Cuadernos
de Investigación y Formación
en Educación Matemática

e-ISSN en línea: 2215-5627
Impresa: ISSN 1659-2573
Vol: 17 · N°. 2 · 2024
127-150
Recibido: 17/04/2024
Aprobado: 06/06/2024

Artículos de investigación

LINGÜÍSTICA SISTÉMICO-FUNCIONAL EN EL ESTUDIO DEL LENGUAJE MATEMÁTICO. APORTACIONES DESDE EL ANÁLISIS DE ALGUNOS TEXTOS ALGEBRAICOS Y DEL CÁLCULO

SYSTEMIC-FUNCTIONAL LINGUISTICS IN THE STUDY OF MATHEMATICAL LANGUAGE. CONTRIBUTIONS FROM THE ANALYSIS OF SOME TEXTS FROM ALGEBRA AND CALCULUS.

Luis Alberto López-Acosta[1]
ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-2903-5413

RESUMEN

En este trabajo se muestran algunas de las posibilidades que tiene emplear la Lingüística Sistémico-Funcional para el análisis del lenguaje matemático. Estas posibilidades son retomadas de tres investigaciones que buscaron comprender las características gramaticales y multisemióticas de distintos discursos algebraicos de traducciones de textos originales en la historia del desarrollo del álgebra, así como textos de estudiantes al resolver problemas relacionados con el álgebra desarrollada por Viète y Descartes. Los resultados de estos estudios han dado muestra de las características gramaticales y semánticas que diferencian distintos tipos de textos algebraicos y otros pertenecientes a estudiantes. También, se aborda el uso de mecanismos de intersemiosis entre los distintos recursos semióticos del lenguaje matemático: lenguaje natural, simbolismo e imágenes. Principalmente, se busca dar una muestra sobre cómo los métodos de análisis desde este enfoque teórico pueden visualizar elementos ocultos para personas investigadoras en Educación Matemática.

Palabras clave: Lenguaje Matemático, Semiótica Social, Lingüística Sistémico-Funcional, Multisemiosis, Educación Matemática.

ABSTRACT

This paper shows some of the possibilities of using Systemic-Functional Linguistics for the analysis of mathematical language. These possibilities are taken from three investigations that aimed to understand the grammatical and multisemiotic characteristics of different algebraic discourses based on translations of original texts in the history of the development of algebra, as well as student texts when solving problems related to the algebra developed by Viète and Descartes. The results of these studies have shown the grammatical and semantic characteristics that differentiate different types of algebraic texts and others belonging to students. The use of certain mechanisms of intersemiosis

1 Departamento de Educación Secundaria, Escuela de Formación Docente, Universidad de Costa Rica, San José, San Pedro Montes de Oca, Costa Rica, C. P. 03330. Correo electrónico: luis.lopezacosta@ucr.ac.cr

between the different semiotic resources of mathematical language: natural language, symbolism and images is also addressed. The main objective is to show how the methods of analysis from this theoretical approach can visualize hidden elements for researchers in Mathematics Education.

Keywords: Mathematical Language, Social semiotics, Systemic Functional Linguistics, Multisemiosis, Mathematics Education.

1. INTRODUCCIÓN

Los estudios sobre el lenguaje matemático en la disciplina han mostrado sus distintas características y, naturalmente, se ha recurrido a marcos de referencia que articulan construcciones propias de la Educación Matemática con disciplinas como la Lingüística y la Semiótica para comprender los fenómenos asociados. Principalmente, los estudios han dado cuenta de elementos como los que se desarrollan a continuación.

Relaciones entre pensamiento y lenguaje: algunas posturas relacionan el pensamiento matemático con la comunicación interna, de ahí que se hable de la *comognición* (traducción del término original *commognition*) (Sfard, 2008). De acuerdo con esta autora,

> El proceso de objetivación implica […] dos movimientos discursivos […] la *cosificación*, que consiste en sustituir el discurso sobre las acciones por el discurso sobre los objetos, y la *alienación*, que consiste en presentar los fenómenos de manera impersonal, como si ocurrieran por sí mismos, sin la participación de los seres humanos (Sfard, 2008, p. 44, énfasis propio).

Otras posturas que vinculan el pensamiento con la corporalidad y conjuntos semióticos establecen la importancia que tiene el uso de recursos semióticos como los gestos y la conjunción de más de un recurso como el habla y los gestos para el desarrollo del pensamiento matemático. Algunas otras se refieren, también, al aprendizaje de las matemáticas desde un punto de vista discursivo, estableciendo relaciones entre el pensamiento y el lenguaje. Estas últimas están inspiradas, principalmente, en los planteamientos de Vigotsky y Wittgenstein (Kieran et al., 2003; Sfard, 2003, 2008).

El registro matemático: a decir de McGregor y Price (1999), los estudios relativos al aprendizaje del lenguaje y las matemáticas en un principio estuvieron centrados en estudiar los significados matemáticos desde su componente del lenguaje natural, lo que en el campo ha sido denominado registro matemático de acuerdo con los trabajos de Halliday (1982). Se han identificado las características de su vocabulario específico que hace uso de términos que son empleados en el lenguaje natural; así como la forma en la que se interpretan las regularidades discursivas de enunciados matemáticos; y la capacidad para la traducción y comprensión de problemas verbales. De este tipo de estudios se ha determinado que los discursos[2] matemáticos son altamente *objetivados* (Schleppegrell, 2007; Sfard, 2003, 2008), puesto que hay una tendencia a convertir *procesos* en *objetos* mediante construcciones metafóricas (Pimm, 1987; Sfard, 2003, 2008; O'Halloran, 2005, 2007; Morgan, 2014). Además, este discurso hace uso de un vocabulario especializado que incluye palabras únicas y otras palabras provenientes del lenguaje cotidiano que adquieren ciertas restricciones. Este último tipo de palabras constituyen una de las fuentes más comunes de dificultades en su aprendizaje (Halliday, 1975; Pimm, 1987; Morgan, 2014). También, se recurre al uso de grupos densos de palabras que resumen

2 Desde la postura de M. A. K. Halliday, el discurso es considerado como una instanciación del lenguaje. Esto es, el lenguaje como sistema semiótico complejo, junto con todas sus opciones de significado, determina conjuntos de discursos que dependen del contexto de la situación.

grandes cantidades de información como *máximo común divisor*, *mínimo común múltiplo*, entre otros (Schleppegrell, 2004; Morgan, 2014).

Competencia comunicativa en matemáticas: se ha propuesto que el aprendizaje del lenguaje matemático debe pensarse como el aprendizaje de una segunda lengua (Pimm, 1987; Kirshner, 2001; Moschkovich, 2018). Sin embargo, esta propuesta implicaría promover una *competencia comunicativa* que, de acuerdo con Pimm (1987, p. 4) "implica saber cómo usar y comprender estilos de lenguaje apropiados para circunstancias sociales particulares". Destaca que este uso depende del entendimiento profundo sobre las reglas y estructuraciones de este lenguaje, las cuales en el contexto escolar no son del todo explícitas (Drouhard y Teppo, 2004; Halliday, 1993; Morgan, 2006, 2014; O'Halloran, 2005, 2007; Schleppegrell, 2004, 2007; Pimm, 1987). Estudios en el campo de la lingüística señalan que esta habilidad va desde el uso inconsciente e implícito de los componentes de la lengua hasta una reflexión sistemática sobre la lengua como objeto (Camps et al., 2007; Fontich, 2010; Pascual, 2013)Esta reflexión solo puede abordarse en procesos de aprendizaje (Pascual, 2013) y requiere un conocimiento robusto sobre la lengua.

Simbolismo matemático: se han reportado grandes dificultades respecto a la manipulación de los símbolos algebraicos (Bednarz et al., 1996; Harel, 2007; Harel et al., 2008; Mason, 1996; McGregor y Stacey, 1997; Stacey y Chick, 2004), que suelen extenderse incluso hasta los niveles superiores de educación (Thompson, 2017). Estas dificultades se han atribuido a que la manipulación del simbolismo matemático no requiere de una referencia a su semántica (Pimm, 1987). Otros trabajos han demostrado que el simbolismo matemático puede ser considerado un lenguaje en sí mismo desde la gramática generativa de Noam Chomsky (Drouhard, 1992; Kirshner, 1987, 2001) exponiendo las *estructuras profundas* y *superficiales* de las expresiones algebraicas y mostrando las reglas sintácticas para realizar transformaciones de expresiones. Por otro lado, para el componente semántico se ha empleado en distintos trabajos el marco de Gottlob Fredge, en el que se recurre a las nociones de la *denotación* y *sentido* (Arzarello, 2006; Drouhard, 1992; Rojano, 1996).

Multimodalidad: actualmente existe un creciente interés en estudios de carácter multimodal de los discursos matemáticos, los cuales establecen que la producción de significados matemáticos conlleva una articulación de, al menos, tres recursos semióticos: *el lenguaje natural*, *el simbolismo* y *las imágenes* (Drouhard y Teppo, 2004; Morgan et al., 2014; Moschkovich et al., 2018; Morgan, 2014; O'Halloran, 2005; Schleppegrell, 2007). Actualmente existen muchos enfoques multimodales en el campo de la Educación Matemática que abordan, naturalmente, aspectos que intentan relacionar el uso de distintos recursos semióticos para significar y mejorar la comprensión de los objetos matemáticos (ver p. ej. Alfaro y Joutsenlahti, 2020; Arzarello, 2006; Radford, 2007). Sin embargo, no profundizan en las características semióticas de los textos desde posturas lingüísticas multimodales o multisemióticas para analizar el fenómeno de intersemiosis.

