Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática

e-ISSN en línea: 2215-5627
Impresa: ISSN 1659-2573
Vol: 17 · N°. 2 · 2024
151-171
Recibido: 03/05/2025
Aprobado: 10/06/2024

Artículos de investigación

ENFOQUES VARIACIONALES EN LA INVESTIGACIÓN SOBRE CÁLCULO: UNA REVISIÓN NARRATIVA

VARIATIONAL APPROACHES ON CALCULUS RESEARCH: A NARRATIVE REVIEW

Selvin Nodier Galo Alvarenga[1]
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-3290-0743

Diana del Carmen Torres-Corrales[2]
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0057-5336

Gisela Montiel-Espinosa[3]
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-1670-9172

RESUMEN

Inicialmente la investigación sobre Cálculo se abordó desde una perspectiva cognitiva, como en la mayoría de las áreas en Educación Matemática. Con el avance de las investigaciones se conformaron diferentes aproximaciones, algunas desde marcos generales en Educación Matemática y otras se centraron en ideas variacionales o dinámicas que son propias del Cálculo. Presentamos un revisión de tipo narrativa sobre la evolución de dos enfoques variacionales en la investigación en las matemáticas del cambio y la variación, el marco del razonamiento covariacional y la línea del Pensamiento y Lenguaje Variacional. Como resultado de esta revisión describimos los diferentes momentos por los que atravesaron cada uno de estos a lo largo de su evolución hasta su momento de consolidación. Concluimos con los aspectos más relevantes en los que se centraron las investigaciones bajo estos enfoques, el momento actual en el que se encuentran sus desarrollos y ligeramente algunas áreas de oportunidad para la investigación en el futuro.

Palabras clave: Cálculo, Enfoques variacionales, Razonamiento covariacional, Pensamiento y Lenguaje Variacional.

1 Departamento de Matemática Educativa, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, Ciudad de México, México, C. P. 07360. Correo electrónico: selvin.galo@cinvestav.mx

2 Departamento de Matemáticas, Instituto Tecnológico de Sonora, Ciudad Obregón, Sonora, México, C. P. 85130. Correo electrónico: diana.torres@itson.edu.mx

3 Departamento de Matemática Educativa, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, Ciudad de México, México, C. P. 07360. Correo electrónico: gmontiele@cinvestav.mx

ABSTRACT

Initially, research on Calculus was carried out from a cognitive perspective, like in most areas of Mathematics Education. With the progress of research, different approaches were formed, some from general frameworks in Mathematics Education and others focused on variational or dynamic ideas that typical of Calculus. We present a narrative review of the evolution of two variational approaches in research in the mathematics of change and variation, the Covariational Reasoning Framework and the line of Variational Thinking and Language. As a result of this review, we describe different stages that each of these approaches went through throughout their evolution until their moment of consolidation. We conclude with the most relevant aspects on which the research under these approach focused, the current moment in which their developments are found and briefly some areas of opportunity for research in the future.

Keywords: **C**alculus, Variational approaches, Covariational reasoning, Variational Thinking and Language.

1. INTRODUCCIÓN

La literatura reporta amplitud de investigaciones sobre Cálculo o Análisis Elemental, dan cuenta de ello las diferentes revisiones llevadas a cabo (véanse los trabajos de Bressoud et al., 2016; Larsen et al., 2017; Rasmussen et al., 2014; Robert y Speer, 2001; P. W. Thompson y Harel, 2021).

Dos de estas revisiones son estudios ICMI, el primero es *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level* en donde encontramos el capítulo "Research on the teaching and learning of Calculus/Elementary Analysis". En su estudio, Robert y Speer (2001) agruparon las investigaciones sobre Cálculo en dos tradiciones: una orientada por la teoría y otra orientada por la práctica. Respecto de la segunda las autoras describen algunas investigaciones llevadas a cabo en Estados Unidos que fueron motivadas por la reforma del Cálculo. En cuanto a la primera, organizan los trabajos en tres dimensiones. En la dimensión epistemológica destacan los trabajos centrados en obstáculos y los que incluyen análisis históricos como los llevados a cabo bajo la perspectiva Socioepistemológica. En la dimensión cognitiva resaltan los trabajos que involucran las nociones de imagen del concepto y definición del concepto y los llevados a cabo bajo perspectivas como la teoría APOE o los registros de representación. En cuanto a la dimensión didáctica, destacan los trabajos que incluyen ingeniería didáctica. Otra de las categorías incluye el papel de la tecnología basada en computadoras.

El otro, más reciente, es el ICME-13 Topical Survey *Teaching and learning of Calculus*, en donde Bressoud et al. (2016) reseñan los principales marcos teóricos empleados. Incluyen los que asumen una perspectiva cognitiva (que coinciden con los descritos por Robert y Speer (2001)), tal es el caso del marco del *Concept Image* y *Concept Definition*, la teoría de Registros de representación semiótica, teoría APOE o los tres mundos de las matemáticas. También, los que se desarrollan desde una perspectiva sociocultural, como la Teoría de Situaciones Didácticas, la Teoría Antropológica de lo Didáctico o el Marco Comognitivo. Además, describen la evolución de las principales tendencias de investigación sobre los conceptos de límite, derivada e integral. Adicionalmente, analizan el currículum de cálculo a través de materiales y textos en diferentes regiones: Francia, Alemania, Estados Unidos, Uruguay, Singapur, Corea del Sur, Hong Kong; dedican un apartado para la investigación con profesores y las prácticas en el aula y proporcionan una descripción sobre las herramientas actuales para el diseño de tareas, el uso de tecnología como medio de visualización y un breve resumen del progreso de la investigación.

De igual manera, en la *ZDM Mathematics Education* encontramos dos números especiales sobre Cálculo que se introducen con o incluyen un artículo de revisión. En el primero de estos números, “The teaching and learning of Calculus”, se introduce con el artículo de Rasmussen et al. (2014) en donde identifican cuatro tendencias en la investigación sobre cálculo: la primera sobre conceptos erróneos, una segunda sobre los procesos de aprendizaje de conceptos particulares, una tercera sobre estudios en el aula y, una última sobre el conocimiento, creencias y prácticas de los docentes. Recientemente, en el número “Calculus in high school and college around the world” también se introduce con un artículo de revisión, en el que P. W. Thompson y Harel (2021) ofrecen un análisis de cómo las dificultades de los estudiantes se originan en los significados matemáticos y las formas de pensar (sobre la variable, la función y la tasa de cambio) que los estudiantes desarrollan en la escuela primaria y secundaria. A su vez, resaltan la naturaleza de la experiencia de los estudiantes de “cálculo” y la relación de estas matemáticas con las formas en que se desarrollan las ideas fundamentales a lo largo de una trayectoria escolar. A manera de cierre, esbozan las preguntas que emergen para futuras investigaciones.

Otras dos trabajos en los cuales se da un espacio para revisar la investigación didáctica relativa al Cálculo es el capítulo “Understanding the concepts of calculus: frameworks and roadmaps emerging from educational research” que aparece en el *Compendium for research in Mathematics Education* del NCTM a cargo de Larsen et al. (2017) –que, por cuestiones de acceso no incluimos acá– y la entrada “Calculus teaching and learning” de la *Encyclopedia of Mathematics Education*, en la que Kidron (2020) agrupa la investigación en enseñanza y aprendizaje del Cálculo en: la investigación inicial centrada en dificultades cognitivas, el rol de la tecnología, el rol de las perspectivas históricas y otros enfoques, el rol del profesor, la transición entre la educación secundaria y la terciaria, y finalmente, las nuevas direcciones de investigación.

Estas revisiones han sido materializaciones de los esfuerzos por sintetizar la gran cantidad de investigación que se ha desarrollado sobre Cálculo. Como es natural, la investigación en esta área ha seguido –y quizás marcado– las tendencias de la investigación en Educación Matemática. Como dan cuenta dichas revisiones, los inicios de la investigación relativa al Cálculo estuvieron marcados por el predominio de una perspectiva cognitiva, empleando constructos como conflictos cognitivos (Schwarzenberger y Tall, 1978); errores y concepciones erróneas (Davis y Vinner, 1986; Furinghetti y Paola, 1991; Morgan y Warnock, 1978; Orton, 1983a, 1983b, 1984); la imagen del concepto y la definición del concepto (Tall y Vinner, 1981; Vinner, 1983; Vinner y Dreyfus, 1989); obstáculos cognitivos (Cornu, 2002) o epistemológicos (Sierpinska, 1985, 1987); actos de comprensión (Sierpinska, 1990); o las nociones de acciones, procesos, objetos y esquemas (Asiala et al., 1997; Dubinsky, 2002).

