Cuadernos
de Investigación y Formación
en Educación Matemática

e-ISSN en línea: 2215-5627
Impresa: ISSN 1659-2573
Vol: 18 • N°. 1 • 2025
201-215
Recibido: 08/10/22024
Aprobado: 30/11/2024

Artículos de investigación

CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DE UNA PROFESORA DE MATEMÁTICA EN LA EJEMPLIFICACIÓN DE LA DESCOMPOSICIÓN DE RADICALES

SPECIALIZED KNOWLEDGE OF A MATHEMATICS TEACHER IN THE EXEMPLIFYING OF THE DECOMPOSITION OF RADICALS

Nicolás Sánchez Acevedo[1]
ORCID iD: https://orcid.org/0009-0004-8790-2919

Gonzalo Espinoza Vásquez[2]
ORCID iD: https://orcid.org/0000-0003-4500-4542

Carlos Segura[3]
ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-1457-5740

Luis Carlos Contreras [4]
ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-0044-2365

Leticia Sosa Guerrero[5]
ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-4905-6684

RESUMEN

Uno de los factores más relevantes que incide en el aprendizaje matemático de los estudiantes es el profesor de matemáticas, específicamente, el repertorio de conocimiento que le permite gestionar la enseñanza y el aprendizaje de manera coherente con los objetivos de enseñanza. Así, el diseño de la enseñanza incluye diversos elementos que interactúan, como recursos, estrategias, curriculum, ejemplos, etc., los cuales tienen sentido en el conocimiento del profesor. En este contexto, los ejemplos son un elemento relevante en el aprendizaje de las matemáticas, debido a su versatilidad en la enseñanza de procedimientos, conceptos, demostraciones y estrategias. Sin embargo, las secuen-

1 Facultad de Educación/Facultat de Magisteri, Universidad Central de Chile/ Universitat de València, Ciudad de Santiago, Chile. C.P. 8330601. Correo electrónico: nicolas.sanchez@ucentral.cl

2 Facultad de Educación, Departamento de Pedagogías Medias y Didácticas Específicas, Universidad Alberto Hurtado, Santiago, Chile. C.P. 8340539. Correo electrónico: gespinoza@uahurtado.cl

3 Departamento de Didáctica de la Matemática, Universitat de València, Valencia, España, C.P. 46022. Correo electrónico: carlos.segura@uv.es

4 Departamento de Didácticas integradas, Facultad de Educación, Psicología y CC del Deporte, Universidad de Huelva, España, Huelva, C.P. 21071, Correo electrónico: lcarlos@uhu.es

5 Unidad Académica de Matemáticas, Universidad Autónoma de Zacatecas, Zacatecas, México, C.P. 98066. Correo electrónico: lsosa@uaz.edu.mx

cias de ejemplos intencionadas movilizan de mejor manera aspectos relevantes de un objeto matemático, resaltando los aspectos críticos y no críticos considerados en la teoría de la variación. De esta manera, el objetivo de este trabajo es explorar el conocimiento especializado del profesor de matemáticas en la ejemplificación en la ecuación cuadrática, específicamente en la descomposición de radicales. Para ello usamos un estudio de caso instrumental con análisis basados en observaciones de aula y entrevistas semiestructuradas. Los resultados muestran que la selección de ejemplos y secuencias de ejemplos *intencionados* permite que afloren aspectos críticos de los ejemplos, movilizando específicamente conocimiento didáctico del contenido en diferentes subdominios: en relación con la enseñanza, las características del aprendizaje y del curriculum escolar. En relación con el conocimiento matemático, se identificaron evidencias en el conocimiento de los temas relacionados con los procedimientos y los registros de representación.

Palabras clave: Ejemplificación, Selección y uso de ejemplos, MTSK, Teoría de la variación, Estudio de caso.