Habilidades y competencias lingüísticas matemáticas: este último aspecto ha sido destacado como una necesidad en las discusiones temáticas respecto a los estudios del lenguaje matemático en general (Morgan et al., 2005; Morgan, 2016; Morgan et al., 2014), lo cual requiere esencialmente que la investigación tome como objeto al lenguaje en sí mismo y las habilidades lingüísticas asociadas (Pimm, 2018). Según Morgan et al (2014):

> Otra esfera de preocupación que todavía no ha recibido una atención sustancial en el marco de las investigaciones sobre la enseñanza de las matemáticas es el desarrollo de las competencias y los conocimientos lingüísticos necesarios para la participación en las prácticas matemáticas (p. 843).

Si bien la intención es identificar estas competencias y habilidades para mejorar el rendimiento en las prácticas matemáticas, no hay una claridad respecto a qué tipo de habilidades lingüísticas son necesarias.

Todas las contribuciones antes mencionadas han aportado de manera significativa a algunos entendimientos respecto a la naturaleza gramatical, sintáctica, semántica y pragmática del simbolismo y el registro matemático. No obstante, se considera que es fundamental para desarrollar una competencia comunicativa y habilidades metalingüísticas que existan descripciones lingüísticas, lo más profundas posibles sobre esas características gramaticales, multimodales y multisemióticas de los distintos tipos de textos matemáticos. Por lo tanto, la postura en este trabajo consiste en considerar que las habilidades metalingüísticas que se espera que las personas estudiantes obtengan podrán ser promovidas en la didáctica siempre y cuando se tengan descripciones profundas sobre las estructuras lingüísticas del lenguaje matemático (Doran, 2018; López-Acosta y Rodríguez-Vergara, 2021; López-Acosta y Montiel, 2021). Este tipo de investigación es la que se propone en este trabajo y para lograr este cometido, se requieren métodos de análisis del discurso más robustos.

Con base en lo anterior, en este trabajo se narran algunos ejemplos del uso de marcos de referencia sustentados en el uso de la teoría Lingüística-Sistémico Funcional (LSF de aquí en adelante), también conocida en el mundo anglosajón como Semiótica Social, para el análisis de textos matemáticos. El uso de esta teoría ha sido común en la Educación Matemática en trabajos seminales como el de Pimm (1987), Morgan (1996, 2006) y, otros contemporáneos como el de Planas (2018), Smith et al. (2016), Thrinick et al. (2014), entre otros. Sin embargo, a diferencia de los de Morgan, la mayoría de estos trabajos no han profundizado en las herramientas del análisis gramatical que propone esta teoría, o bien, sus derivaciones hacia métodos de análisis del discurso multimodal.

Con base en estas consideraciones, las investigaciones que se referencian incorporaron marcos y herramientas analíticas para ampliar las caracterizaciones actuales respecto al lenguaje matemático, para entender qué aspectos lo caracterizan y, por tanto, lo diferencian de otros lenguajes, intentando profundizar en su gramática funcional más allá de su simbolismo (ver López-Acosta, 2023). Así, el objetivo de este trabajo es proporcionar, con base en ejemplos concretos y particulares, elementos que muestren el potencial que esta teoría tiene para los análisis gramaticales y multisemióticos de distintos discursos matemáticos.

2. LINGÜÍSTICA SISTÉMICO-FUNCIONAL

La LSF es una teoría situada en las corrientes sociolingüísticas, la cual considera un criterio funcional de la lengua (Halliday, 1982). Esto significa que tiene especial interés en determinar la función del lenguaje para las personas. Es decir, busca entender las estructuración del lenguaje con base en el uso y cómo sirve a las personas para cumplir con ciertas finalidades (Halliday, 1982).

De acuerdo con Halliday (1982)

> una teoría funcional no es una teoría sobre los procesos mentales que concurren en el aprendizaje de la lengua materna; es una teoría acerca de los procesos sociales que confluyen en él. Está vinculado con el lenguaje entre personas (inter-organismos) y, por tanto, aprender a hablar se interpreta como el dominio de un potencial de comportamiento por parte del individuo. Desde esa perspectiva, la lengua es una forma de interacción, y se aprende mediante ella; en lo esencial eso es lo que hace posible que una cultura se transmita de una generación a otra (p. 29).

Para la LSF el lenguaje es un sistema semiótico que permite construir y expresar la realidad de las personas, por lo cual el lenguaje es visto por Halliday como un potencial de significado, puesto que está determinado por condiciones socioculturales que lo organizan. Independientemente de las culturas y los medios en los que se desenvuelve el lenguaje, las funciones que debe cumplir de acuerdo con Halliday (1982) son:

1. Interpretar toda nuestra experiencia externa e interna y codificarla en clases de fenómenos como procesos, acontecimientos y acciones, clases de objetos, de gente y de instituciones, etc.

2. Expresar relaciones lógicas que den sentido de concatenación o no sobre aquello que se expresa.

3. Expresar cómo participamos en las situaciones del discurso, los roles que asumimos y que imponemos a los otros; además de los deseos, sentimientos, actitudes y juicios.

4. Organizar todo lo anterior como un discurso pertinente; es decir, estructurar el discurso para que los interlocutores reciban el mensaje.

Estas cuatro funciones que Halliday reconoce en el lenguaje son las que definen los constructos analíticos que son empleados para estudiar y analizar los textos. Estos constructos son denominados *metafunciones* del lenguaje (véaseTabla 1).

Tabla 1 – Metafunciones en la LSF.

Metafunción	Descripción
Ideacional	Función del lenguaje para codificar la experiencia cultural e individual de las personas como miembros de esa cultura. Expresa los fenómenos del entorno. Se compone a su vez de dos metafunciones: la *metafunción experiencial*—la cual refiere a cómo el lenguaje representa la experiencia de la realidad en la cláusula— y la *metafunción lógica*—refiere a la capacidad del lenguaje de crear un todo coherente mediante conexiones lógicas entre varios elementos de un texto a través de relaciones entre cláusulas.
Interpersonal	Función del lenguaje que representa cómo el hablante se inmiscuye en el contexto de situación, tanto al expresar sus propias actitudes, juicios y propios juicios como al tratar de influir en las actitudes y en el comportamiento de otros.
Textual	Función del lenguaje para dar textura al mensaje. Expresa la relación del lenguaje con su entorno, incluso el entorno verbal y el entorno no verbal; el entorno situacional.

Fuente: Elaboración basada en López-Acosta (2023).

2.1. LA MULTIMODALIDAD Y LA MULTISEMIOSIS

Desde el área de la lingüística, la multimodalidad o el estudio de discursos multimodales es un campo de investigación emergente (O'Halloran, 2005) y surge al reconocer que el estudio del lenguaje, centrado exclusivamente en la oralidad y la escritura, representa limitaciones para comprender el fenómeno de la comunicación desde una perspectiva más amplia (Crawford et al., 2015). Esto se debe a que el lenguaje es un recurso que funciona de manera conjunta con otros recursos semióticos (O'Halloran, 2004, 2005). Cabe aclarar que, en este planteamiento, se refieren al lenguaje como el lenguaje natural; es decir, lo que Halliday denomina el registro matemático. Por ello se especifica que este lenguaje natural funciona junto con otros recursos semióticos como las imágenes y el simbolismo matemático.

Respecto a las matemáticas, O'Halloran (2005) señala que

> las matemáticas y las ciencias se consideran construcciones "multisemióticas"; es decir, discursos formados a través de elecciones de los sistemas de signos funcionales de lenguaje, simbolismo matemático y visualización. Estos discursos son comúnmente constituidos como textos escritos, aunque las matemáticas y las ciencias no se limitan a estas formas de actividad semiótica. Allí son muchos géneros 'multimodales' diferentes que constituyen las matemáticas y las prácticas científicas; por ejemplo, conferencias, documentos de conferencias, software programas e investigaciones de laboratorio (p. 10, traducción propia).

El modelo del Análisis Sistémico Funcional del Discurso Multimodal (ASFDM) desarrollado por Kay O'Halloran (O'Halloran, 2005, 2007, 2011, 2012, 2014, 2015), representa una ampliación de la perspectiva de la LSF hacia el estudio de los discursos multimodales y multisemióticos con los que se estudia la *intersemiosis*, fenómeno característico de los discursos multimodales y multisemióticos que se caracteriza por la producción de significado articulado entre los distintos recursos semióticos, toda vez que cada recurso semiótico, aisladamente, tiene un potencial de significado limitado; razón por la cual recurre a otros recursos para construir y expandir su límite de significado.

> El potencial de significado resultante de las matemáticas se extiende más allá de lo posible a través de la suma de los tres recursos (…). El éxito de las matemáticas como discurso se deriva del hecho de que se basa en los potenciales de significado del lenguaje, las imágenes visuales y el simbolismo de maneras muy específicas. Es decir, los sistemas de discurso, gramática y presentación para cada recurso han evolucionado para funcionar como redes de sistemas interconectados en lugar de fenómenos aislados (O'Halloran, 2005, p. 159, traducción propia).

A partir de estas consideraciones, O'Halloran ha propuesto los siguientes mecanismos de intersemiosis:

1. *Cohesión semiótica*. Se produce una organización compleja de los sistemas de opción del lenguaje para estructurar textos cohesivos al interior y a través de *Mini-géneros* (aquellos recursos prefabricados en los discursos que definen los textos y sus propósitos), *Ítems* (aquellos elementos que determinan unidades distinguibles mediante opciones sistemáticas de las gramáticas del lenguaje natural, simbolismo e imágenes visuales) y, finalmente, los *Componentes* (aquellas partes que constituyen los distintos recursos semióticos y que estructuran y dan sentido a los significados en cada Ítem).

2. *Adopción semiótica*. La organización de las opciones provenientes de un recurso semiótico es incorporada como organización de opciones al interior de otro recurso semiótico.

3. *Mezcla semiótica*. Consiste en Ítems que contienen de manera sistemática la organización de opciones provenientes de diferentes recursos semióticos.

4. *Yuxtaposición y espacialidad*. Los Mini-géneros, Ítems, Componentes y elementos constitutivos se organizan de manera composicional para facilitar la intersemiosis.

5. *Transición semiótica*. La organización de opciones produce transiciones discursivas, las cuales producen cambios en el discurso de un Mini-género, Ítem y Componente hacia otro.