Con el avance de la investigación y el cambio de paradigmas, se conformaron diferentes aproximaciones. Como puede identificarse de estas síntesis, mucha de la investigación realizada empleó teorías o constructos teóricos sobre el aprendizaje de las matemáticas en general para estudiar tópicos específicos del Cálculo. Sin embargo, algunas de estas aproximaciones emergen específicamente en y para el Cálculo, enfocándose en aspectos propios de esta área como las ideas variacionales o dinámicas (Buendía y Cordero, 2005; Cantoral, 2013; Cantoral y Farfán, 1998; Cantoral Uriza, 1990; Cantoral Uriza y Mirón Shac, 2000; M. Carlson et al., 2002; Clement, 1989; Confrey y Smith, 1994, 1995; Cordero Osorio, 2001; Cottrill et al., 1996; Freudenthal, 1983; Grabovskij y Kotel’Nikov, 1971; Kaput, 1994; McDermott et al., 1987; Nemirovsky y Rubin, 1992; Saldanha y Thompson, 1998; A. G. Thompson y Thompson, 1996; P. W. Thompson y Carlson, 2017; P. W. Thompson y Thompson, 1994).

Este interés condujo hacia una denominación alternativa de “matemáticas del cambio y la variación” para la conjunción del Cálculo con otras áreas como Ecuaciones Diferenciales, Álgebra, Métodos Numéricos e incluso Sistemas Dinámicos (para visión más amplia al respecto véanse Cantoral Uriza, 1990; Kaput, 1994; Roschelle y Hegedus, 2013). Esta denominación está íntimamente vinculada con el surgimiento histórico de las áreas matemáticas asociadas al estudio de fenómenos de movimiento (como se puede ver en Cantoral Uriza, 1990; Kaput, 1994; Roschelle y Hegedus, 2013; P. W. Thompson y Carlson, 2017). Este conjunto de áreas es un componente sustancial de diferentes planes de estudio a nivel universitario, incluyendo la mayoría de ingenierías y de variedad de disciplinas como química, economía y ciencias biológicas, como argumenta (Kwon, 2020).

A su vez, este interés por aspectos variacionales se reflejó en la conformación de al menos dos líneas de investigación en Educación Matemática: el Marco de Razonamiento Covariacional que adoptó una perspectiva cognitiva y la línea de investigación Pensamiento y Lenguaje Variacional (PyLV) arropada en una teoría de carácter social; la primera con sus raíces en trabajos desarrollados en Estados Unidos, la segunda en los llevados a cabo en México. Ambos enfoques cuentan con una larga tradición y han atravesado por varios momentos de construcción (como se puede ver en P. W. Thompson y Carlson (2017) para el marco de razonamiento covariacional y en Caballero Pérez (2018), para el caso del PyLV).

De esta manera, consideramos pertinente realizar una revisión sobre dos enfoques que son propiamente para las matemáticas del cambio y la variación. Entonces, para este escrito planteamos como objetivo: describir de forma sintética la evolución de dos enfoques variacionales en la investigación sobre las matemáticas del cambio y la variación.

2. ABORDAJE METODOLÓGICO

Como argumentan Kaiser y Schukajlow (2024) las revisiones de la literatura proporcionan una visión general sobre ciertas temáticas, sintetizan investigación previa y señalan las posibles direcciones para continuar investigando. Particularmente, las revisiones narrativas "brindan una descripción general de un amplio espectro de investigación en un formato de fácil lectura" (Murphy, 2012, p. 89) y "tienen como objetivo identificar y resumir lo publicado anteriormente, evitar duplicidades y buscar nuevas áreas de estudio aún no abordadas" (R. Ferrari, 2015, p. 230).

Según Murphy (2012) algunos temas se acomodan mejor a una revisión narrativa, como las revisiones históricas o las revisiones que se basan en gran medida en información y estudios históricos que no encajan bien en los formatos de revisión sistemática. Además, sugiere que, para robustecer las revisiones narrativas con elementos de las revisiones sistemáticas se debe proporcionar una descripción completa de los métodos de búsqueda utilizados para permitir una mayor transparencia y reproducibilidad.

Con estas precisiones, planteamos una revisión narrativa con la que pretendemos dar cuenta de la evolución de dos enfoques variacionales hasta su momento de consolidación en la investigación didáctica en las matemáticas del cambio y la variación. La decisión de una revisión narrativa se justifica en: la especificidad de la temática que nos interesa; las diversas formas de aludir a las ideas variacionales (por ejemplo, variación, covariación, situaciones dinámicas, razonamiento covariacional, razonamiento variacional, pensamiento variacional) que dificultan especificar criterios de búsqueda en las bases de datos; más que ser exhaustivos como puede ser una revisión sistemática o de alcance, buscamos presentar una visión de la evolución de los dos enfoques. Aunado a ello, reconocemos que el grueso de los aportes de la línea del PyLV están reportados en tesis de posgrado y artículos de congreso, ambos en la región Latinoamericana, que aún no se encuentran en las principales bases de datos y repositorios que suelen consultarse en las revisiones sistemáticas de literatura.

Por la particularidad de la revisión que proponemos, delimitamos la investigación sobre ideas variacionales en Educación Matemática al Marco de Razonamiento Covariacional con una perspectiva cognitiva y a la línea de investigación PyLV desde una postura social. Para la primera, tomamos como punto de partida dos artículos clave para el enfoque del razonamiento covariacional, el de Carlson et al. (2002) en donde se presenta por primera vez de manera explícita dicho marco y el de P. W. Thompson y Carlson (2017) en donde se revisa el marco con base en los avances de investigaciones posteriores. A partir del primer escrito, seleccionamos las fuentes a las que los autores aluden explícitamente como base para construir el marco de razonamiento covariacional. De estas elegimos las que son accesibles mediante las bases de datos proporcionadas por nuestra institución y les sumamos otras que encontramos en sus listas de referencias. Mientras que para el enfoque del PyLV, consideramos como artículo base el escrito de Cantoral y Farfán (1998) en donde aparece conformada de manera explícita como línea de investigación. De este tomamos las referencias clave, principalmente artículos y tesis en español. Para ubicar los escritos que nos hablan de la evolución de la línea en los años posteriores nos apoyamos en la tesis de Caballero Pérez (2018), incluyendo principalmente artículos.

3. RESULTADOS/DISCUSIONES

3.1. EL MARCO DE RAZONAMIENTO COVARIACIONAL, UN ACERCAMIENTO COGNITIVO

En su propuesta del marco covariacional, Carlson et al. (2002) reconocen explícitamente que usan como base los trabajos de Confrey y Smith (1994, 1995), Monk (1992), Nemirovsky (1996), Piaget et al. (1977), Saldanha y P. W. Thompson (1998), P. W. Thompson (1994a, 1994b). De estas referencias no incluimos a Monk (1992) por cuestiones de acceso, sin embargo, pudimos reconocer que los autores consideran principalmente sus problemas sobre graficas de eventos dinámicos. Respecto del trabajo sobre funciones de Piaget et al. (1977) los autores retoman principalmente el carácter evolutivo del razonamiento sobre funciones.

De los trabajos de Confrey y Smith comparten el enfoque de covariación (que tiene raíces históricas) para el concepto de función como una alternativa al enfoque de correspondencia (Confrey y Smith, 1994; Nemirovsky, 1996). Este enfoque involucra la coordinación de la variación en dos o más columnas en ciertas tablas, haciendo más visible el concepto de razón de cambio y se concibe a la función como "una relación entre dos cantidades que varían" (Confrey et al., 1991, p. 3). Este mismo enfoque se retoma en un trabajo posterior (Confrey y Smith, 1995) para la construcción de la función exponencial.