ABSTRACT

One of the most significant factors influencing students' mathematical learning is the mathematics teacher, particularly the repertoire of knowledge that enables them to effectively manage teaching and learning in alignment with educational objectives. The teaching design encompasses various interconnected elements, such as resources, strategies, curriculum, and examples, all of which are situated within the teacher's knowledge framework. Among these elements, examples play a crucial role in mathematics learning due to their versatility in teaching procedures, concepts, demonstrations, and strategies. Intentional sequences of examples, however, are particularly effective in mobilizing critical aspects of mathematical objects, emphasizing both critical and non-critical features as outlined in the theory of variation. This study aims to explore the specialized knowledge of mathematics teachers in exemplification, focusing on the quadratic equation, specifically the decomposition of radicals. An instrumental case study methodology was employed, using classroom observations and semi-structured interviews for data collection. The findings reveal that the deliberate selection and sequencing of examples facilitate the emergence of critical aspects, particularly by mobilizing didactic content knowledge across various subdomains, including teaching practices, learner characteristics, and alignment with the school curriculum. Additionally, the results provide evidence of mathematical knowledge related to procedures and representation registers, highlighting the interplay between exemplification and effective teaching practice.

Keywords: Exemplification, Selection and use of examples, MTSK, Variation Theory, Case Study.

1. INTRODUCCIÓN

El conocimiento matemático y el didáctico del contenido pueden ser de diferente naturaleza (Tatto et al., 2008), y dependen de factores como el contexto educativo, los objetivos de enseñanza, los recursos educativos, el curriculum escolar, etc. En este sentido, la investigación ha contribuido a la formación de modelos analíticos (p.e. Ball et al., 2008; Carrillo et al., 2018) para comprender el qué y el cómo de este conocimiento es utilizado para la enseñanza. En estos modelos, los ejemplos son uno de los aspectos que emergen como centrales en el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas (Bills & Watson, 2008; Zaslavsky, 2019), y se ha demostrado que este aprendizaje puede ser dirigido conscientemente mediante el uso *cuidadoso e informado* de ejemplos o de secuencias de ejemplos en la ejemplificación de conceptos y procedimientos matemáticos (Figueiredo & Contreras, 2015; Watson & Chick, 2011).

Si bien la selección y el uso de ejemplos para la enseñanza son centrales para *ejemplificar* conceptos, nociones, procedimientos y/o teoremas, no solo basta la selección y uso, sino que la ejemplificación (como práctica consciente) necesita la movilización y el conocimiento de diversos aspectos relacionados con el uso pedagógico de los ejemplos (Adler & Pournara, 2020; Figueiredo & Contreras, 2015). Para que la *ejemplificación* de algún aspecto o tópico matemático sea efectiva, es *imperante* que secuencias de ejemplos, transparencia de un ejemplo, variación e invariancia actúen de manera conjunta y dependiente, con la finalidad de mostrar los aspectos significativos o críticos que deben ser experimentados por los estudiantes para lograr el aprendizaje (Marton & Pang, 2006).

Diversos trabajos han explorado el conocimiento puesto en juego por profesores de matemáticas en la enseñanza, específicamente en la selección y uso de ejemplos (p.e. Cayo et al., 2024; Chick & Harris, 2007; Sánchez et al., 2024), pero a pesar de estos esfuerzos, pocas han sido las investigaciones que han explorado la ejemplificación y su relación con el conocimiento del profesor de matemáticas (Adler y Pournara, 2020; Figueiredo & Contreras, 2013; Pang et al., 2016) y las que han abordado aspectos de la ejemplificación lo han hecho en contextos de desarrollo profesional para intencionar deliberadamente la ejemplificación (Adler y Pournara, 2020).

Al centrarnos en el tema de los radicales, como parte del contenido del álgebra escolar, encontramos poca investigación al respecto (Barrera-Mora & Reyes-Rodríguez, 2010; García et al., 2022; Gómez, 2011). Estas investigaciones se han centrado, principalmente, en el tratamiento de los radicales en los libros de texto, el aprendizaje de los radicales mediados por recursos tecnológicos y la enseñanza de radicales relacionados con la geometría. En el caso de los libros de texto, se evidencian algunas omisiones de tipo didácticas relacionadas con los símbolos y la notación, así como de errores y conflictos entre el operador radical y las raíces (en ecuaciones), asumiéndolos como iguales. En cuanto al uso de tecnologías digitales, los resultados han sido prometedores, ya que han permitido apoyar la enseñanza de los radicales y han servido como base para favorecer el diseño e implementación de la enseñanza.