6. *Metáfora semiótica*. Se recurre a incongruencias en el estatus funcional de cada elemento entre los diversos recursos semióticos a nivel semántico y léxico-gramatical (ver Halliday, 1998).

Estos mecanismos de intersemiosis permiten ver cómo los textos construyen cohesión intersemiótica entre los distintos recursos semióticos que emplean para producir significados robustos.

3. EJEMPLOS DE ANÁLISIS SISTÉMICO-FUNCIONALES DE LA GRAMÁTICA Y DE LA INTERSEMIOSIS

Los elementos que se muestran en este trabajo forman parte de distintas investigaciones (ver López-Acosta, 2023; López-Acosta y Rodríguez-Vergara, 2021; López-Acosta y Montiel, 2021), cuya intención fue profundizar en las características gramaticales y multisemióticas del “análisis algebraico” de Viète y Descartes en el Renacimiento, así como de estudiantes de bachillerato mexicano al resolver problemas de análisis algebraico. Solo se hará referencia a fragmentos de análisis con el fin de mostrar el funcionamiento de estos métodos de análisis y las posibles implicaciones en el entendimiento de los discursos matemáticos. Por limitaciones de espacio algunos de los constructos de las teorías serán mencionados de manera limitada. Las descripciones completas pueden revisarse en López-Acosta (2023).

El método de la LSF para estudiar la gramática se basa en el análisis cada una de las Metafunciones, lo cual consiste en determinar las categorías funcionales que los elementos gramaticales manifiestan en el texto. Esto se logra a partir de la segmentación de los textos en cláusulas, las cuales son consideradas como la unidad mínima de significado para la LSF. Una cláusula queda determinada por al menos un grupo verbal.

3.1. ANÁLISIS DE LA METAFUNCIÓN EXPERIENCIAL

Se analiza a partir del sistema de *Transitividad*, aquel en el que se manifiesta la configuración de las categorías semánticas *Participantes*, *Procesos* y *Circunstancias*. Su realización en la gramática se da a partir de *grupos nominales*, *grupos verbales* y *grupos adverbiales* o *frases prepositivas*, respectivamente. A cada uno de los Participantes, Procesos y Circunstancias se les asigna una función predeterminada en la LSF. A partir de la identificación del rol funcional del Proceso se definen las funciones específicas para los Participantes y Circunstancias.

Por ejemplo, en el caso de la cláusula “He dividido diez en dos partes”, se tiene la configuración:

He dividido	diez	en dos partes;
Proceso	**Participante**	**Circunstancia**
Material	Alcance	Producto

"He dividido" es un Proceso Material, que se relaciona con el hacer. El Participante "diez" es el Alcance, categoría que se refiere a aquello sobre lo que se está actuando. En este caso, al ser un proceso abstracto, el alcance no se ve afectado, sino que es aludido. La Circunstancia "en dos partes" señala la condición o producto de la acción; en este caso, el Producto.

Otro ejemplo sería la cláusula: "por lo tanto $x^3 + x = x^2 + 2$".

Por lo tanto	$x^3 + x$	$=$	$x^2 + 2.$
Conector	**Participante**	**Proceso**	**Participante**
	Identificado	Relacional: Identificativo	Identificador

El Proceso "=" se cataloga como un Proceso Relacional. Estos se relacionan con el establecer correspondencias en términos de atributos, o bien, de identificadores; como en este caso, entre Participantes. Para ver una clasificación más precisa de los roles funcionales en las cláusulas, consultar López-Acosta (2023).

Como se muestra en la Tabla 2, este tipo de análisis ha permitido identificar las diferencias entre los elementos que caracterizan distintos discursos algebraicos en épocas clave del desarrollo del álgebra (ver López-Acosta, 2023; López-Acosta y Rodríguez-Vergara, 2021). Los textos algebraicos más cercanos a la fase simbólica presentan mayormente Procesos Relacionales, lo cual es acorde con el establecimiento de equivalencias, a diferencia de los textos previos que se centraban en especificar los pasos para resolver problemas, o bien, a la explicación de los métodos para la resolución de ecuaciones (consultar López-Acosta, 2023 para una explicación más amplia).

Tabla 2 – Frecuencia de Procesos en el corpus algebraico.

Texto	**Existenciales**	**Materiales**	**Mentales**	**Rel. Atrib.**	**Rel. Ident.**	**Verbales**
Babilonio	22%	**56%**	0%	0%	22%	0%
Diofanto	0%	**30%**	10%	**30%**	20%	10%
Al-khwârizmî	32%	**47%**	0%	6%	15%	0%
Cardano	6%	17%	6%	28%	**39%**	6%
Bombelli	**29%**	24%	0%	19%	**29%**	0%
Buteo	11%	29%	5%	13%	**39%**	3%
Vieta	7%	5%	5%	**49%**	33%	2%
Descartes	9%	**36%**	11%	31%	7%	7%
Total	**13%**	**26%**	**5%**	**27%**	**25%**	**3%**

Fuente: López-Acosta y Rodríguez-Vergara (2021).

Nota: En negrita se resaltan los procesos predominantes.

3.2. ANÁLISIS DE LA METAFUNCIÓN LÓGICA

El análisis de la Metafunción Lógica involucra el análisis de los sistemas de TAXIS y RELACIONES LÓGICO SEMÁNTICAS. Estas se estudian en los complejos clausulares, puesto que los significados lógicos desde la LSF involucran la forma en la que el significado se organiza entre cláusulas. Por limitaciones de espacio solo se mostrará un ejemplo del análisis del sistema de TAXIS. Convencionalmente, en la LSF los signos "//" representan los límites entre una cláusula y otra. Asimismo, siempre se procede a recuperar a los participantes que son omitidos y especificarlos con el signo "^" y escritos en mayúsculas, como es el caso de "^NOSOTROS".

Para el sistema de TAXIS, se sigue la convención en LSF para designar las relaciones paratácticas por medio de los números 1, 2, 3, 4…, mientras que para las relaciones hipotácticas se emplean las letras griegas α, β, γ, … y se han organizado estas relaciones de manera visual por medio de una estructuración escalonada para identificar las dependencias.

Por ejemplo, de un texto de Diofanto, el complejo clausular "*encontramos que 5δυ es igual a* 16ς *y* 16ς=16/5 *Si sumamos los números faltantes en ambos lados y si restamos iguales de iguales*.", quedaría separado por cláusulas de la siguiente manera: "// Si sumamos ^NOSOTROS los números faltantes en ambos lados // y si restamos iguales de iguales, // ^NOSOTROS encontramos // que 5δυ es igual a 16ς // y ς=16/5"//."(véase Figura 1).

Figura 1 – Visualización del análisis de TAXIS y LOGICO SEMÁNTICA

β˜1	Si sumamos ^NOSOTROS los números faltantes en ambos lados
2	y si restamos iguales de iguales,
α˜α	^NOSOTROS encontramos
β˜1	que $5\delta^{\upsilon}$ es igual a 16ς
2	y $\varsigma = \frac{16}{5}$.

Fuente: López-Acosta (2023, p. 66).

Con este análisis es posible determinar una lectura lógica del complejo. Por ejemplo, en la Tabla 3 se muestra cómo el mismo complejo clausular puede ser reescrito de la siguiente manera: "//^NOSOTROS encontramos // que $5\delta^{\upsilon}$ es igual a 16ς // y ς=16/5"// Si sumamos ^NOSOTROS los números faltantes en ambos lados // y si restamos iguales de iguales//".

Tabla 3 – Reescritura de un complejo clausular con base en el análisis lógico.

Redacción original	**Esclarecimiento de las relaciones tácticas entre las cláusulas mediante el análisis de la metafunción lógica.**
Si sumamos ^NOSOTROS los números faltantes en ambos lados y si restamos iguales de iguales, ^NOSOTROS encontramos que $5\delta^{\upsilon}$ es igual a 16ς y =16/5.	^NOSOTROS encontramos que 5δ es igual a 16ς y ς=16/5 Si sumamos ^NOSOTROS los números faltantes en ambos lados y si restamos iguales de iguales.

Nótese cómo la redacción resultante de la cláusula en la Tabla 3, posterior al análisis lógico, provee una lectura en voz activa. El estilo de las matemáticas y los discursos científicos recurren al uso de la voz pasiva para enfatizar como nueva información los resultados matemáticos (Halliday, 1993; Pimm, 1987; Lee, 2002); sin embargo, esta estructura sintáctica dificulta la lectura por parte de las personas estudiantes, puesto que les resulta complejo identificar las relaciones de dependencia entre cláusulas.

3.3. ANÁLISIS DE LA METAFUNCIÓN TEXTUAL

Para la Metafunción Textual se analiza el sistema de TEMA y REMA. El Tema en una cláusula incluye todo el contenido inicial de la cláusula hasta el primer elemento Experiencial, sea este un Proceso, Participante o Circunstancia. Este análisis permite identificar sobre lo que trata el mensaje, es decir, si los Temas principalmente son Procesos, Participantes o Circunstancias. Por ejemplo, si consideráramos un extracto de un texto de al-Khwârizmî, la estructura de los Temas coincide con la de una receta de cocina, tal y como se muestra en la Tabla 4.

Tabla 4 – Estructura temática entre los textos de al-Khwârizmî, una receta de cocina y un texto de Descartes.