Por su parte, de los trabajos de P. W. Thompson retoman ideas relacionadas con el razonamiento cuantitativo: cantidad, operación cuantitativa y razón de cambio. La cantidad se concibe como entidad conceptual esquemática compuesta por "un objeto, una cualidad del objeto, una unidad apropiada o dimensión y un proceso para asignar un valor numérico a la cualidad" (P. W. Thompson, 1994a, pp. 187–188) –a este último le denomina cuantificación y puede ser un proceso de medición directo o indirecto. La operación cuantitativa, en contraposición a la operación numérica, es una operación mental por medio de la cual uno concibe una nueva cantidad en relación con una o más cantidades ya concebidas. En cuanto a la idea de razón, P. W. Thompson (1994a) diferencia entre ratio y rate aludiendo a que ratio es el resultado de comparar dos cantidades multiplicativamente y rate es una ratio constante abstraída reflexivamente. Siguiendo las ideas del razonamiento cuantitativo, distingue entre movimiento como fenómeno y velocidad como cuantificación del movimiento.

Otra de las ideas que aporta al marco de razonamiento covariacional es la idea de imagen, en general, y más particularmente la de imagen de razón que propone P. W. Thompson (1994b) –que concuerda estrechamente con las imágenes del marco de razonamiento covariacional de Carlson et al. (2002). P. W. Thompson emplea esta idea de imagen de razón para estudiar las imágenes del Teorema Fundamental de Cálculo. Concibe que este teorema involucra la comprensión de que la acumulación de una cantidad y la razón de cambio de su acumulación están estrechamente relacionadas. Con esto analiza el uso que hace Newton del Teorema y propone un experimento de enseñanza con estudiantes de matemáticas de último año y graduados, de donde reporta que las dificultades con el teorema provienen de un concepto frágil de razón de cambio y de imágenes poco desarrolladas y coordinadas de covariación funcional y cantidades construidas multiplicativamente.

Estas ideas aparecen posteriormente en un estudio con un profesor al enseñar el concepto de velocidad (P. W. Thompson y Thompson, 1994). En este experimento se buscan desarrollar cuatro aspectos relativos a la velocidad (con base en trabajos de Piaget): primero, la velocidad como cuantificación del movimiento; segundo, el movimiento completo involucra dos cantidades completas (la distancia recorrida y la cantidad de tiempo requerido para recorrer esa distancia); tercero, la velocidad como una cuantificación del movimiento completo se hace comparando multiplicativamente la distancia recorrida y la cantidad de tiempo requerido para recorrer esa distancia; y cuarto, existe una relación directamente proporcional entre la distancia recorrida y la cantidad de tiempo necesario para recorrer esa distancia.

En otro de los trabajos base, Carlson (1998) investiga cómo los estudiantes desarrollan el concepto de función a medida avanzan en las matemáticas universitarias –publicación proveniente de la tesis doctoral de Carlson (1995). Para ello, construye y aplica un examen y realiza entrevistas de seguimiento a tres grupos de estudiantes universitarios (basado en algunas de las investigaciones antes mencionadas y con un marcado énfasis en gráficas de situaciones dinámicas): los que obtuvieron la mayor calificación en algebra, los que completaron cálculo con la mayor calificación y estudiantes de posgrado que completaron su primer semestre con la mayor calificación en análisis complejo o algebra abstracta. Como resultados menciona que el primer grupo de estudiantes creen que toda función puede definirse por una sola fórmula algebraica y no están preparados para interpretar información gráfica dinámica, además, no saben cómo emplear la notación funcional para representar relaciones del mundo real; los del segundo grupo interpretan información gráfica dinámica, pero tienen dificultad para interpretar y representar aspectos covariantes de una situación funcional; mientras que los del tercer grupo comprendieron la mayoría de los aspectos del concepto de función y tienen habilidad para representar aspectos covariantes en una situación funcional.

Con base en el trabajo anteriormente descrito, Carlson et al. (2001) proponen un primer modelo teórico como marco para describir las habilidades de razonamiento covariacional de los estudiantes, entendiendo a este último como la "coordinación de imágenes de dos cantidades que varían atendiendo las formas en que estas cambian en relación mutua" (Carlson et al., 2001, p. 145). Este marco se compone de cinco categorías de acciones mentales que los autores han observado cuando los estudiantes se enfrentan a representar e interpretar un modelo gráfico de un evento de función dinámico (ver Figura 1). En el escrito emplean el marco para analizar las acciones mentales de los estudiantes en tareas, tanto de covariación como relacionadas con límite y acumulación.

Figura 1 – Marco de covariación.

MA1) An image of two variables changing simultaneously;
MA2) A loosely coordinated image of how the variables are changing with respect to each other (e.g., increasing, decreasing);
MA3) An image of an amount of change of one variable while considering changes in discrete amounts of the other variable;
MA4) An image of rate/slope for contiguous intervals of the function's domain;
MA5) An image of continuously changing rate over the entire domain

Fuente: Carlson et al. (2001, p. 125).

Con base en estos dos últimos trabajos, Carlson et al. (2002, p. 354) definen el razonamiento covariacional como “las actividades cognitivas involucradas en la coordinación de dos cantidades variables, prestando atención a las formas en que cambian entre sí”. De este modo, asumen el razonamiento covariacional como evolutivo –siguiendo las ideas de Piaget–, por lo que optan por definirlo en niveles ordenados de acuerdo con acciones mentales a las que se les asocia un comportamiento de los estudiantes en tareas de covariación. De acuerdo con estas acciones puede asignarse un nivel de clasificación a los estudiantes, dependiendo de la imagen general que soporte las diversas acciones mentales que exhiben en el contexto de un problema o tarea (ver Figura 2).

Figura 2 - Acciones mentales y niveles del marco de razonamiento covariacional.

Mental action	Description of mental action	Behaviors
Mental Action 1 (MA1)	Coordinating the value of one variable with changes in the other	• Labeling the axes with verbal indications of coordinating the two variables (e.g., y changes with changes in x)
Mental Action 2 (MA2)	Coordinating the direction of change of one variable with changes in the other variable	• Constructing an increasing straight line • Verbalizing an awareness of the direction of change of the output while considering changes in the input
Mental Action 3 (MA3)	Coordinating the amount of change of one variable with changes in the other variable	• Plotting points/constructing secant lines • Verbalizing an awareness of the amount of change of the output while considering changes in the input
Mental Action 4 (MA4)	Coordinating the average rate-of-change of the function with uniform increments of change in the input variable.	• Constructing contiguous secant lines for the domain • Verbalizing an awareness of the rate of change of the output (with respect to the input) while considering uniform increments of the input
Mental Action 5 (MA5)	Coordinating the instantaneous rate of change of the function with continuous changes in the independent variable for the entire domain of the function	• Constructing a smooth curve with clear indications of concavity changes • Verbalizing an awareness of the instantaneous changes in the rate of change for the entire domain of the function (direction of concavities and inflection points are correct)

Level 1 (L1). ***Coordination***
At the coordination level, the images of covariation can support the mental action of coordinating the change of one variable with changes in the other variable (MA1).

Level 2 (L2). ***Direction***
At the direction level, the images of covariation can support the mental actions of coordinating the direction of change of one variable with changes in the other variable. The mental actions identified as MA1 and MA2 are *both* supported by L2 images.

Level 3 (L3). ***Quantitative Coordination***
At the quantitative coordination level, the images of covariation can support the mental actions of coordinating the amount of change in one variable with changes in the other variable. The mental actions identified as MA1, MA2 and MA3 are supported by L3 images.

Level 4 (L4). ***Average Rate***
At the average rate level, the images of covariation can support the mental actions of coordinating the average rate of change of the function with uniform changes in the input variable. The average rate of change can be unpacked to coordinate the amount of change of the output variable with changes in the input variable. The mental actions identified as MA1 through MA4 are supported by L4 images.

Level 5 (L5). ***Instantaneous Rate***
At the instantaneous rate level, the images of covariation can support the mental actions of coordinating the instantaneous rate of change of the function with continuous changes in the input variable. This level includes an awareness that the instantaneous rate of change resulted from smaller and smaller refinements of the average rate of change. It also includes awareness that the inflection point is where the rate of change changes from increasing to decreasing, or decreasing to increasing. The mental actions identified as MA1 through MA5 are supported by L5 images.

Fuente: Carlson et al. (2002, pp. 357-358).