Como se puede evidenciar, el estudio de la selección y uso de ejemplos para la enseñanza y su relación con el conocimiento profundo es un tema que necesita seguir siendo atendido, dado que una adecuada planificación y utilización de ejemplos para la enseñanza de contenidos matemáticos específicos permitiría intencionarla a través de prácticas conscientes (Kullberg et al., 2017). En relación con el tema de radicales, queda en evidencia que, si bien existe investigación que aporta a dilucidar líneas de acción, en cuanto a su aprendizaje y enseñanza, esta no se ha centrado en la relación entre el conocimiento especializado del profesor de matemáticas, la ejemplificación y el tema de radicales para la enseñanza. Esta situación plantea la necesidad de abordar y explorar esta área de investigación, dado que el contenido de radicales, y posteriormente de raíces (Gómez, 2011), es un tema incluido en diversos lineamientos curriculares de matemáticas (Ministerio de Educación [MINEDUC], 2015; National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000).

En consecuencia, es necesario explorar las relaciones entre el conocimiento del profesor y la ejemplificación en cuanto a la enseñanza de los radicales. En esta línea, Sánchez-Acevedo et al. (2023) y Sánchez et al. (2024) han comenzado a discutir la relación entre el conocimiento especializado del profesor de matemáticas, particularmente en el tema de la ecuación y función cuadrática, y la ejemplificación, pero destacando la intencionalidad y consciencia de esta práctica, que es el contexto investigativo donde se inserta esta investigación.

Teniendo en cuenta lo anterior, el objetivo de este estudio es explorar el conocimiento especializado que moviliza una profesora de Matemáticas en la ejemplificación, a partir de una secuencia de ejemplos en la descomposición de radicales cuando enseña la ecuación cuadrática.

2. ELEMENTOS TEÓRICOS

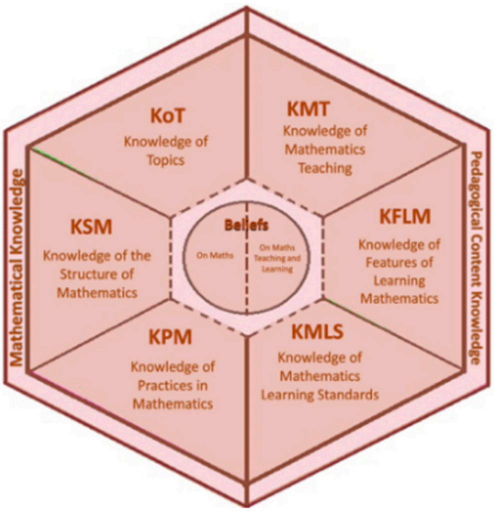
Se describen los elementos teóricos que sustentan este trabajo. El primero de ellos es el modelo de conocimiento especializado del profesor de Matemáticas, y el segundo, la idea de secuencia de ejemplos y la teoría de la variación como parte de la ejemplificación.

2.1 El modelo MTSK

La práctica docente requiere de un conocimiento profundo de la disciplina que se enseña, así como de la toma de decisiones de enseñanza y aprendizaje focalizada en el logro de metas específicas en los estudiantes (Schoenfeld, 2010).

De acuerdo con esto, el modelo analítico *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* (MTSK) (Figura 1) considera tres dominios que permiten caracterizar el conocimiento del profesor de Matemáticas en relación con la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas (Carrillo et al., 2018): el dominio de Conocimiento Matemático (MK) y el dominio del Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK) relacionados exclusivamente con los contenidos matemáticos; y el tercer dominio, de las Creencias sobre la matemática, su enseñanza y su aprendizaje, que permea tanto el conocimiento disciplinar como el didáctico del contenido en relación con la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas (Carrillo et al., 2018).

Figura 1. El modelo MTSK.



Fuente: Tomado de Carrillo et al. (2018).

El dominio del Conocimiento Matemático (MK) se compone de los subdominios:

- *El Conocimiento de los temas (KoT)* se refiere a un conocimiento profundo y fundamentado del contenido matemático. Se trata de conocer el contenido concreto que se pretende que los alumnos aprendan, con un nivel de profundización mayor. Incluye el conocimiento de relaciones intraconceptuales, es decir, relativas a un mismo tema.