Texto de una receta	Texto de al-Khwârizmî	Texto de Descartes
Freír ajo, cebolla, jitomate // **cortado** en trozos uniformes y chiles por 10 minutos. // **Incorporar** fondo de pollo y // **cocinar** por 25 minutos a fuego lento. // **Licuar** con el fondo de pollo y de tortilla frita. // **Colar y aromatizar** con el epazote. // **Rectificar** sazón // **El caldillo** debe de quedar ligero. // **Cortar** la tortilla en juliana, // **freírla** // y **escurrir** muy bien. // **Cortar** el chile pasilla en tiras delgadas // y **freírlo** ligeramente // sin **quemarlo**.	**He** dividido diez en dos partes; // luego **he** multiplicado cada parte por sí misma // y **sumadas** resultan cincuenta y ocho dirhams. // **Haces** de una de las partes cosa // y **^HACES** la otra diez menos la cosa. // **Multiplica** luego diez menos cosa por sí mismo, // **resulta** cien y un tesoro menos veinte cosas. // **Multiplica** luego cosa por cosa, // **resulta** tesoro. // **Suma** luego ambos, // **resulta** la suma cien y dos tesoros menos veinte cosas igual a cincuenta y ocho dirhams. // **Restaura** luego esos cien y dos tesoros de las veinte cosas sustraídas // y **súmalas** a los cincuenta y ocho, // (…)	Como si **quisiera saber** // de qué género es la línea // que **imagino** descrita por la intersección de la regla y la pieza , // cuyo **lado** está prolongado indefinidamente hacia , // y que **moviéndose ^KN** sobre el plano, en línea recta // –es decir de tal manera que **su lado** se encuentre siempre aplicado sobre alguna región de la línea // **prolongada** de uno y otro lado– // **hace mover** circularmente la regla alrededor del punto , // **por estar** ella vinculada // de tal manera que **^LA REGLA** pasa siempre por el punto . // **Elijo** una línea recta como // para **referir** a sus diversos puntos todos los de la línea curva ; // y en **esta línea** elijo un punto, como el , // para **empezar** por él el cálculo. // **Digo** // que **elijo éste o aquella** // (…)

Nota: En negritas se resaltan los Temas experienciales de cada cláusula.

Esta identificación de los temas experienciales ayuda a comprender cómo se estructura el mensaje del texto y, por ende, los elementos que se priorizan en este al iniciar cada cláusula. En el caso del texto de al-Khwârizmî, al igual que en una receta de cocina, los Temas experienciales son Procesos; es decir, verbos que aluden al hacer. De manera que el texto de este matemático busca, desde la interpretación LSF, dar a conocer cómo llevar a cabo un procedimiento para obtener un resultado.

Nótese que el texto de Descartes es sustancialmente diferente al de al-Khwârizmî en cuanto a las características de sus Temas experienciales. Por ejemplo, lo encontrado tanto en López-Acosta (2023) como López-Acosta y Rodríguez-Vergara (2021) destaca que el significado textual en Descartes es combinado, en el sentido de que se emplean en una proporción similar Participantes y Procesos como Temas Experienciales, en algunos de los cuales él mismo se incluye como Participante. Esto indica que dicho significado se refiere más hacia la explicación de su pensamiento, en mostrar cómo él resuelve el problema; dicho de otra forma, su método de resolución. De hecho, a diferencia del texto de al-Khwârizmî, el de Descartes coincide con los patrones Textuales y Lógicos de un discurso hablado (López-Acosta, 2023; y López-Acosta y Rodríguez-Vergara, 2021).

3.4. ANÁLISIS DE LA INTERSEMIOSIS

Para el Análisis Sistémico-Funcional de los Discursos Multimodales se requieren distintas etapas de análisis, de las cuales solo se mostrará la relativa a los mecanismos de intersemiosis. Como se ha mencionado, la importancia de estos mecanismos reside en el potencial del lenguaje para articular los distintos recursos semióticos y crear un todo coherente que produzca significados complejos.

La Figura 2 corresponde a un extracto de una actividad de un libro de texto que trata sobre la definición del límite de una función. El uso de este texto es con fines de ejemplificación, puesto que podría utilizarse otro texto de cualquier área de las matemáticas.

Figura 2 – Ejemplo de un texto matemático en el que se identifican los mecanismos de intersemiosis.

2.2 LÍMITE DE UNA FUNCIÓN

Luego de ver en la sección anterior cómo surgen los límites cuando desea hallar la tangente a una curva o la velocidad de un objeto, dirija su atención hacia los límites en general y los métodos numéricos y gráficos para calcularlos.

Investigue el comportamiento de la función f definida por $f(x) = x^2 - x + 2$ para valores cercanos a 2. En la tabla siguiente se dan los valores de $f(x)$ para valores de x cercanos a 2, pero no iguales a 2.

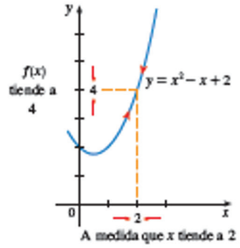


FIGURA 1

x	$f(x)$	x	$f(x)$
1.0	2.000000	3.0	8.000000
1.5	2.750000	2.5	5.750000
1.8	3.440000	2.2	4.640000
1.9	3.710000	2.1	4.310000
1.95	3.852500	2.05	4.152500
1.99	3.970100	2.01	4.030100
1.995	3.985025	2.005	4.015025
1.999	3.997001	2.001	4.003001

A partir de la tabla y de la gráfica de f (una parábola) que se ilustra en la figura 1, es claro cuando x está cercana a 2 (por cualquiera de los dos lados de 2), $f(x)$ lo está a 4. De hecho, parece posible acercar los valores de $f(x)$ a 4 tanto como desee si toma una x lo suficientemente cerca de 2. Expresa este hecho al decir: "el límite de la función $f(x) = x^2 - x + 2$, cuando x tiende a 2, es igual a 4". La notación para esta expresión es

$$\lim_{x \to 2} (x^2 - x + 2) = 4$$

En general, se usa la siguiente notación

1 DEFINICIÓN Escriba

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

que se expresa como: "el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a, es igual a L"

si podemos acercar arbitrariamente los valores de $f(x)$ a L (tanto como desee) escogiendo una x lo bastante cerca de a, pero no igual a a.

En términos generales, esto afirma que los valores de $f(x)$ se aproximan cada vez más al número L cuando x se acerca a a (desde cualquiera de los dos lados de a) pero $x \neq a$. (En la sección 2.4 se proporciona una definición más exacta.)

Una notación alternativa para

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

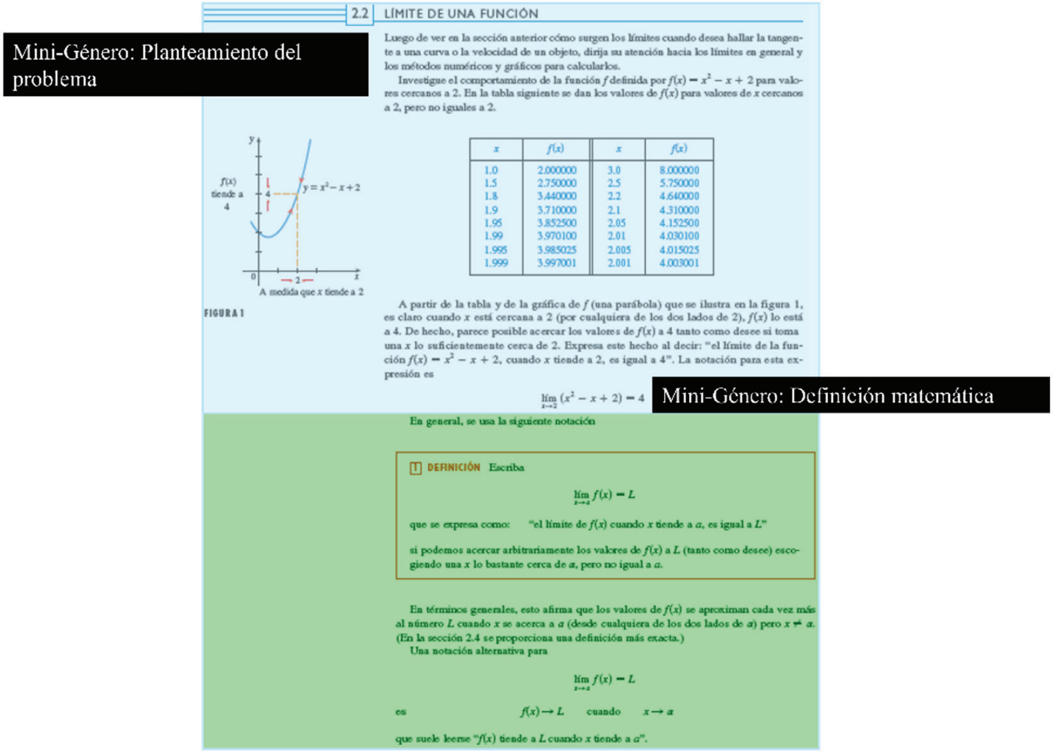
es $\qquad f(x) \to L \qquad$ cuando $\qquad x \to a$

que suele leerse "$f(x)$ tiende a L cuando x tiende a a".

Fuente: Steward (2008, p. 88).

Este texto se compone de dos Mini-Géneros (véase la Figura 3): el primero de estos presenta la estructura discursiva del planteamiento de un problema, mientras que el segundo presenta la estructura discursiva de una definición. Como Ítems se identifican el Problema, cuyos Componentes son: la contextualización del problema por medio del enunciado, la imagen de la Figura 1, la tabla, y el análisis de lo representado en la tabla y la figura. Respecto a la Definición del concepto matemático se identifican los Componentes: definición de la notación del concepto matemático y explicación del concepto matemático en términos de la nueva notación (como se muestra en la Figura 4).

Figura 3 – Ejemplo de la división del texto en dos mini-géneros.



2.2 LÍMITE DE UNA FUNCIÓN

Luego de ver en la sección anterior cómo surgen los límites cuando desea hallar la tangente a una curva o la velocidad de un objeto, dirija su atención hacia los límites en general y los métodos numéricos y gráficos para calcularlos.