Este marco de razonamiento covariacional es retomado en Castillo-Garsow (2010) quien identifica dos formas diferentes de pensar el cambio, cambio grueso (discreto, *chunky*) y cambio suave (dinámico, *smooth*). Estas formas de variación gruesa y suave, junto con la investigación sobre las concepciones de los estudiantes acerca del tiempo como cantidad y una nueva concepción de los objetos multiplicativos (Castillo-Garsow, 2010; Castillo-Garsow et al., 2013) son utilizadas por P. W. Thompson y Carlson (2017) para plantear el marco de razonamiento covariacional revisado. En este atienden separadamente el razonamiento variacional del razonamiento covariacional. El razonamiento variacional se compone de seis niveles principales: variable como símbolo, sin variación, variación discreta, variación gruesa, variación continua gruesa, variación continua suave. Acompañando estos niveles proponen los niveles principales de razonamiento covariacional: sin coordinación, pre-coordinación de valores, coordinación gruesa de valores, coordinación de valores, covariación continua gruesa, covariación suave. Los autores advierten que estos niveles pueden ser usados de dos maneras: para describir una clase de comportamiento o como una característica, la capacidad de una persona para razonar de manera variacional o covariacional (P. W. Thompson y Carlson, 2017).

Para postular este marco revisado, los autores se apoyan en escritos históricos para identificar cuatro eras en el desarrollo de la concepción de función: la era de la proporción caracterizada por la naciente atención al movimiento representando geométricamente la relación entre cantidades; la era de la ecuación, posible mediante el desarrollo de notación algebraica; la era caracterizada por la representación explícita de una relación entre valores de dos cantidades, valores que varían continuamente y cuya relación es definida mediante una fórmula o una gráfica; y finalmente la cuarta era, donde los valores de una variable son determinados de manera única por los valores de otra con "una ley de correspondencia precisa entre e que puede ser claramente establecida" (P. W. Thompson y Carlson, 2017, p. 422). Para estos autores, la covariación se convirtió en una forma explícita de razonamiento en matemáticas a partir de alrededor del año 1000 de nuestra era; aunque como forma de pensamiento nunca se definió, siempre fue tácito y aparece como constructo teórico a fines de los 1980's y principios de los 1990's en los trabajos de Confrey y Thompson.

3.2. EL PENSAMIENTO Y LENGUAJE VARIACIONAL, UN ACERCAMIENTO SOCIAL

Este enfoque inicia con los estudios precursores de Cantoral Uriza (1990), Farfán Márquez (1993) y Cordero Osorio (1994) dedicados a estudiar la construcción social de conocimiento matemático, principalmente en obras originales. En estos tres trabajos se inicia reconociendo que, en los procesos de transformación del saber matemático, para llevarlo a la escuela, se conforma un discurso que se apoya principalmente en la matemática formal, despojando a los conceptos de las prácticas que permiten darles significado.

En el caso de Cantoral Uriza (1990) estudia el proceso de evolución de las matemáticas del cambio y la variación, poniendo énfasis en el Cálculo como una matemática íntimamente vinculada con la Física, a propósito de su emergencia asociada al estudio de fenómenos de movimiento. Esto se ve reforzado por los trabajos de Farfán Márquez (1993) y Cordero Osorio (1994) en donde aparecen el fenómeno de propagación de calor en los sólidos asociado a la convergencia de series y el estudio mismo del movimiento asociado a la integral, respectivamente. En estos estudios, los autores reconocen una forma particular de proceder en el estudio de fenómenos, primero se toma un elemento o partícula en un momento dado y se identifican las variables esenciales relacionadas, para luego considerar ese mismo elemento o una partícula cercana después de un tiempo y estudiar las variaciones de esas variables involucradas durante ese tiempo; pasando por ciertos niveles de constantificación se encuentra la expresión matemática asociada al fenómeno.

Algunas ideas de estos tres primeros trabajos fueron condensadas en Cantoral y Farfán (1998), en donde se presenta explícitamente la línea de investigación PyLV. Ahí proponen un acercamiento didáctico para contribuir a la significación de conceptos del Cálculo, asumiendo como hipótesis que, para favorecer el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional son necesarios dos aspectos: por un lado, desarrollar la noción de predicción en fenómenos de flujo; y por otro lado, la adquisición de un lenguaje gráfico que permita operar gráficas análogamente a los números o variables y con esto poder construir un universo amplio de funciones a partir de operar tres funciones primitivas: la identidad, la exponencial y la trigonométrica (Farfán Márquez, 1997).

Con estas ideas, las investigaciones posteriores se dedicaron al desarrollo e implementación de secuencias didácticas. Por ejemplo, usando calculadoras gráficas para la resolver de desigualdades algebraicas, partiendo del contexto gráfico y luego trasladarse al contexto algebraico (Farfán-Márquez y Albert, 1995); para estudiar la relación entre una función y su derivada o una función y su primitiva (Cantoral Uriza y Mirón Shac, 2000); para bosquejar gráficas de funciones haciendo uso de herramientas analíticas y numéricas –sumar, multiplicar y dividir gráficas– (Cantoral y Montiel, 2001); para construir el polinomio de interpolación de Lagrange a partir de la visualización con actividades que involucran estrategias dinámicas (Cantoral y Montiel, 2003). Es así como la visualización a partir de gráficas se va consolidando como un aspecto fundamental en los trabajos de esta línea de investigación. Siguiendo esa idea se propone rever la regla de los signos de Descartes vinculada con la noción de predicción desde su visualización (Cantoral y Ferrari, 2009b, 2009a).

Además, se han realizado investigaciones sobre la noción misma de variación, por ejemplo, el papel que juega esta noción en las explicaciones de los profesores durante el tratamiento de los temas función y derivada (Cantoral y Reséndiz, 2003), destacando el papel de la variación: al emplear la variación numérica –relación entre conjuntos, la aproximación, el crecimiento o decrecimiento–, variación respecto a un punto de referencia, al usar expresiones verbales relativas a situaciones cotidianas, al emplear parámetros como variables principales y al hablar de la derivada como covariación o comparación $\frac{a}{b}$.

Otros estudios se enfocaron en analizar las practicas asociadas a diferentes formas de variación. Por ejemplo, la variación periódica se asume relacionada con la práctica de predicción en ámbitos dinámicos y más que centrarse en la definición misma de periodicidad, se propone enfocarse en el comportamiento periódico y las prácticas de los individuos al tratar con comportamientos repetitivos en gráficas que representan movimientos (Buendía, 2006; Buendía y Cordero, 2005).

En un trabajo posterior, se reconoce a la matematización de la astronomía, de la física y de la transferencia de calor como prácticas de referencia asociadas a la construcción social de la variación trigonométrica (Montiel Espinosa, 2005). A su vez, la matematización de la astronomía se asocia con la práctica social de anticipación e involucra actividades como medir, comparar, aproximar, en un contexto estático-proporcional. Mientras que, la matematización de la física se asocia a la predicción (como se argumenta en Cantoral Uriza, 1990) con actividades como medir, modelar, calcular en un contexto dinámico-periódico. Finalmente, vincula la matematización de la transferencia de calor con la formalización, con actividades como medir, modelar, comprobar, en un contexto estacionario-analítico.

En cuanto a la variación exponencial, Lezama Andalón (1999, 2003) la asocia con construcción geométrica de raíces y productos. Estas formas de construcción geométrica son utilizadas también para las funciones cuadrática y logarítmica en un ambiente de geometría dinámica (M. Ferrari y Farfán, 2008). Específicamente, se reconocen el facilitar cálculos y la modelación como prácticas asociadas a la conformación de los logaritmos (Ferrari Escolá, 2001), de donde emerge la hipótesis de que "lo logarítmico emerge al percibir la covariación entre dos patrones de crecimiento diferentes, uno regido por la multiplicación y otro por la adición" (Ferrari Escolá y Farfán Márquez, 2010, p. 55).

