10}$ por cualquiera de los métodos estudiados	
Método	**Total**	**%**	**Total**	**%**
Método de Factorización	3	10%	0	0.0%
Método de Completar Cuadrados	2	6.7%	4	13.3%
Método de Fórmula General	20	66.7%	5	16.7%
Sin elección	5	16.6%	21	70.0%
Total	30	100%	30	100%

Fuente: Elaboración propia.

Anexo 2

Entrevista con preguntas comunes para los seis estudiantes y sus respuestas

Pregunta	**De la prueba que realizaste ¿Cuál de los problemas te pareció más fácil, por qué? Justifica.**		**¿sabes que representan las soluciones de la ecuación?**
Estudiante 1	Ejercicio N°3 (fórmula general)	*"Como es un solo procedimiento que nada más se cambian son los números lo hallo más fácil que los demás"*	*"No"*
Estudiante 2	Ejercicio N°3 (fórmula general)	*"Porque el aspa simple no lo comprendí muy bien, no lo pude entender y el otro tema lo estábamos comenzando a dar así que no estaba muy claro en todo"*	*"No"*
Estudiante 3	Ejercicio N°1 (factorización)	*"Puesto que la fórmula de factorización es en mi concepto un poco más sencilla, el método es corto y sencillo de recordar, pero hay ocasiones en que no funciona muy bien"*	*"Representan dos raíces de una incógnita"*
Estudiante 4	Ejercicio N°4 Elegían el tema Método elegido: fórmula general.	*"Porque podía elegir trabajar con la formula general y ese tema lo había entendido un poco, aunque se inicia fácil pero después se pone complicado"*	*"No recuerdo"*
Estudiante 5	Ejercicio N°3 (fórmula general)	*"Con esa fórmula yo me puedo guiar para poder multiplicar los números mejor, aunque a veces no sé qué más hay que hacer"*	*"No sé"*
Estudiante 6	Ejercicio N°2 (completar cuadrados)	*"Porque conozco bien el procedimiento de completar cuadrados"*	*"No sé"*

Fuente: Elaboración propia.

Anexo 3

Entrevista con preguntas individuales para cada estudiante y sus respuestas.

Estudiante	Pregunta	Respuestas
Estudiante 1	1. Porque en la segunda parte, cuando no se te indico que método utilizar, ¿no resolviste ninguno? ¿por qué no usaste la formula general, si en el ejercicio Nº3 de la primera parte, trabajaste la formula general bastante bien, solo con algunos errores aritméticos? (Ver Anexo 5)	*"Porque demore mucho en el primero y cuando iba a resolver el ejercicio Nº4 no me dio tiempo. Lo hubiera resuelto por formula general".*
	2. ¿Porque factorizaste en el ejercicio Nº2, aun cuando se te había pedido usar completar cuadrado y sin embargo no pudiste factorizar en el ejercicio Nº1? (Ver Anexo 5)	*"Porque la Nº2 si tenía x y la Nº1 no".*
	3. Crees que la ecuación del ejercicio Nº5 se puede resolver usando la formula general?	*"No, yo no lo podría hacer porque estoy acostumbrado a números, con las fracciones me enredaría".*
Estudiante 2	1. Porque escribiste, "no me acuerdo de nada, ¿perdón" en los ejercicios que se debían resolver por factorización y completar cuadrados? ¿Considera que estos métodos son memorísticos?	*"Si. Si los volviera a dar los pudiera recordar y los podría resolver, con el tiempo se me olvidan".*
	Porque no intentaste hacer el ejercicio N°5 por ninguno de los 3 métodos	*"No recordaba cuando se tiene que invertir este valor, creo que tiene que ver con las fracciones".*
Estudiante 3	1. Me llamo mucho la atención que para resolver el ejercicio N°5 elegiste completar cuadrados. Expresaste que por tener fracciones es más fácil de resolver con ese método. Háblame de eso.	*"Pues aquí en el IPTIA mi profesora de matemática nos ha enseñado mucho a trabajar con fracciones entonces como es un procedimiento que ya tenía muy fresco en la mente se me hizo mucho más sencillo trabajarlo por completar cuadrados, pero no dividí 1/2 entre dos, creo que me confundí porque ya había un 2".*
Estudiante 4	1. En los tres primeros ejercicios, encerraste la posible respuesta sin procedimientos, ¿en qué te basaste para elegir?	*"Lo hice en mi mente, siempre he visto que la profesora lo hace así, mirando la ecuación. Por ejemplo, en el ejercicio Nº1 que dice , seria 1, el menos se restaría por eso elegí -1 y 6. Busque los números que se parecían".*

Estudiante	Pregunta	Respuestas
Estudiante 5	1. En el primer ejercicio se te pidió usar factorización, pero en su lugar usaste formula general, ¿por qué? (Anexo 6)	*"Yo me se la factorización, pero hay veces que me tranco y ni para adelante ni para atrás y allí es donde viene el problema, me gusta más la formula general".*
	2. Expresaste que el método de la formula general se te hace más fácil, pero que se pone complicado. ¿A qué te refieres con eso?	*"Porque hay partes donde me pone a pensar y allí es donde viene el problema porque por lo menos hay partes donde no se si hay que sumarlo o restarlo o que hay que hacer y de una vez viene el problema".*
Estudiante 6	1. En la primera parte de la prueba resolviste correctamente el ejercicio N°2 por completar cuadrados, ¿por qué no utilizaste este método para resolver el ejercicio N°4?	*"No se podía usar porque había un 8 delante de equis cuadrada y mejor use el aspa simple".*
	2. En el ejercicio N°5 escribiste que ibas a usar la formula general pero solo ordenaste la ecuación. ¿Por qué no continuaste?	*"Porque no sabía qué hacer con las fracciones".*

Fuente: Elaboración propia.