- *El Conocimiento de la estructura de las matemáticas (KSM)* se refiere al conocimiento de las principales ideas y estructura de las matemáticas y de las conexiones entre contenidos, conexiones de simplificación, complejización, transversales y auxiliares.

- *El Conocimiento de las prácticas matemáticas (KPM)*, es el conocimiento de cómo se procede cuando se hacen Matemáticas, su sintaxis; por ejemplo, cómo se define o cómo se demuestra.

El dominio del Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK) se compone de los subdominios:

- *El Conocimiento de las Características de Aprendizaje de las Matemáticas (KFLM)* parte de la necesidad que tienen los profesores de entender cómo piensan sus alumnos al realizar actividades y cuestiones matemáticas (dificultades de aprendizaje y modos de pensamiento), y se centra en cómo se aprenden las matemáticas (Carrillo et al., 2018). Puede ser un conocimiento fundamentado en teorías sobre el aprendizaje matemático o en la reflexión del profesor sobre su experiencia.

- *El Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS)* se refiere al conocimiento sobre lo que se establece un estudiante debe aprender y con qué nivel de profundidad. Además del currículo prescriptivo, el conocimiento puede provenir de otros documentos sobre estándares de aprendizaje (o de exámenes o pruebas evaluadoras externas al centro, como podrían ser las pruebas PISA) e investigaciones que ofrecen recomendaciones al respecto.

- *El Conocimiento de la enseñanza de las Matemáticas (KMT)* lo conforman los conocimientos que posee el profesor sobre representaciones del contenido de cara a su enseñanza. Incluye, entre otros, el conocimiento de ejemplos, recursos, actividades y su potencialidad en la enseñanza de un tema.

En este caso, los ejemplos para la enseñanza tienen un papel relevante en el MTSK, particularmente en el KMT, pues forman parte de los mecanismos de enseñanza de los que se puede valer el profesor.

2.2 Secuencias de ejemplos y variación

La noción de *ejemplo* ha sido caracterizada por diferentes autores (Bills et al., 2006; Zodik & Zaslavsky, 2008) de acuerdo con diferentes ámbitos (matemáticos y/o de enseñanza). En este trabajo consideraremos que un ejemplo es "un elemento de una colección de objetos (entes) que es utilizado en una determinada situación de enseñanza/aprendizaje porque evidencia determinada, o determinadas características" (Figueiredo, 2010, p. 36).

Conviene señalar que, si se pretende mostrar cierta o ciertas características de un concepto o procedimiento matemático a través de un único ejemplo, dicho aspecto puede quedar invisibilizado. Así, el uso de secuencias de ejemplos intencionados permite resaltar las características del concepto, favoreciendo el aprendizaje de los estudiantes (Figueiredo & Contreras, 2015; Kullberg et al., 2017). Para lograr resaltar aspectos críticos es recomendable proponer combinaciones de ejemplos que dirijan la atención de los estudiantes hacia aquello en lo que se quiere focalizar la atención (Bills et al., 2006). Asimismo, Figueiredo et al. (2009) mencionan que en las secuencias de ejemplos elaboradas de manera clara se pueden diferenciar dos objetivos diferentes, (i) las que sirven para estimular la generalización de algún concepto matemático y (ii) aquellas que permiten profundizar en la fluidez de cálculos y procedimientos.

La conciencia sobre ejemplos y secuencias de ejemplos está relacionada con la idea de hacer que ocurra el aprendizaje desde una perspectiva relacional y perceptiva (Marton & Booth 1997; Marton & Tsui 2004). En este sentido, Marton & Booth (1997) dieron pie a una nueva forma de ver el aprendizaje de las matemáticas sobre la base de que “aprender consiste en hacer nuevas distinciones; simultáneamente, discernir algo de, y relacionarlo con, un contexto” (Figueiredo, 2010, p.107, citando a Marton & Both, 1997). Esta teoría señala que “Si un aspecto de un fenómeno o evento varía mientras otro u otros se mantienen inalterados, se observará el aspecto cambiante” (p. 107). La parte del contenido que varía es llamada Dimensión de la variación.