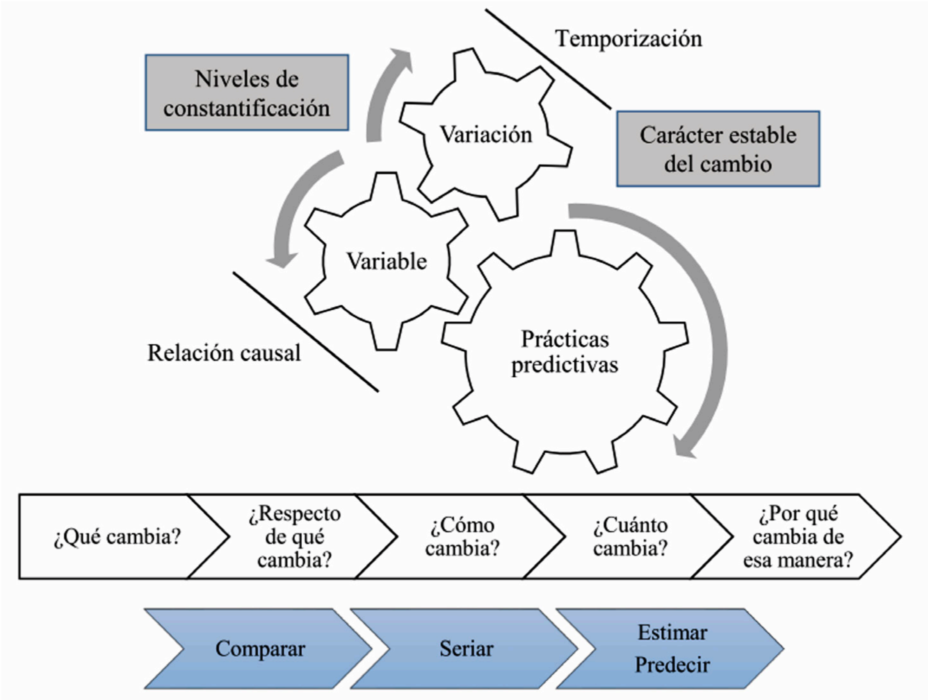
Adelante, otros trabajos buscaron analizar estrategias específicas para tratar con situaciones variacionales (Cabrera Chim, 2009; Salinas López, 2003) denominadas estrategias variacionales. Particularmente, Salinas López (2003) se enfoca en el aprendizaje de los conceptos de máximo y mínimo bajo la consideración de que los procesos están ligados a la variación de diversos órdenes y al estudio de la evolución del comportamiento cambiante. En este trabajo aparecen por vez primera estrategias variacionales, como comparación, predicción, seriación, estimación; y muestra como la noción de máximo y mínimo puede ser desarrollada mediante el uso y evolución de la estrategia de comparación, iniciando con comparaciones de números y segmentos verticales.

Por su parte, Cabrera Chim (2009) le da el estatus de práctica a las estrategias descritas por Salinas López (2003) y proporciona una acepción para el pensamiento variacional –forma de pensamiento a la que se dedica la línea de investigación PyLV– como "aquellas estrategias, formas de razonamientos, elementos y estructuras lingüísticas, que permiten discutir y comunicar el estudio y análisis del cambio y la variación"(Cabrera Chim, 2009, p. 55). Decidimos emplear nada más el término pensamiento variacional en consonancia con (Caballero Pérez, 2012, p. 12). Este último autor, vincula el pensamiento variacional con el razonamiento causal propuesto en los trabajos de Piaget (Piaget, 1930, 1954; Piaget y García, 1973).

Además, Caballero Pérez (2012) lleva a cabo una revisión de trabajos en la línea del PyLV, después de la cual propone una caracterización de algunos elementos como, situación variacional, argumentos variacionales, códigos variacionales, tareas variacionales, entre otros. Con estas caracterizaciones propone una tipificación de diferentes tipos de variación que se pueden observar mediante gráficas, como la variación cero, crecimientos y decrecimientos de tres tipos. En su trabajo posterior, considera que "el cambio alude a una cualidad que experimenta una transformación, en tanto que la variación consiste en una abstracción de las propiedades y características del cambio que se percibe" (Caballero Pérez, 2018, p. 16). A su vez, asume que este término variación ya incluye la idea de covariación, pues no se puede percibir, ni abstraer el cambio de una cantidad sin considerar otra cantidad de referencia; de esta manera la variación involucra mínimamente dos variables, aunque no sean implícitas.

En este trabajo, Caballero Pérez (2018) articula teóricamente algunos de los resultados anteriores en la línea del PyLV con la conjunción de causalidad y temporización (de los trabajos de Piaget) de donde emerge el sistema de referencia como mecanismo para explicar cómo se construye la idea de variación. Por un lado, la causalidad alude a la cuantificación del cambio en las variables relacionadas causalmente; mientras que la temporización refiere a la construcción de estados intermedios en la evolución del fenómeno que den cuenta del comportamiento del fenómeno en diversos estados, que permita la de un estado desconocido del fenómeno. De los trabajos previos del PyLV, Caballero Pérez (2018), retoma ideas como, orden de variación superior, que alude al reconocimiento de más de un orden de variación en el mismo fenómeno, que al articularlos conforman la variación sucesiva. Con estos elementos, este autor propone que la noción de variación debe ser construida mediante: medir el cambio, analizar cómo evoluciona esa medida y reconocer el por qué cambia de esa forma. La medición puede consistir en la asignación numérica o en una valoración de la cantidad modificada.

Figura 3 – Modelo para el análisis de situaciones de cambio.



Fuente: Caballero Pérez (2018, p. 156).

Para atender estos elementos se deben poner en juego prácticas variacionales, como formas de razonar o actuar en situaciones variacionales. Dentro de estas prácticas variacionales, el autor incluye las ya descritas por Salinas López (2003) robusteciéndolas con base en los elementos anteriores. A estas prácticas suma algunos cuestionamientos asociados al reconocimiento y cuantificación de la variación: ¿qué cambia?, ¿cuánto cambia?, ¿cómo cambia? –propuestas en las investigaciones de Dolores y Cuevas, 2007; Vrancken y Engler, 2014– y les añade otras dos ¿por qué cambia de esa manera? (esta y las anteriores ya se articulaban en el trabajo de Moreno Durazo, 2018) y ¿respecto de qué cambia? (esta última alude al sistema de referencia variacional). Estos elementos se esquematizan en una propuesta de modelo para analizar situaciones de cambio, como se muestra en la Figura 3.

Un modelo alternativo aparece en el trabajo de Moreno Durazo (2018) para investigar las prácticas de los médicos al analizar electrocardiogramas –una situación variacional– y una versión posterior se muestra en Hernández Zavaleta (2019) para investigar fenómenos relativos al movimiento caótico.

3.3. ALGUNOS TRABAJOS PREVIOS CON ALUSIÓN A IDEAS VARIACIONALES

Previo a los trabajos aludidos en los dos apartados anteriores, encontramos otros que ya iniciaban a enfocarse en aspectos variacionales y dinámicos, por lo que consideramos relevante incluirlos. Por ejemplo, en Freudenthal (1983) refiriendo a la fenomenología de las funciones desde un acercamiento histórico se reconoce a la variable como "algo que varía". Además, considera la idea de dependencia o conexión entre las variables, ejemplificando con fenómenos como la caída libre, movimiento, crecimiento, decrecimiento, en los cuales el tiempo es una de esas variables. Posteriormente, agrega que la función es un tipo especial de dependencia, una dependencia entre variables distinguidas como dependiente e independiente.

Estas ideas de Freudenthal (1983), las retoman Schoenfeld y Arcavi (1988) para enfatizar el "sentido cinemático original de noción de variable" (p. 424) y sugieren que en la enseñanza del concepto de variable de deben promover sus aspectos dinámicos, considerando relaciones dinámicas como fenómenos que dependen del tiempo, por ejemplo, la temperatura en una habitación en un tiempo *t* o la distancia a la que cae un objeto en *t* segundos.

Por otra parte, aunque en Orton (1984) se reporta las dificultades de los estudiantes en tareas relacionadas con la razón de cambio, se entrevé cierto interés en discutir esta idea desde fenómenos de movimiento. Ejemplo de ello son las tareas que propone: en una primera, pregunta sobre la velocidad por hora a la que viaja un auto, dada la distancia que recorre en cierto tiempo (sin mencionar que la velocidad es constante); en otra pregunta sobre un cuadrado creciendo con una razón constante; una tercera involucra agua fluyendo en un tanque a una razón constante; un cuarta sobre a una bola rodando cuesta abajo desde el reposo; una quinta trata la tangente como límite de una secante en un círculo; finalmente, cierra con una última tarea sobre la razón de cambio promedio. En resumen, con esta secuencia de tareas Orton (1984) pretende una discusión sobre la razón de cambio promedio e instantánea.