Investigue el comportamiento de la función f definida por $f(x) = x^2 - x + 2$ para valores cercanos a 2. En la tabla siguiente se dan los valores de $f(x)$ para valores de x cercanos a 2, pero no iguales a 2.

x	$f(x)$	x	$f(x)$
1.0	2.000000	3.0	8.000000
1.5	2.750000	2.5	5.750000
1.8	3.440000	2.2	4.640000
1.9	3.710000	2.1	4.310000
1.95	3.852500	2.05	4.152500
1.99	3.970100	2.01	4.030100
1.995	3.985025	2.005	4.015025
1.999	3.997001	2.001	4.003001

A partir de la tabla y de la gráfica de f (una parábola) que se ilustra en la figura 1, es claro cuando x está cercana a 2 (por cualquiera de los dos lados de 2), $f(x)$ lo está a 4. De hecho, parece posible acercar los valores de $f(x)$ a 4 tanto como desee si toma una x lo suficientemente cerca de 2. Expresa este hecho al decir: "el límite de la función $f(x) = x^2 - x + 2$, cuando x tiende a 2, es igual a 4". La notación para esta expresión es

$$\lim_{x \to 2} (x^2 - x + 2) = 4$$

En general, se usa la siguiente notación

DEFINICIÓN Escriba

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

que se expresa como: "el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a, es igual a L"

si podemos acercar arbitrariamente los valores de $f(x)$ a L (tanto como desee) escogiendo una x lo bastante cerca de a, pero no igual a a.

En términos generales, esto afirma que los valores de $f(x)$ se aproximan cada vez más al número L cuando x se acerca a a (desde cualquiera de los dos lados de a) pero $x \neq a$. (En la sección 2.4 se proporciona una definición más exacta.)

Una notación alternativa para

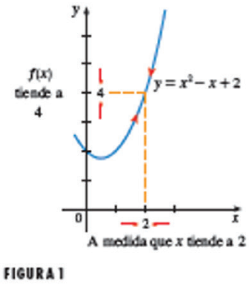
$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

es $\qquad f(x) \to L \quad \text{cuando} \quad x \to a$

que suele leerse "$f(x)$ tiende a L cuando x tiende a a".

Fuente: Modificada a partir de Steward (2008, p. 88).

Figura 4 – Ejemplo de los componentes del texto al interior del mini-género de planteamiento del problema.



2.2 LÍMITE DE UNA FUNCIÓN

Componente: Contextualización a partir del enunciado

Luego de ver en la sección anterior cómo surgen los límites cuando desea hallar la tangente a una curva o la velocidad de un objeto, dirija su atención hacia los límites en general y los métodos numéricos y gráficos para calcularlos.

Investigue el comportamiento de la función f definida por $f(x) = x^2 - x + 2$ para valores cercanos a 2. En la tabla siguiente se dan los valores de $f(x)$ para valores de x cercanos a 2, pero no iguales a 2.

Componente: Imagen

FIGURA 1

Componente: Tabla

x	$f(x)$	x	$f(x)$
1.0	2.000000	3.0	8.000000
1.5	2.750000	2.5	5.750000
1.8	3.440000	2.2	4.640000
1.9	3.710000	2.1	4.310000
1.95	3.852500	2.05	4.152500
1.99	3.970100	2.01	4.030100
1.995	3.985025	2.005	4.015025
1.999	3.997001	2.001	4.003001

Componente: Análisis y resolución

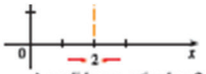
A partir de la tabla y de la gráfica de f (una parábola) que se ilustra en la figura 1, es claro cuando x está cercana a 2 (por cualquiera de los dos lados de 2), $f(x)$ lo está a 4. De hecho, parece posible acercar los valores de $f(x)$ a 4 tanto como desee si toma una x lo suficientemente cerca de 2. Expresa este hecho al decir: "el límite de la función $f(x) = x^2 - x + 2$, cuando x tiende a 2, es igual a 4". La notación para esta expresión es

$$\lim_{x \to 2} (x^2 - x + 2) = 4$$

Fuente: Modificada a partir de Steward (2008, p. 88).

Existe *cohesión semiótica* en el texto puesto que, a través de los componentes de cada Ítem, se emplea la referencia. Esto significa que se recurre a una repetición sistemática de los componentes. Por ejemplo, en el Componente de análisis del problema se hace referencia a la *figura 1* y *la tabla* para referenciar el comportamiento que se desea significar (véase Figura 5), en este caso es el del límite. También, se identifica al repetir en el segundo Ítem el Elemento de la *expresión simbólica* $\lim_{x \to a} f(x) = L$ en ambos Componentes de la *definición* y la *explicación*.

Figura 5 – Ejemplos de referenciación de los componentes para la cohesión semiótica.



A medida que x tiende a 2

FIGURA 1

1.995	3.985025	2.005	4.015025
1.999	3.997001	2.001	4.003001

Componente: Análisis y resolución

A partir de la tabla y de la gráfica de f (una parábola) que se ilustra en la figura 1, es claro cuando x está cercana a 2 (por cualquiera de los dos lados de 2), $f(x)$ lo está a 4. De hecho, parece posible acercar los valores de $f(x)$ a 4 tanto como desee si toma una x lo suficientemente cerca de 2. Expresa este hecho al decir: "el límite de la función $f(x) = x^2 - x + 2$, cuando x tiende a 2, es igual a 4". La notación para esta expresión es

$$\lim_{x \to 2} (x^2 - x + 2) = 4$$

En general, se usa la siguiente notación

Componente: Definición

1 DEFINICIÓN Escriba

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

que se expresa como: "el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a, es igual a L"

si podemos acercar arbitrariamente los valores de $f(x)$ a L (tanto como desee) escogiendo una x lo bastante cerca de a, pero no igual a a.

Componente: Explicación

En términos generales, esto afirma que los valores de $f(x)$ se aproximan cada vez más al número L cuando x se acerca a a (desde cualquiera de los dos lados de a) pero $x \neq a$. (En la sección 2.4 se proporciona una definición más exacta.)

Una notación alternativa para

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

es $\qquad f(x) \to L \quad$ cuando $\quad x \to a$

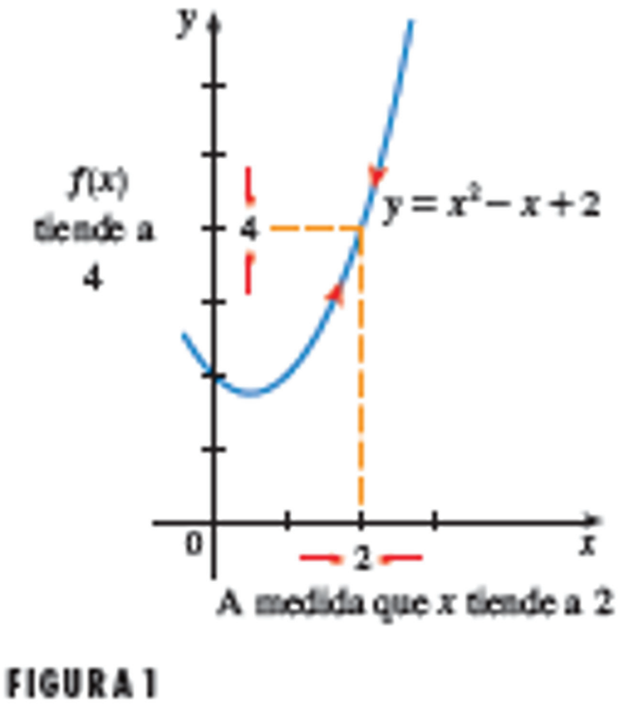
que suele leerse "$f(x)$ tiende a L cuando x tiende a a".

Fuente: Modificada a partir de Steward (2008, p. 88).

La *adopción semiótica* es más evidente en el texto puesto que se recurre a cláusulas que combinan sistemáticamente elementos del lenguaje natural y del simbolismo. Por ejemplo, las cláusulas: "Investigue el comportamiento de la función $\boldsymbol{f}$ definida por $\boldsymbol{f(x) = x^3 - x + 2}$ para valores cercanos a **2**"; "El límite de la función $\boldsymbol{f(x) = x^3 - x + 2}$, cuando $\boldsymbol{x}$ tiende a **2**, es igual a **4**". Cabe destacar que este mecanismo intersemiótico está presente en los textos algebraicos que incluso se catalogan desde el modelo de Nesselman (1842) como parte del álgebra simbólica, (veáse López-Acosta, 2023; López-Acosta y Rodríguez-Vergara, 2021). Es decir, el simbolismo matemático en los discursos matemáticos requiere de la adopción semiótica para poder contextualizar el significado de las expresiones.

La *mezcla semiótica* se caracteriza por incorporar elementos de los componentes del lenguaje natural y del simbolismo como elementos constituyentes de las imágenes. Por ejemplo, en la Figura 6 se identifica que en el componente de la *figura 1* se recurre al uso de elementos del lenguaje natural y simbolismo para proveer una descripción de lo que representa la imagen. "***f*** **(*x*)** tiende a **4**" y "a medida que tiende a **2**".

Figura 6– Ejemplo de mezcla semiótica.

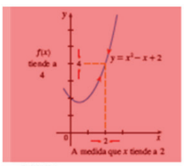


Fuente: Tomada de Steward (2008, p. 88).

El mecanismo de *yuxtaposición y espacialidad* puede identificarse por la forma en la que se estructura la composición total de todos los Componentes de cada Mini-género. Nótese que en la Figura 7, estratégicamente, la imagen de la gráfica de la función se encuentra aislada del cuerpo del texto. Esto produce que, en el espacio del texto, la imagen pueda visualizarse como un todo sin la distracción de otros elementos; dicho de otra forma, requiere de un proceso de abstracción que implica un análisis minucioso sin que otros elementos puedan perjudicar ese proceso. La imagen condensa el proceso de análisis que se pretende significar en el resto del texto; por lo tanto, es la contextualización del análisis que se hace en el texto.

También puede notarse la importancia que se le asigna a algunas expresiones simbólicas y a la tabla al centrarlas y presentarlas en líneas separadas del texto. Esto busca enfatizar a la persona lectora los aspectos que se consideran más relevantes por aprender.

Figura 7 – Ejemplos de los mecanismos de yuxtaposición y espacialidad en el texto.