Anexo 4

Resultados de la tercera parte de la prueba

a) **Ejercicio o ejercicios más fáciles**. En esta pregunta el estudiante podía elegir varios ejercicios al considerarlos fáciles, por lo que el porcentaje fue tomado con base en la cantidad total de respuestas. Además, algunos no contestaron a esta pregunta.

Ejercicios	N°1	N°2	N°3	N°4	N°5
Totales	7	5	15	11	1
Porcentaje	17.9%	12.8%	38.4%	28.2%	2.7%

Fuente: Elaboración propia.

a) **Ejercicio o ejercicios más difíciles**. En esta pregunta el estudiante podía elegir varios ejercicios al considerarlos difíciles, por lo que el porcentaje fue tomado con base en la cantidad total de respuestas. Además, algunos no contestaron a esta pregunta.

Ejercicios	N°1	N°2	N°3	N°4	N°5
Totales	9	9	4	5	18
Porcentaje	20.0%	20.0%	8.9%	11.1%	40%

Fuente: Elaboración propia.

Anexo 5

Primera parte de la prueba del estudiante 1 entrevistado.

Indicaciones Generales: Sea ordenado y claro al resolver. No se permite el uso de calculadora ni celular. Es importante realizar los procedimientos de cada ejercicio.

I. Los siguientes incisos de opción múltiple tienen varias alternativas de las cuales una sola es correcta. Marca la respuesta correcta, encerrando en un círculo la letra que la contenga. Justifica tu respuesta con los procedimientos pertinentes.

1. Resuelve la siguiente ecuación cuadrática por **factorización** e indica la respuesta correcta.

$$y^2 + y - 6 = 0$$

$y^2 + y = 6$

$y^2 - 6 \; ; \; y + 1 = 0$

$y = 6 \text{ o } y = -1$

a) $y = -6; \quad y = 1$

b) $y = 6; \quad y = -1$

c) $y = 3; \quad y = -2$

d) $y = -3; \quad y = 2$

2. Resuelva la siguiente ecuación cuadrática utilizando el método de **completar cuadrados** e indica la respuesta correcta

$$x^2 + 12x - 45 = 0$$

$(x \quad -3) = 0$

$(x + 15) = 0$

$x - 3 = 0 \; ; \; x + 15 = 0$

$x = 3 \qquad x = -15$

otro metodo

a) $x = -3; \quad x = -9$

b) $x = 3; \quad x = -15$

c) $x = 15; \quad x = 3$

d) $x = 9; \quad x = 3$

3. Resuelva la siguiente ecuación cuadrática utilizando la **formula general** e indica la respuesta correcta

Formula
$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$$a^2 + 4a - 3 = 0$$

$a = 1 \quad b = 4 \quad c = -3$

$x = \frac{-4 \pm \sqrt{(4)^2 - 4(1)(-3)}}{2(1)}$

$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16+12}}{2}$

$x = \frac{-4 \pm \sqrt{28}}{2}$

$x = -4 \frac{\pm \sqrt{14}}{2}$

$x_1 = \frac{-4 + \sqrt{14}}{2} = 2 + \sqrt{14}$

$x_2 = \frac{-4 - \sqrt{14}}{2} = 2 - \sqrt{14}$

a) $a = -2 + \sqrt{7}; \quad a = -2 - \sqrt{7}$

b) $a = -3; \quad a = -1$

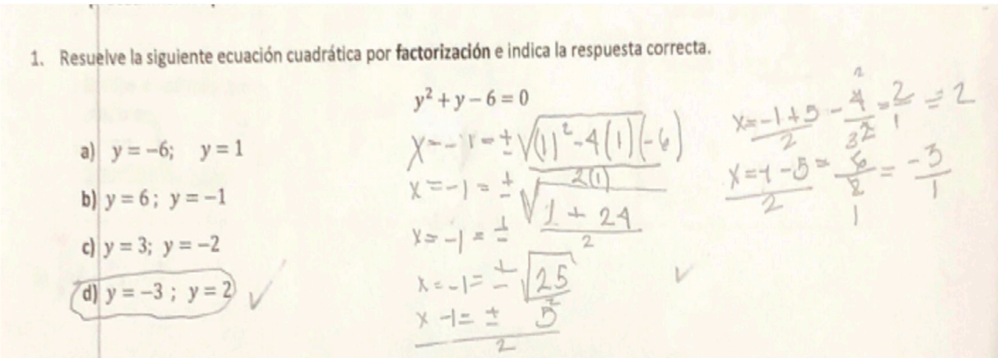
c) $a = 12; \quad a = -16$

d) $a = 2 + \sqrt{14}; \quad a = 2 - \sqrt{14}$

Fuente: Prueba aplicada para recolección de datos.

Anexo 6

Ejercicio 1 de la prueba del estudiante 5 entrevistado.


1. Resuelve la siguiente ecuación cuadrática por **factorización** e indica la respuesta correcta.

$y^2 + y - 6 = 0$

a) $y = -6; \quad y = 1$

b) $y = 6; \; y = -1$

c) $y = 3; \; y = -2$

d) $y = -3; \; y = 2$

$X = -1 \pm \frac{\sqrt{(1)^2 - 4(1)(-6)}}{2(1)}$

$X = -1 \pm \frac{\sqrt{1 + 24}}{2}$

$X = -1 \pm \frac{\sqrt{25}}{2}$

$X = \frac{-1 \pm 5}{2}$

$X = \frac{-1+5}{2} = \frac{4}{2} = \frac{2}{1} = 2$

$X = \frac{-1-5}{2} = \frac{-6}{2} = \frac{-3}{1}$

Fuente: Prueba aplicada para recolección de datos.