Aunque en la investigación de Clement (1989) se reporta de manera general dos concepciones erróneas sobre las gráficas –la vinculación con una característica gráfica incorrecta y el tratamiento de la gráfica como una imagen, por ejemplo, la forma de la gráfica vinculada con la forma de la colina–; también se proponen "algunos elementos básicos de un modelo de estructuras de conocimiento usado en la comprensión y generación de gráficas, con énfasis en el concepto de covariación y el carácter analógico de la representación gráfica" (Clement, 1989, p. 78). Para el trabajo con gráficas desde el punto de vista de la covariación, Clement (1989) pregunta a los estudiantes sobre la relación entre una situación cotidiana y su gráfica cualitativa, considerando la manera en cómo son representados los conceptos de variación y covariación. Para ello considera dos modelos, uno estático (Clement, 1986) y uno dinámico. En este segundo modelo se busca concebir cada punto de la gráfica como una representación de la correspondencia entre los cambios en las variables.

Por otro lado, Nemirovsky y Rubin (1992), interesados también en las habilidades y dificultades de los estudiantes al articular la relación entre función y derivada, proponen problemas en tres contextos: movimiento, fluidos e integración numérica. Los autores, además, describen que a lo largo de los episodios de aprendizaje los estudiantes usan enfoques alternativos para comprender la relación entre una función y su derivada, a los que denominan enfoques variacionales. Uno de ellos es la inclinación de la gráfica, haciendo comparaciones cualitativas entre puntos de la misma curva; otro es la pendiente de una curva y un tercer enfoque es la acumulación cualitativa local (describen también que otro puede ser el área bajo la curva). Para los autores, un enfoque variacional involucra dos aspectos clave: primero, cómo construir una forma global a partir de muchas instancias de variación local; segundo, cómo centrarse en la relación entre la función y su derivada, en lugar de cada una de ellas por separado. Finalmente, argumentan que construir un enfoque variacional es un proceso complejo.

4. DISCUSIÓN Y CONSIDERACIONES FINALES

Para esta revisión partimos con el objetivo de sintetizar la evolución de dos enfoques variacionales en la investigación didáctica relativa a las matemáticas del cambio y la variación: el Marco de Razonamiento Covariacional y la línea PyLV. Por la naturaleza del objetivo que planteamos optamos por una revisión narrativa, en la cual, si bien no se utiliza un instrumento de investigación empírica, el criterio de selección y síntesis de la literatura especifíca elementos de rigor metodológico que pueden permitir su replicabilidad. Sin embargo, no descartamos el hecho de haber pasado por alto alguna referencia que pueda ser relevante en lo que consideramos como el proceso de desarrollo y teorización de cada enfoque.

A partir de dos escritos clave por cada enfoque seleccionamos las referencias fundamentales y también incluimos la discusión de trabajos previos a la conformación de los enfoques variacionales. Desde estos trabajos se enfatizaba el carácter dinámico en las variables, su sentido original, lo mismo para la idea de función. En cuanto al trabajo con gráficas, que ha tenido también un papel central para los enfoques variacionales, se resalta la importancia de vincular una situación de movimiento y su gráfica, más que la relación entre una ecuación algebraica y su gráfica (como aparece en (Clement, 1989; McDermott et al., 1987), ideas que encontramos incluso antes, en los trabajos de Janvier (Bell y Janvier, 1981; Janvier, 1981). Al respecto nos llama particularmente la atención, la visión que propone Clement (1989) sobre la gráfica como "un modelo de una relación entre variables basada en una representación metafórica de valores de variables como longitudes de segmentos de recta" (p. 4). Las variables o magnitudes variables refieren a una situación o fenómeno, los segmentos son una representación de las magnitudes involucradas en dicha situación. Esto también permite ver que estos trabajos iniciales también recalcaban el empleo de problemas, tareas o contextos que involucran eventos o situaciones dinámicas, ya sea con materiales manipulables, representados en gráficas o en escenarios digitales.

Respecto al surgimiento y evolución del marco de razonamiento covariacional, de la síntesis reconocemos que emerge desde una postura cognitiva con investigaciones enfocadas principalmente en el concepto de función, proponiendo un enfoque covariacional como alternativa al enfoque de correspondencia. Los principales fundamentos se encuentran en la propuesta de razonamiento cuantitativo, en las imágenes de razón, así como de razón de cambio y en el carácter evolutivo de las ideas; adicionalmente, este marco está fuertemente sostenido en la tarea sobre llenado de una botella. El razonamiento cuantitativo ofrece un enfoque centrado en cantidades entendidas como cualidades medible de los objetos y operaciones con dichas cantidades en contraste con el enfoque centrado en números y operaciones numéricas. En estos trabajos también juegan un papel relevante las situaciones dinámicas y contextos gráficos.

Aunque desde sus inicios, el enfoque del razonamiento covariacional busca dar una aproximación variacional al concepto general de función como alternativa al enfoque de correspondencia, la misma idea de covariación hace ver que aún existe un apego a la idea de dos conjuntos, ahora vistos como cantidades. De esta manera, la investigación en este enfoque parece permanecer apegada a la definición formal de función y la fortaleza de significados que aportan los contextos o fenómenos es orientada hacia la identificación de esas cantidades que covarían.

Por otra parte, el enfoque del PyLV, como pilar de una postura social en la investigación en Educación Matemática, desde sus primeros trabajos reconoce la importancia de los fenómenos de variación para la construcción de ideas en Cálculo, de manera general, amparados en estudios históricos que sustentan la esencia variacional de estas ideas. En un momento posterior se reconoce la importancia del trabajo con gráficas y se propone un enfoque de operatividad con gráficas de funciones que apoya a la significación de operaciones con funciones en el contexto analítico mediante la visualización; es de esta aproximación de donde se toma la idea de lenguaje gráfico y que aporta el término lenguaje a la línea de investigación. En otro momento de su evolución, los trabajos se enfocan en formas específicas de variación, entre ellas la lineal, cuadrática, cúbica, exponencial, logarítmica, trigonométrica, dejando ver la naturaleza diferente de cada tipo de función. Posteriormente, los trabajos se enfocaron en estudiar las formas de hacer específicas (prácticas matemáticas) de los individuos cuando se enfrentan a una situación variacional. Esto permitió conformar un marco para el análisis del hacer de los individuos cuando se enfrentan a situaciones variacionales, con la inclusión de ideas como el sistema de referencia para explicar la evolución de la variación y el porqué de dicha evolución.

De esta manera, en esta línea se han estudiado diferentes tipos de fenómenos como los cíclicos que involucran la variación trigonométrica y periódica, la caída libre o movimiento parabólico, el movimiento caótico en un péndulo doble, entre otros. Para investigaciones futuras, queda abierta la posibilidad de continuar estudiando escenarios de movimiento donde la noción de variación es inherente y con ello promover el desarrollo del pensamiento variacional (o razonamiento covariacional, según la línea que se adopte) y con ello, continuar aportando a la significación de conceptos de las matemáticas del cambio y la variación.

En cuanto a la nociones de variación y covariación, Caballero Pérez (2018) explica que la variación ya incluye la covariación, debido a que la imposibilidad de percibir variación en una cantidad sino se toma otra cantidad como referencia; generalmente esta magnitud de referencia es el tiempo. En otras palabras, este enfoque decide analizar la variación de una magnitud siempre en estricta conexión con otra magnitud; no se puede observar o percibir el cambio o permanencia si no se considera que el fenómeno evoluciona o permanece en el tiempo.

También identificamos que los niveles del Marco de Razonamiento Covariacional se pueden emplear en dos sentidos: para describir lo que una persona requiere al enfrentar una situación dinámica específica o para caracterizar el nivel máximo que una persona domina (Thompson y Carlson, 2017); así, este marco también ha sido utilizado para diseñar secuencias de tareas que buscan promover el razonamiento covariacional (por ejemplo, Johnson et al., 2017); sin embargo, a pesar de que varias investigaciones han realizado esbozado formas en cómo desarrollar este tipo de razonamiento, consideramos que es necesario seguir ejemplificando y teorizando sobre cómo lograr la evolución de un nivel a otro, hasta lograr el nivel máximo, covariación continua suave. En esa línea de ideas, investigaciones dentro del enfoque PyLV han propuesto que el desarrollo del pensamiento variacional puede lograrse mediante el ejercicio de prácticas variacionales específicas para los diferentes tipos de variación, en contraste con el enfoque generalista sobre función que se entrevé al menos en los trabajos principales del marco de razonamiento covariacional.