2.2 LÍMITE DE UNA FUNCIÓN

Luego de ver en la sección anterior cómo surgen los límites cuando desea hallar la tangente a una curva o la velocidad de un objeto, dirija su atención hacia los límites en general y los métodos numéricos y gráficos para calcularlos.

Investigue el comportamiento de la función f definida por $f(x) = x^2 - x + 2$ para valores cercanos a 2. En la tabla siguiente se dan los valores de $f(x)$ para valores de x cercanos a 2, pero no iguales a 2.

FIGURA 1

x	$f(x)$	x	$f(x)$
1.0	2.000000	3.0	8.000000
1.5	2.750000	2.5	5.750000
1.8	3.440000	2.2	4.640000
1.9	3.710000	2.1	4.310000
1.95	3.852500	2.05	4.152500
1.99	3.970100	2.01	4.030100
1.995	3.985025	2.005	4.015025
1.999	3.997001	2.001	4.003001

A partir de la tabla y de la gráfica de f (una parábola) que se ilustra en la figura 1, es claro cuando x está cercana a 2 (por cualquiera de los dos lados de 2), $f(x)$ lo está a 4. De hecho, parece posible acercar los valores de $f(x)$ a 4 tanto como desee si toma una x lo suficientemente cerca de 2. Expresa este hecho al decir: "el límite de la función $f(x) = x^2 - x + 2$, cuando x tiende a 2, es igual a 4". La notación para esta expresión es

$$\lim_{x \to 2} (x^2 - x + 2) = 4$$

En general, se usa la siguiente notación

1 DEFINICIÓN Escriba

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

que se expresa como: "el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a, es igual a L"

si podemos acercar arbitrariamente los valores de $f(x)$ a L (tanto como desee) escogiendo una x lo bastante cerca de a, pero no igual a a.

En términos generales, esto afirma que los valores de $f(x)$ se aproximan cada vez más al número L cuando x se acerca a a (desde cualquiera de los dos lados de a) pero $x \neq a$. (En la sección 2.4 se proporciona una definición más exacta.)

Una notación alternativa para

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

es

$$f(x) \to L \quad \text{cuando} \quad x \to a$$

que suele leerse "$f(x)$ tiende a L cuando x tiende a a".

Fuente: Modificada a partir de Steward (2008, p. 88).

Cuando los sistemas de opción implican movimientos discursivos que cambian el discurso de un Mini-Género, Ítem, y Componente hacia otro se llevan a cabo las *transiciones semióticas*. En el caso de este texto, se identifica cómo del componente de la contextualización del problema con base en la explicación detallada se induce a transitar hacia la tabla. La descripción previa a la tabla se simplifica en esta última. Posteriormente, la tabla tiene como objetivo explicar numéricamente lo que se representa en la figura 1; por consiguiente, se induce otra transición entre la tabla y la imagen para articular lo que sucede a nivel numérico y visual. En términos sintéticos se produce la siguiente transición entre los recursos semióticos:

Enunciado del problema en lenguaje natural → Tabla → Gráfica → Expresión algebraica

En cuanto a las *metáforas semióticas*, estas se refieren a incongruencias en las funciones de los elementos a nivel semántico y gramatical. En la Tabla 5 se muestra la escala de rango de las funciones de los elementos gramaticales entre el recurso semiótico del lenguaje natural y el recurso semiótico del simbolismo matemático. Una relación congruente en la gramática significa que se respeta el mismo rango de la función entre un recurso semiótico y otro al ser empleado uno al interior del otro. Por ejemplo, una relación congruente en una cláusula en el lenguaje natural en la que se adopta el simbolismo sería "la solución $\boldsymbol{x}$ de la ecuación es **5**". En esta construcción, la función de los elementos simbólicos coincide con el rango funcional esperado; en otras palabras, en el grupo nominal "la solución $\boldsymbol{x}$ de la ecuación", el elemento "$\boldsymbol{x}$" del simbolismo funciona de manera congruente con una palabra en el lenguaje natural. Por el contrario, la siguiente cláusula implica una incongruencia: "La solución del problema es $\boldsymbol{x = 5}$". En este caso, la expresión "$\boldsymbol{x = 5}$", que en el simbolismo funciona como una cláusula, se emplea como una palabra al adoptarse en el lenguaje natural. Este tipo de construcciones en el lenguaje son las que dan muestra de un pensamiento que cambia la perspectiva de una ecuación como proceso a una ecuación como objeto. Es decir, puede dar muestra del cambio de un pensamiento operacional a uno estructural (Sfard, 1995).

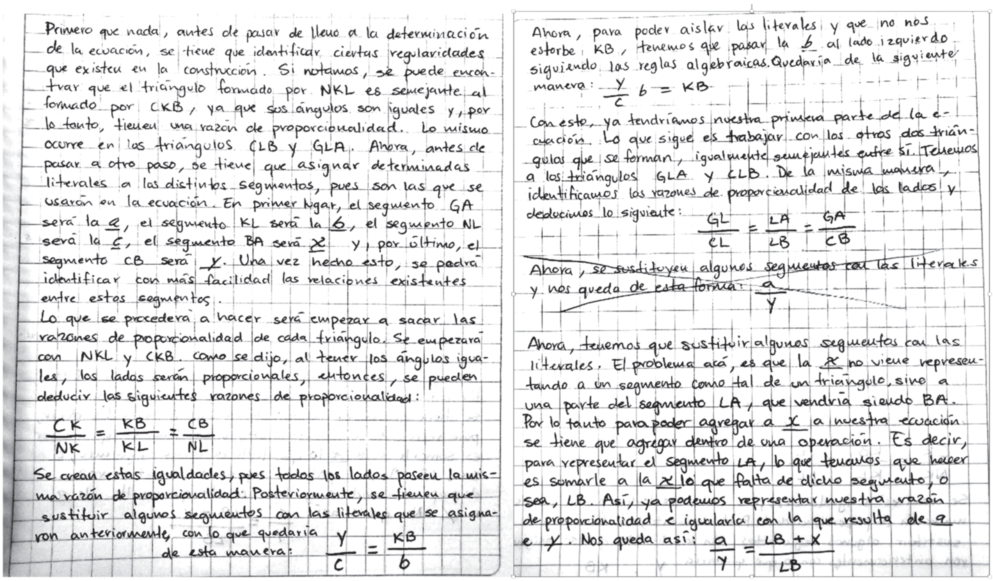
Tabla 5 – Escala de rango entre los elementos gramaticales del lenguaje natural y simbolismo.

Lenguaje Natural	Simbolismo Matemático
Complejos clausulares	Enunciados
Cláusulas	Cláusulas
Grupos	Expresiones
Palabras	Elemento

En el caso de la Figura 4 pueden identificarse las siguientes construcciones metafóricas entre los recursos semióticos. Por ejemplo: el grupo nominal "los valores de *f(x)* para valores de *x* cercanos a 2, pero no iguales a 2" se transforma en enunciaciones simbólicas del tipo $x \leftrightarrow f(x)$, 1.0 ↔ 2.000000, 1.5 ↔ 2.750000, etc. En este sentido hay un cambio en el estatus funcional, dado que, en la escala de rango, en el lenguaje natural se pasa de un Grupo hacia una Cláusula simbólica.

Este tipo de comprensión respecto a las características semióticas de los textos matemáticos permiten conocer el grado de conciencia y de solidez que una persona estudiante posee al momento de escribir textos matemáticos. Recientemente, en el trabajo de López-Acosta (2023) se solicitó a estudiantes que redactaran textos matemáticos en los que explicaran sus procesos de resolución de problemas. Entre las respuestas un estudiante escribió el texto que se muestra en la Figura 8. Nótese cómo el texto carece de algunos de estos mecanismos de intersemiosis que son clave actualmente para la comprensión de los textos matemáticos. Por ejemplo, puede notarse que no se recurre a la *mezcla semiótica*, puesto que no se incluyen imágenes en el texto. Este hecho dificulta la *transición semiótica* al no tener otros elementos que permitan una lectura más integral sobre los procesos matemáticos subyacentes.

Figura 8– Ejemplos de los mecanismos de yuxtaposición y espacialidad en el texto.



Primero que nada, antes de pasar de lleno a la determinación de la ecuación, se tiene que identificar ciertas regularidades que existen en la construcción. Si notamos, se puede encontrar que el triángulo formado por NKL es semejante al formado por CKB, ya que sus ángulos son iguales y, por lo tanto, tienen una razón de proporcionalidad. Lo mismo ocurre en los triángulos CLB y GLA. Ahora, antes de pasar a otro paso, se tiene que asignar determinadas literales a los distintos segmentos, pues son las que se usarán en la ecuación. En primer lugar, el segmento GA será la a, el segmento KL será la b, el segmento NL será la c, el segmento BA será x y, por último, el segmento CB será y. Una vez hecho esto, se podrá identificar con más facilidad las relaciones existentes entre estos segmentos.

Lo que se procederá a hacer será empezar a sacar las razones de proporcionalidad de cada triángulo. Se empezará con NKL y CKB. Como se dijo, al tener los ángulos iguales, los lados serán proporcionales, entonces, se pueden deducir las siguientes razones de proporcionalidad:

$$\frac{CK}{NK} = \frac{KB}{KL} = \frac{CB}{NL}$$

Se crean estas igualdades, pues todos los lados poseen la misma razón de proporcionalidad. Posteriormente, se tienen que sustituir algunos segmentos con las literales que se asignaron anteriormente, con lo que quedaría de esta manera: $\frac{y}{c} = \frac{KB}{b}$

Ahora, para poder aislar las literales y que no nos estorbe KB, tenemos que pasar la b al lado izquierdo siguiendo las reglas algebraicas. Quedaría de la siguiente manera: $\frac{y}{c} b = KB$

Con esto, ya tendríamos nuestra primera parte de la ecuación. Lo que sigue es trabajar con los otros dos triángulos que se forman, igualmente semejantes entre sí. Tenemos a los triángulos GLA y CLB. De la misma manera, identificamos las razones de proporcionalidad de los lados y deducimos lo siguiente:

$$\frac{GL}{CL} = \frac{LA}{LB} = \frac{GA}{CB}$$

~~Ahora, se sustituyen algunos segmentos con las literales y nos queda de esta forma:~~ $\cancel{\frac{a}{y}}$

Ahora, tenemos que sustituir algunos segmentos con las literales. El problema acá, es que la x no viene representando a un segmento como tal de un triángulo, sino a una parte del segmento LA, que vendría siendo BA. Por lo tanto para poder agregar a x a nuestra ecuación se tiene que agregar dentro de una operación. Es decir, para representar el segmento LA, lo que tenemos que hacer es sumarle a la x lo que falta de dicho segmento, o sea, LB. Así, ya podemos representar nuestra razón de proporcionalidad e igualarla con la que resulta de a e y. Nos queda así: $\frac{a}{y} = \frac{LB + x}{LB}$

Fuente: López-Acosta (2023).