La teoría de la variación se apoya en la idea que el aprendizaje implica visualizar o experimentar aquellos aspectos críticos de un objeto de aprendizaje (Marton & Booth, 1997; Marton, 2015). Este objeto de aprendizaje debe proporcionar respuestas a la pregunta ¿Qué se debe aprender? (Kullberg et al., 2017) sobre la base de tres pilares: (1) el contenido, (2) el objetivo educativo y (3) lo que se necesita aprender (aspectos críticos). Por ejemplo, si en una secuencia de radicales $\sqrt{4}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{16}$ se quiere mostrar la descomposición de radicales, este es el aspecto crítico, el factor r $4 = 2^2$ el invariante y la 1, 2, 3, 4, … la dimensión de variación.

En este sentido, Kullberg et al. (2017) comentan que la teoría de la variación muestra de manera específica las condiciones que se deben dar para el aprendizaje. Permite justificar el fracaso en el aprendizaje cuando los estudiantes no desarrollan el sentido de lo que se pretendía enseñar, es decir, no han discernido los aspectos críticos en el aprendizaje más que los necesarios para la adquisición del concepto. En este sentido, los autores plantea que:

> la idea central de la teoría de la variación es que el discernimiento es una condición necesaria del aprendizaje: qué aspectos a los que prestamos atención o discernimos son de importancia decisiva para la forma en que entendemos o experimentamos el objeto de aprendizaje. Sin embargo, el discernimiento no puede ocurrir sin que el alumno haya experimentado. (p. 560)

En esta teoría, el aprendizaje significa la formación de nuevas relaciones y formas diferentes de aprender, es decir, aprender a ver algo de cierta manera equivale a discernir ciertas características críticas de ese fenómeno y enfocarse en ellas simultáneamente (Marton, 2009).

Esto conlleva que experimentar la variación, permite centrar el foco en aquellos aspectos/características críticas y patrones de variación e invariancia, ofreciendo directrices para el aprendizaje, es decir, que si “un aspecto de un fenómeno o evento varía mientras otro u otros se mantienen inalterados, se observará el aspecto cambiante” (Figueiredo y Contreras, 2013, p. 48).

3. ASPECTOS METODOLÓGICOS

Para el desarrollo del objetivo, desde un enfoque cualitativo (Bassey, 1999), adoptamos un estudio de caso de tipo instrumental (Stake, 1999), que permite estudiar “la particularidad y la complejidad de un caso singular, para comprender su actividad en momentos relevantes” (Stake, 1999, p. 11), logrando un estudio minucioso y profundo sobre características significativas del objeto en cuestión, que en este trabajo consiste en comprender en profundidad el conocimiento especializado que moviliza una profesora cuando ejemplifica a partir de secuencias de ejemplos intencionados de la ecuación cuadrática.

3.1 La profesora informante

La elección de la profesora responde a dos motivos relevantes: el primero es su voluntad de participar en el trabajo, y el segundo, su accesibilidad (Loughran et al., 2008). La profesora que participa como informante en la investigación (de seudónimo Jenny), al momento de recolectar la información hacía clases en 3° grado de enseñanza media (16-17 años) en una escuela subvencionada de Chile. Tenía cinco años de experiencia docente y la consideración de participar en la investigación se debió a que fue una de las mejores graduadas de su generación del grado de Licenciatura en Ciencias. Además, ella cursaba un programa de formación pedagógica y disponía con la motivación de perfeccionarse en la enseñanza de la matemática.

3.2 Recolección y análisis de la información

Por medio de la observación no participante (Creswell, 2007) se videograbaron siete clases destinadas a la ecuación cuadrática, que incluyeron todos los temas relacionados con la ecuación cuadrática. En la tercera clase, la profesora enseñó la resolución de ecuaciones cuadráticas usando la fórmula. Como parte de esta tercera clase, se trabajó en la descomposición de radicales como una alternativa al uso de la calculadora. Posterior al análisis de las clases, se aplicaron entrevistas semiestructuradas, las que sirvieron como un instrumento complementario para profundizar en el conocimiento especializado de Jenny, buscando profundizar en aspectos relevantes (Kvale, 2011) de su conocimiento.