Por último, planteamos que la revisión narrativa presentada puede seguir robusteciéndose con elementos de las revisiones sistemáticas –siguiendo las sugerencias de Murphy (2012); y que los resultados dan una base sólida para futuras investigaciones y prácticas educativas en el Cálculo, pues proporcionamos una visión cohesiva de cómo dos enfoques variacionales han evolucionado y se han manifestado en la investigación didáctica, esto es particularmente útil para investigadores y educadores que buscan entender o aplicar estos enfoques en contextos educativos.

DECLARACIONES DE CONTRIBUCIONES DE LAS PERSONAS AUTORAS

SNGA, DCTC y GME concibieron la idea presentada. SNGA, DCTC y GME adaptaron la metodología a este contexto y recopilaron los datos. SNGA analizó los datos. Todos los autores participaron activamente en la discusión de los resultados, revisaron y aprobaron el trabajo.

DECLARACIÓN DE DISPONIBILIDAD DE DATOS

Los datos que respaldan los resultados de este estudio estarán disponibles por las personas autoras correspondientes, SNGA, DCTC y GME previa solicitud razonable.

5. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Asiala, M., Cottrill, J., Dubinsky, E., & Schwingendorf, K. E. (1997). The development of students' graphical understanding of the derivative. *The Journal of Mathematical Behavior*, *16*(4), 399–431. https://doi.org/10.1016/S0732-3123(97)90015-8

Bell, A., & Janvier, C. (1981). The interpretation of graphs representing situations. *For the Learning of Mathematics*, *2*(1), 34–42. https://flm-journal.org/Articles/342368A19260FACE7BC364ED38AD7.pdf

Bressoud, D., Ghedamsi, I., Martinez-Luaces, V., & Törner, G. (2016). *Teaching and learning of Calculus*. Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-32975-8

Buendía, G. (2006). Una socioepistemología del aspecto periódico de las funciones. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *9*(2), 227–251.

Buendía, G., & Cordero, F. (2005). Prediction and the periodical aspect as generators of knowledge in a social practice framework. *Educational Studies in Mathematics*, *58*(3), 299–333. https://doi.org/10.1007/s10649-005-2295-5

Caballero Pérez, M. A. (2012). *Un estudio de las dificultades en el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional en profesores de bachillerato* [Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN]. https://www.researchgate.net/publication/277666881

Caballero Pérez, M. A. (2018). *Causalidad y temporización entre jóvenes de bachillerato. La construcción de la noción de variación y el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional* [Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN]. https://www.researchgate.net/publication/331563013

Cabrera Chim, L. M. (2009). *El Pensamiento y Lenguaje Variacional y el desarrollo de competencias . Un estudio en el marco de la reforma integral de bachillerato* [Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN]. https://www.researchgate.net/publication/275641327

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa*. Gedisa.

Cantoral, R., & Farfán, R. M. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Epsilon*, *42*(3), 353–372.

Cantoral, R., & Ferrari, M. (2009a). La predicción y la regla de los signos de Descartes. Primera parte: argumentos y demostraciones. *Premisa*, *11*(41), 3–20.

Cantoral, R., & Ferrari, M. (2009b). La predicción y la regla de los signos de Descartes. Segunda parte: visualizando la regla. *Premisa*, *11*(42), 3–21.

Cantoral, R., & Montiel, G. (2001). *Funciones: visualización y pensamiento matemático*. Prentice-Hall.

Cantoral, R., & Montiel, G. (2003). Una presentación visual del polinomio de Lagrange. *Números*, *55*, 3–22. https://drive.google.com/file/d/14LL1-ZM0DnLcz2A3CtysjuUr6eBm57T8/view

Cantoral, R., & Reséndiz, E. (2003). El papel de la variación en las explicaciones de los profesores: un estudio en situación escolar. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *6*(2), 133–154. https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33560203

Cantoral Uriza, R. (1990). *Desequilibrio y equilibración. Categorías relativas a la apropiación de una base de significaciones para conceptos y procesos matemáticos de la Teoría elemental de funciones analíticas*. [Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN]. https://www.researchgate.net/publication/261831299

Cantoral Uriza, R., & Mirón Shac, H. (2000). Sobre el estatus de la noción de derivada: de la epistemología de Joseph Louis Lagrange al diseño de una situación didáctica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *3*(3), 265–292. http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33503302%0ACómo

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: a framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education*, *33*(5), 352–378. https://doi.org/10.2307/4149958

Carlson, M. P. (1995). *A cross-sectional investigation of the development of the function concept*. University of Kansas.

Carlson, M. P. (1998). A cross-sectional investigation of the development of the function concept. En A. H. Schoenfeld, J. Kaput, E. Dubinsky, & J. Dick (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education*. *III* (pp. 114–162). American Mathematical Society. https://doi.org/10.1090/cbmath/007/04

Carlson, M. P., Larsen, S., & Jacobs, S. (2001). An investigation of covariational reasoning and its role in learning the concepts of limit and accumulation. En R. Speiser, C. A. Maher, & C. N. Walter (Eds.), *23rd Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 145–453).

Castillo-Garsow, C. (2010). *Teaching the Verhulst Model: a teaching experiment in covariational reasoning and exponential growth*. Arizona State University.

Castillo-Garsow, C., Johnson, H. L., & Moore, K. C. (2013). Chunky and smooth images of change. *For the Learning of Mathematics*, *33*(3), 31–37. https://www.jstor.org/stable/43894859

Clement, J. (1989). The concept of variation and misconceptions in cartesian graphing. *Focus on learning problems in mathematics*, *11*(1–2), 77–87.

Confrey, J., & Smith, E. (1994). Exponential functions, rates of change, and the multiplicative unit. *Educational Studies in Mathematics*, *26*(2–3), 135–164. https://doi.org/10.1007/BF01273661

Confrey, J., & Smith, E. (1995). Splitting, covariation, and their role in the development of exponential functions. *Journal for Research in Mathematics Education*, *26*(1), 66–86. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.26.1.0066

Confrey, J., Smith, E., Piliero, S., & Rizzuti, J. (1991). *The use of contextual problems and multi-representational software to teach the concept of function*. https://eric.ed.gov/?id=ED348229

Cordero Osorio, F. (1994). *Cognición de la integral y la construcción de sus significados: un estudio del discurso Matemático Escolar*. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN.

Cordero Osorio, F. (2001). La distinción entre construcciones del cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *4*(2), 103–128. http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33540201

Cornu, B. (2002). Limits. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 153–166). Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/0-306-47203-1_10

Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K., & Vidakovic, D. (1996). Understanding the limit concept: beginning with a coordinated process scheme. *The Journal of Mathematical Behavior*, *15*(2), 167–192. https://doi.org/10.1016/S0732-3123(96)90015-2

Davis, R. B., & Vinner, S. (1986). The notion of limit: some seemingly unavoidable misconception stages. *Journal of Mathematical Behavior*, *5*(3), 281–303.

Dolores, C., & Cuevas, I. (2007). Lectura e interpretación de gráficas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *10*(1), 69–96. http://www.scielo.org.mx/pdf/relime/v10n1/v10n1a4.pdf

Dubinsky, E. (2002). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95–126). Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/0-306-47203-1_7

Farfán-Márquez, R. M., & Albert, A. (1995). *Un acercamiento gráfico a la resolución de desigualdades: con el uso de claculadoras TI-81 y TI-85*. Grupo Editorial Iberoamérica.

Farfán Márquez, R. M. (1993). *Construcción de la noción de convergencia en ámbitos fenomenológicos vinculados a la ingeniería. Estudio de caso*. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN.

Farfán Márquez, R. M. (1997). *Ingeniería didáctica : un estudio de la variación y el cambio*. Grupo Editorial Iberoamérica.

Ferrari Escolá, M. (2001). *Una visión socioepistemológica. Estudio de la función logaritmo*. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN.

Ferrari Escolá, M., & Farfán Márquez, R. M. (2010). Una socioepistemología de lo logarítmico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *13*(4–I), 53–68.

Ferrari, M., & Farfán, R. M. (2008). Un Estudio socioepistemológico de lo logarítmico: la construcción de una red de modelos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *11*(3), 309–354.

Ferrari, R. (2015). Writing narrative style literature reviews. *Medical Writing*, *24*(4), 230–235. https://doi.org/10.1179/2047480615Z.000000000329

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Reidel.