4. CONCLUSIONES/ REFLEXIONES / CONSIDERACIONES FINALES

El cúmulo de las investigaciones sobre el lenguaje matemático en la disciplina han aportado elementos significativos para entender algunos de sus aspectos constitutivos y su relación con el aprendizaje de las matemáticas. Como se argumentó en la introducción, muchas de estas aproximaciones han centrado, inherentemente, la mirada en explicar cómo los procesos de pensamiento se ven mejorados o influenciados por el uso del lenguaje, las dificultades relativas al uso del lenguaje matemático, o bien las características del simbolismo matemático y del registro matemático de manera separada. Además, el uso de los métodos de la LSF ha sido limitado en las investigaciones, lo cual ha dificultado la posibilidad de otras indagaciones sobre las estructuras gramaticales y multimodales del lenguaje matemático desde esta perspectiva.

En este sentido, se considera que aún hay muchos elementos que la LSF puede aportar para robustecer nuestra comprensión en el campo respecto al lenguaje matemático y los diversos discursos que se desprenden de este. Como se menciona en distintos estudios, la única manera de promover una enseñanza y un aprendizaje efectivos del lenguaje requiere una comprensión profunda sobre las características del lenguaje (Camps et al., 2007; Fontich, 2010; Pascual, 2013); es decir, sobre la gramática, sintaxis, semántica y pragmática del lenguaje.

En López-Acosta y Rodríguez-Vergara (2021), por ejemplo, se argumenta una mirada desde la LSF en la que el lenguaje matemático puede entenderse como un macrolenguaje integrado por diversos sublenguajes vinculados a sus distintas áreas como la geometría, algebra y trigonometría, entre otras. Esto bajo la consideración de que, desde este enfoque teórico, una de las funciones del lenguaje es codificar la experiencia al interior de un contexto de situación. Por lo tanto, bajo esta premisa, los distintos sublenguajes de las matemáticas deben mostrar diferencias sustanciales en sus funciones (experienciales, lógicas, interpersonales, textuales), puesto que cada área contempla situaciones, problemas, razonamientos y objetos matemáticos muy diversos. Por esta razón es importante continuar con las exploraciones en cada uno de estos contextos, dado que, como se argumentó al inicio, una didáctica de las matemáticas que contemple la complejidad que caracteriza al lenguaje matemático tiene que sustentarse en un dominio robusto sobre la estructura gramatical y multimodal sobre este. Resultaría complejo proponer formas de acercamiento al desarrollo de las habilidades lingüísticas y metalingüísticas en estudiantes si de entrada no se posee una didáctica que contemple estos elementos. La postura que se mantiene en este trabajo es que aún hace falta indagar en estos elementos del lenguaje matemático y, también, en cómo establecer puentes didácticos que permitan usar estos entendimientos para beneficiar el aprendizaje y el desarrollo de estas habilidades.

Asimismo, con base en las herramientas de análisis que aquí presentamos sobre los mecanismos de intersemiosis, en la investigación de López-Acosta (2023) se encontró que las características gramaticales de los textos de Viète, Descartes y de estudiantes son diferentes a la mayoría de los textos algebraicos originales de paradigmas históricos previos al analítico algebraico. Por ejemplo, en contraposición con las caracterizaciones típicamente escolares sobre el lenguaje matemático con relación a su carácter de discurso primordialmente simbólico, se identificó que textos como los de Viète y Descartes, delimitados en la etapa del álgebra simbólica, no emplearon el simbolismo como un recurso semiótico autónomo (López-Acosta y Rodríguez-Vergara, 2021; López-Acosta y Montiel, 2021). Esta afirmación concuerda con estudios en los que se establece que no es necesario el simbolismo para dar muestra de pensamiento algebraico (Rojano, 1996; Radford, 2001). No obstante, es importante destacar que el tipo de estudios previos sobre el estudio del desarrollo del álgebra en nuestra disciplina tenían como principal objetivo una comprensión sobre la relación entre el uso del simbolismo y su influencia en el desarrollo de ideas, nociones y métodos algebraicos de resolución de problemas.

Por otra parte, los resultados con base en la LSF abordan la semiótica de los textos matemáticos, es decir, una *instancia del lenguaje* (Halliday y Mathiessen, 2014), puesto que se profundiza en las características del texto y no en un intercambio comunicativo, como sucede en muchos otros estudios. De esta manera, se ha demostrado que la autonomía del discurso matemático respecto al simbolismo no solo se identifica a nivel conceptual, sino también a nivel del texto; incluso, como se ha mencionado, en textos considerados típicamente como parte de la fase simbólica del desarrollo del álgebra.

De este modo, estos estudios han reafirmado la importancia de considerar que el simbolismo no es por sí mismo el lenguaje de las matemáticas, sino un recurso semiótico al que este lenguaje le ha designado funciones específicas para contribuir a la intersemiosis. O'Halloran (2005), por ejemplo, señala las siguientes funciones para cada recurso semiótico:

> El *lenguaje* [natural] es típicamente usado para contextualizar el problema matemático; *las imágenes visuales* muestran las relaciones y proveen medios para el razonamiento visual espacio temporal; y el *simbolismo* es usado para resolver el problema. Los usos integrados de estos tres recursos semióticos expanden el poder semántico de las matemáticas en donde el todo es mayor que la suma de sus partes (p. 84, énfasis propio).

Con base en toda esta argumentación, este trabajo considera que el uso de la LSF puede producir aportaciones significativas para el análisis de las competencias lingüísticas que son requeridas para construir e interpretar textos matemáticos; aspecto que no se aborda explícitamente en el aula de la clase de matemáticas. Es decir, la escuela no suele abordar de manera concreta formas para comprender las estructuras de los textos y las variaciones en género que estos pueden presentar. Incluso, más allá de los aspectos de género de los textos matemáticos, se considera también que dentro de las competencias lingüísticas señaladas en algunos trabajos (veáse Morgan, et. al. 2005; Morgan, et al., 2014) deben tomarse en cuenta el uso y el desarrollo de los sistemas y mecanismos de intersemiosis. Esto es, la habilidad de construir textos matemáticos que muestren un uso eficaz y sistemático de los recursos semióticos para robustecer la producción de significados y la cohesión de los textos matemáticos.

En Alfaro y Joutsenlahti (2020), por ejemplo, se muestra cómo el uso de los distintos modos en el lenguaje (pictóricos, lingüísticos y simbólicos) apoyan esta construcción de significados y la comprensión matemática de los estudiantes. En complemento de este tipo de estudios, es necesario abordar a nivel de la construcción e interpretación de los textos estudiantiles cómo se manifiesta la intersemiosis entre los distintos modos y recursos semióticos, ya que estos aspectos aún no han sido abordados en nuestro campo. Si bien Duval (1999) tiempo atrás hizo explícita la importancia que tienen los distintos registros de representación[3] para el aprendizaje matemático, no se establece qué aspectos son los que se transforman o convierten entre un registro y otro. En otras palabras, se atribuye que el aprendizaje matemático se da en la medida en que se coordinen más de un registro semiótico, y esto sucede cuando se establece una congruencia semántica entre ambos registros; sin embargo, no se presentan herramientas teóricas para hacer este rastreo intersemiótico. Se considera que esta congruencia semántica puede ser analizada a partir de las categorías gramaticales descritas por la LSF, lo

3 La noción de *registro de representación* de Duval y la de *recursos semióticos* de O'Halloran pudieran considerarse como análogas, sin embargo, es necesario una reflexión teórica más profunda sobre esta relación que se escapa de los objetivos de este trabajo.

que quiere decir, el estudio de cómo los Participantes, Procesos y Circunstancias cambian de un recurso semiótico a otro vía la intersemiosis y sus mecanismos.

En este sentido, se considera que el estudio de la intersemiosis es de vital importancia para comprender con mayor claridad cómo es que las personas estudiantes pueden transitar entre los distintos registros de representación. En términos de la teoría de Duval, esto permitiría orientar la didáctica hacia el desarrollo de estas habilidades multimodales y multisemióticas en las personas estudiantes. Es justamente esta dirección en la que actualmente se está profundizando.

DECLARACIÓN DE DISPONIBILIDAD DE DATOS

Los datos que respaldan los resultados de este estudio estarán disponibles por la persona autora correspondiente, LALA previa solicitud razonable.

5. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alfaro Viquez, H., & Joutsenlahti, J. (2020). Promoting learning with understanding: Introducing languaging exercises in calculus course for engineering students at the university level. *LUMAT: International Journal on Math, Science and Technology Education, 8*(1), 229–251. https://doi.org/10.31129/LUMAT.8.1.1412

Arzarello, F. (2006). Semiosis as a multimodal process. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, (número especial), 267-299.

Austin, J., & Howson, A. (1979). Language and mathematics education. *Educational Studies in Mathematics, 10*, 161–197. https://doi.org/10.1007/BF00230986

Bednarz, N., Kieran, C., & Lee, L. (1996). *Approaches to Algebra: Perspectives for Research*. Kluwer.