Furinghetti, F., & Paola, D. (1991). The construction of a didactic itinerary of calculus starting from students' concept images (ages 16–19). *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *22*(5), 719–729. https://doi.org/10.1080/0020739910220503

Grabovskij, M. A., & Kotel'Nikov, P. M. (1971). The use of kinematic models in the study of trigonometric functions. *Educational Studies in Mathematics*, *3*(2), 147–160. https://doi.org/10.1007/BF00305443

Hernández Zavaleta, J. E. (2019). *Elementos para el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional entre estudiantes de bachillerato: el caso de "lo errático"* [Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN]. https://www.researchgate.net/publication/337013206

Janvier, C. (1981). Use of situations in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, *12*(1), 113–122. https://doi.org/10.1007/BF00386049

Johnson, H. L., McClintock, E., & Hornbein, P. (2017). Ferris wheels and filling bottles: a case of a student's transfer of covariational reasoning across tasks with different backgrounds and features. *ZDM*, *49*(6), 851–864. https://doi.org/10.1007/s11858-017-0866-4

Kaiser, G., & Schukajlow, S. (2024). Literature reviews in mathematics education and their significance to the field. *ZDM – Mathematics Education*, *56*(1), 1–3. https://doi.org/10.1007/s11858-023-01541-z

Kaput, J. J. (1994). Democratizing access to calculus: new routes to old roots. En A. H. Schoenfeld (Ed.), *Mathematical Thinking and Problem Solving* (Primera, pp. 77–156). Taylor & Francis. https://www.taylorfrancis.com/books/9781135440862

Kidron, I. (2020). Calculus teaching and learning. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 87–94). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_18

Kwon, O. N. (2020). Differential equations teaching and learning. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 220–223). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_100023

Larsen, S., Marrongelle, K., Bressoud, D., & Graham, K. (2017). Understanding the concepts of calculus: frameworks and roadmaps emerging from educational research. En J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 526–550). National Council of Teachers of Mathematics.

Lezama Andalón, F. J. (1999). *Un estudio de reproducibilidad: el caso de la función exponencial*. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN.

Lezama Andalón, F. J. (2003). *Un estudio de reproducibilidad de situaciones didácticas*. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN.

McDermott, L. C., Rosenquist, M. L., & van Zee, E. H. (1987). Student difficulties in connecting graphs and physics: Examples from kinematics. *American Journal of Physics*, *55*(6), 503–513. https://doi.org/10.1119/1.15104

Monk, S. (1992). Students' understanding of a function given by a physical model. En G. Harel & E. Dubinsky (Eds.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy* (pp. 175–193). Mathematical Association of America.

Montiel Espinosa, G. (2005). *Estudio socioepistemológico de la función trigonométrica* [Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN]. https://www.researchgate.net/publication/275155006

Moreno Durazo, G. A. (2018). *Principios del pensamiento matemático: el principio estrella en la práctica médica. El uso de la pequeña variación en el diagnóstico y el tratamiento de enfermedades cardiacas* [Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN]. https://www.researchgate.net/publication/327571578

Morgan, R. V., & Warnock, T. T. (1978). Derivatives on the han-held calculator. *The Mathematics Teacher*, *71*(6), 532–537. https://www.jstor.org/stable/27961333

Murphy, C. M. (2012). Writing an effective review article. *Journal of Medical Toxicology*, *8*(2), 89–90. https://doi.org/10.1007/s13181-012-0234-2

Nemirovsky, R. (1996). A functional approach to algebra: two issues that emerge. En N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee (Eds.), *Approaches to Algebra: perspectives for research and teaching* (pp. 295–313). Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-94-009-1732-3_20

Nemirovsky, R., & Rubin, A. (1992). *Students' tendency to assume resemblances between a function and its derivative* (Vols. 2–92). http://repositorio.unan.edu.ni/2986/1/5624.pdf

Orton, A. (1983a). Students' understanding of integration. *Educational Studies in Mathematics*, *14*(1), 1–18. https://doi.org/10.1007/BF00704699

Orton, A. (1983b). Students' understanding of differentiation. *Educational Studies in Mathematics*, *14*(3), 235–250. https://doi.org/10.1007/BF00410540

Orton, A. (1984). Understanding rate of change. *Mathematics in School*, *13*(5), 23–26. http://www.jstor.org/stable/30216279

Piaget, J. (1930). *The child's conception of physical causality*. Routledge. https://www.taylorfrancis.com/books/9781136316388

Piaget, J. (1954). *The construction of reality in the child*. Routledge. https://www.taylorfrancis.com/books/9781136316944

Piaget, J., & García, R. (1973). *Las explicaciones causales* (E. R. Póliza (trad.)). Barral.

Piaget, J., Grize, J.-B., Szeminska, A., & Bang, V. (1977). *Epistemology and Psychology of Functions* (Vol. 83). Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-94-010-9321-7

Rasmussen, C., Marrongelle, K., & Borba, M. C. (2014). Research on Calculus: what do we know and where do we need to go? *ZDM Mathematics Education*, *46*(4), 507–515. https://doi.org/10.1007/s11858-014-0615-x

Robert, A., & Speer, N. (2001). Research on the teaching and learning of Calculus/Elementary Analysis. En D. Holton (Ed.), *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level* (Vol. 3, Número 1, pp. 283–299). Kluwer Academic Publishers. https://doi.org/10.1007/0-306-47231-7_26

Roschelle, J., & Hegedus, S. (2013). Introduction: major themes, technologies, and timeline. En S. J. Hegedus & J. Roschelle (Eds.), *The SimCalc Vision and Contributions. Democratizing Access to Important Mathematics* (pp. 5–11). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-5696-0_1

Saldanha, L., & Thompson, P. W. (1998). Re-thinking covariation from a quantitative perspective: Simultaneous continuous variation. En S. Berenson, K. Dawkins, M. Blanton, W. Coulombe, J. Kolb, K. Norwood, & L. Stiff (Eds.), *Proceedings of the Annual Meeting of the North American Chapter of the Internationa Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 298–304). https://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.563.7089

Salinas López, C. (2003). *Un estudio sobre la evolución de ideas variacionales en los cursos introductorios al cálculo*. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN.

Schoenfeld, A. H., & Arcavi, A. (1988). On the meaning of variable. *The Mathematics Teacher*, *81*(6), 420–427. http://www.jstor.org/stable/27965869

Schwarzenberger, R. L. E., & Tall, D. (1978). Conflicts in the learning of real numbers and limits. *Mathematics teaching*, *82*, 44–49.

Sierpinska, A. (1985). Obstacles epistemologiques relatifs a la notion de limite. *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, *6*(1), 5–67.

Sierpinska, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational Studies in Mathematics*, *18*, 371–397.

Sierpinska, A. (1990). Some remarks on undestanding in mathematics. *For the Learning of Mathematics*, *10*(3), 24–36.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, *12*(2), 151–169. https://doi.org/10.1007/BF00305619

Thompson, A. G., & Thompson, P. W. (1996). Talking about rates conceptually, Part II: mathematical knowledge for teaching. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27*(1), 2–24. https://doi.org/10.2307/749194

Thompson, P. W. (1994a). The development of the concept of speed and its relationship to concepts of rate. En G. Harel & J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 181–234). SUNY Press.

Thompson, P. W. (1994b). Images of rate and operational understanding of the fundamental theorem of calculus. *Educational Studies in Mathematics*, *26*(2–3), 229–274. https://doi.org/10.1007/BF01273664

Thompson, P. W., & Carlson, M. P. (2017). Variation, covariation and functions: foundational ways of mathematical thinking. En J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 421–456). National Council of Teachers of Mathematics. https://www.nctm.org/Store/Products/Compendium-for-Research-in-Mathematics-Education/

Thompson, P. W., & Harel, G. (2021). Ideas foundational to calculus learning and their links to students' difficulties. *ZDM – Mathematics Education*, *53*(3), 507–519. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01270-1

Thompson, P. W., & Thompson, A. G. (1994). Talking about rates conceptually, part I: a teacher's struggle. *Journal for Research in Mathematics Education*, *25*(3), 279–303. https://doi.org/10.2307/749339

Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *14*(3), 293–305. https://doi.org/10.1080/0020739830140305

Vinner, S., & Dreyfus, T. (1989). Images and definitions for the concept of function. *Journal for Research in Mathematics Education*, *20*(4), 356–366. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.20.4.0356

Vrancken, S., & Engler, A. (2014). Una introducción a la derivada desde la variación y el cambio: resultados de una investigación con estudiantes de primer año de la universidad. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *28*(48), 449–468. https://doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a22