Butt, D., Fahey, R., Feez, S., & Spinks, S. (2012). *Using functional grammar: An explorer's guide* (3rd ed.). Palgrave Macmillan.

Camps, A., Guasch, O., Milian, M., & Ribas, T. (2007). El escrito en la oralidad: el texto intentado. *Archivos De Ciencias De La Educación*, *1*(1), 1-19.

Chico, J. (2018). Impacto de la interacción en grupo en la producción de la lengua del álgebra en clase de matemáticas. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 14*, 31-47. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i14.243

Crawford, C., & Fortanet-Gómez, I. (2015). *Multimodal Analysis in Academic Settings*. Routledge.

Doran, Y. (2018). *The Discourse of Physics: Building Knowledge through Language, Mathematics and Image*. Routledge.

Drouhard, J.-P. (1992). *Les Écritures Symboliques de l'Algèbre Élémentaire*. París: Universite Denis Diderot Paris 7.

Drouhard, J.-P., & Teppo, A. (2004). Symbols and Language. En K. Stacey, H. Chick, & M. Kendal, *The future of the teaching and learning of Algebra* (págs. 227-264). Kluwer Academic Publishers.

Duval (1999). *Semiosis y Pensamiento Humano*. *Registros Semióticos y Aprendizajes Intelectuales*. Artes Gráficas Univalle.

Fontich, X. (2010). *La construcción del saber metalingüístic*. *Estudi sobre l'aprenentatge de la gramática d'escolars de secundària en el marc d'una seqüència didáctica*. [Tesis de doctorado]. Universitat Autònoma de Barcelona, Departament de Didàctica.

Halliday, M. (1998). Language and knowledge: the unpacking of text. En J. Webster (Ed.), *The Collected Works of M. A. K. Halliday* (págs. 24-48). Continuum.

Halliday, M. A. (1982). *El Lenguaje como semiotica social: La interpretación social del lenguaje y el significado*. Fondo de Cultura Económica.

Halliday, M. A. (1993a). On the language of physical science. En M. Halliday, & J. Martin, *Writing Science: Literacy And Discursive Power* (págs. 59-75). Routledge.

Halliday, M. A. (1993b). Some Grammatical Problems in Scientific English. In M. A. Halliday, & J. R. Martin, *Writing Science: Literacy and Discursive Power* (pp. 69-85). Routledge.

Halliday, M. A., & Matthiessen, C. (2014). *An Introduction to Functional Grammar* (4th ed.). Routledge.

Harel, G. (2007). The DNR System as a Conceptual Framework for Curriculum Development and Instruction. In R. Lesh, J. Kaput, & E. Hamilton, *Foundations for the Future in Mathematics Education* (pp. 263-280). Lawrence Elbaum Associates.

Harel, G., Fuller, E., & Rabin, J. M. (2008). Attention to meaning by algebra teachers. *The Journal of Mathematical Behavior*, *27*(2), 116-127. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2008.08.002

Kieran, C., Forman, E. y Sfard, A. (2003). *Learning discourse: Discursive approaches to research in mathematics education*. Kluwer Academic Press. https://doi.org/10.1007/0-306-48085-9

Kirshner, D. (1987). *The Grammar of Symbolic Algebra*. The University of British Columbia.

Kirshner, D. (2001). The structural algebra option revisited. En R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell, & R. Lins (Eds.), *Perspectives on school algebra* (pp. 83–98). Kluwer Academic Publishers. https://doi.org/10.1007/0-306-47223-6_5

López-Acosta, L. A. (2023). *Análisis algebraico de Viète y Descartes: la ecuación paramétrica y la algebrización de la geometría. Un acercamiento epistemológico y lingüístico-multisemiótico* [Tesis doctoral, Centro de investigación y de estudios avanzados del IPN]. Repositorio Cinvestav. https://repositorio.cinvestav.mx/handle/cinvestav/4291

López-Acosta, L. A., & Montiel Espinosa, G. (2021). Lenguaje algebraico y multisemiosis. Hacia una reflexión más allá del simbolismo. En L. A. Hernández Rebollar, E. Juárez Ruiz y H. Ruíz Estrada (Eds.), *Tendencias en la educación matemática 2021* (pp. 79-99). Comunicación Científica. http://doi.org/10.52501/cc.019

López-Acosta, L. A., & Rodríguez-Vergara, D. (2021). Análisis sistémico-funcional de textos algebraicos: hacia un entendimiento de su naturaleza discursiva en la historia y algunas implicaciones en su enseñanza. *IE Revista de Investigación Educativa de la REDIECH, 12*, 1-23.

Mason, J. (1996). Expressing generalityand roots of algebra. En N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee, *Approaches to Algebra* (págs. 65-86). Kluwer.

McGregor, M., & Price, E. (1999). An Exploration of Aspects of Language Proficiency and Algebra Learning. *Journal for Research in Mathematics Education, 30*(4), 449-467.

Morgan, C. (1996)."The Language of Mathematics": Towards a Critical Analysis of Mathematics Texts. *For the Learning of Mathematics, 16*(3), p. 2-10

Morgan, C. (2006). What does social semiotics have to offer mathematics education research? *Educational Studies in Mathematics, 61*(1/2), 219–245.

Morgan, C., Ferrari, P. L., Duval, R., & Hoines, M. J. (2005). Language and mathematics, CERME 4 (Vol. Working Group 8, pp. 789-798). Sant Feliu de Guixols, Spain

Morgan, C., Craig, T., Schuette, M., & Wagner, D. (2014). Language and communication in mathematics education: an overview of research in the field. *ZDM Mathematics Education, 46*, 843-853.

Moschkovich, J. (2018). Recommendations for Research on Languaje and Learning Mathematics. In J. W. Moschkovich, *Language and Comunication in Mathematics Eduaction* (pp. 37-47). Springer.

Moschkovich, J., Wagner, D., Bose, A., Rodrigues Mendes, J., & Schütte, M. (2018). *Language and Communication in Mathematics Education: International Perspectives*. Springer.

Nesselman, G. (1842). *Die Algebra der Griechen nach den Quellen bearbeitet*. G. Reimer.

O'Halloran, K. (2007b). Systemic Functional Multimodal Discourse Analysis (SF-MDA) Approach to Mathematics, Grammar and Literacy. En A. McCabe, M. O'Donnell, & R. Whittaker, *Advances in Language and Education* (págs. 75-100). Continuum.

O'Halloran, K. (2012). Análisis del discurso multimodal. *ALED, 12*(1), 75-97.

O'Halloran, K. (2014). Systemic functional multimodal discourse analysis. En S. Norris, & C. Maier (Edits.), *Interactions, Images and Text: A Reader in Multimodality* (págs. 137-154). De Gruyter Mouton.

O'Halloran, K. L. (2005). *Mathematical discourse: Language, symbolism and visual images*. Continuum.

O'Halloran, K. L. (2015). The language of learning mathematics: A multimodal perspective. *The Journal of Mathematical Behaviour, 40*, 63–74.

O'Halloran, K., & Smith, B. (2011). *Multimodal Studies: Exploring Issues and Domains*. Routledge.

Pimm, D. (1987). *Speaking mathematically: Communication in mathematics classrooms*. Routledge & Kegan Paul.

Pimm, D. (2018). Sixty Years (or so) of Language Data in Mathematics Education. En J.N. Moschkovich, D. Wagner, A. Bose, J. Rodrigues Mendes, M. Schütte (Eds.) *Language and Communication in Mathematics Education: International Perspectives* (pp. 11-24). Springer

Planas, N. (2018). Language as resource: a key notion for understanding the complexity of mathematics learning. *Educational Studies in Mathematics, 98*, 215- 229.

Radford, L. (2002). The historical origins of algebraic thinking. En R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell, & R. Lins, *Perspectives on School Algebra* (págs. 13-63). Kluwer.

Radford, L., Bardini, C., & Sabena, C. (2007). Perceiving the General. The Multi-Semiotic Dimension of Students' Algebraic Activity. *Journal for Research in Mathematics Education, 28*(5), 507-530

Rojano, T. (1994). La matemática escolar como lenguaje. Nuevas perspectivas de investigación y enseñanza. Enseñanza de las Ciencias, 12(1), 45-56

Rojano, T. (1996). Developing algebraic aspects of problem solving within a spreadsheet environment. En N. Bednardz, C. Kieran, & L. Lee, *Approaches to Algebra* (págs. 137-146). Kluwer.

Schleppegrell, M. (2007). The linguistic challenges of mathematics teaching and learning: A research review. *Reading and Writting Quarterly, 23*, 139-159.

Sfard, A. (1995). The development of algebra Confronting historical and psychological perspectives. *Journal of Mathematical Behavior, 14*, 15-39.

Sfard, A. (2003). There is more to discourse than meets the ears: Looking at thinking as communicating to learn more about mathematical learning. En C. Kieran, E. Forman y A. Sfard (eds.), *Learning discourse: Discursive approaches to research in mathematics education* (pp. 13-57). Kluwer Academic Press

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourse, and mathematizing*. Cambridge University Press.

Smit, J., Bakker, A., van Eerde, D. & Kuijpers, M. (2016) . Using genre pedagogy to promote student proficiency in the language required for interpreting line graphs. *Math Ed Res J* **28**, 457–478. https://doi.org/10.1007/s13394-016-0174-2

Stedall, J. (2007). Symbolism, combinations, and visual imagery in the mathematics of Thomas Harriot. *Historia Mathematica, 34*, 380-401.

Steward, J. (2008). *Cálculo de una variable: Trascendentes tempranas*. México: Cengage Learning.

Thompson, P. (2017). Foreword. En S. Steward (Ed.), *And the rest is just algebra* (págs. v-vi). Kluwer.

Trinick, T., Meaney, T. & Fairhall, U. (2014). Teachers learning the registers of mathematics and mathematics education in another language: an exploratory study. *ZDM Mathematics Education 46*, 953–965. https://doi.org/10.1007/s11858-014-0618-7