Las videograbaciones fueron transcritas para su tratamiento y búsqueda de secuencias de ejemplos que resaltaron características de los aspectos de variación e invarianza. La enseñanza, a partir de ejemplos y secuencias de ejemplos, fue transcrita y dividida en unidades de información, que se corresponden con las declaraciones orales y/o escritas de Jenny, y al referenciarlas, consideramos las líneas transcritas en las que se localiza la evidencia/indicio de conocimiento. De acuerdo con Flores et al. (2014), una evidencia permite afirmar la presencia de un conocimiento del profesor, ya sea superficial o profundo, mientras que un *indicio* es una sospecha de la existencia o no de un conocimiento que emerge por alguna declaración o acto del profesor en el acto de enseñanza; y que necesita información extra para ser corroborado.

Para el análisis de los significados del discurso de Jenny y su conocimiento especializado, usamos la técnica de análisis de contenido (Krippendorff, 1990), considerando las etapas de descripción, análisis e interpretación de los datos (Johnson, et al., 2014). La descripción corresponde a la selección de las unidades de información al transcribir la enseñanza de la descomposición de radicales a partir del uso de la secuencia de ejemplos. En el análisis se identifican las características de las unidades identificadas para describir el conocimiento especializado que moviliza la profesora Jenny. Y en la interpretación, realizamos una lectura conjunta y transversal de las evidencias, fundamentando la comprensión del conocimiento de la profesora.

La validación de la investigación se logró por medio de la triangulación de consenso entre expertos (Flick, 2007), y para el rigor de la investigación seguimos los criterios propuestos por Guba (1983, citado en Dorio et al., 2004) que son: credibilidad, transferibilidad, dependencia y confirmabilidad. La credibilidad implica dar valor de verdad a la investigación, es decir, que los resultados recolectados se ajusten a la realidad observada en el aula de clases; la transferibilidad se refiere a que los resultados de esta investigación sirvan de base como conocimiento en otros espacios y como referencia investigativa; la dependencia de los resultados se relaciona con su consistencia, y su capacidad de mantenerse estables en el tiempo; y la confirmabilidad implica que la información y los resultados de esta investigación fueron consensuados y discutidos por los investigadores de este trabajo, orientando hacia la objetividad y neutralidad.

4. RESULTADOS

En este escrito nos centramos en una de las secuencias de ejemplos utilizados por Jenny relacionada con la descomposición de radicales. En esta secuencia identificamos el MTSK manifestado por Jenny en relación con la ejemplificación de aspectos críticos de la descomposición de radicales, que se derivan del uso de la fórmula $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ cuando realizaba la resolución de ecuaciones cuadráticas completas de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, , con a, b y c diferentes de cero.

4.1 Secuencia de ejemplos para la descomposición del radical de la fórmula

Cuando Jenny enseñaba la resolución de ecuaciones cuadráticas por medio de la fórmula, junto con los estudiantes, se dio cuenta de que en algunos casos la cantidad subradical no tenía raíz cuadrada exacta, y presentó una secuencia de cuatro ejemplos (que fueron espontáneos) de raíces no exactas para explicar la descomposición. La secuencia de ejemplos que presenta es (a) $\sqrt{8}$, (b) $\sqrt{18}$, (c) $\sqrt{76}$ y (d) $\sqrt{648}$, la que está en orden de gradualidad. Esta secuencia tenía como objetivo la descomposición de los radicales para establecer relaciones con las propiedades de las raíces. Estos ejemplos son usados por Jenny cuando, en la resolución de las ecuaciones cuadráticas, la cantidad subradical no es exacta.

En la entrevista se le pregunta a Jenny por qué muestra este conjunto de ejemplos a los estudiantes y con qué motivo:

> Jenny: Para mi tiene que ver con un tema de comprender desde la raíz más prima, de comprender que en el fondo son $2\sqrt{2}$ y si yo por ejemplo pudiese descomponer esa raíz desde la geometría u otra área, lo podría usar, no es que no es válida la $\sqrt{8}$. Quizás también tiene que ver con las pruebas estandarizadas, las pruebas estandarizadas, la solución viene en una solución como la mínima expresión.

A partir de lo que comenta Jenny, identificamos conocimiento sobre formas de representar las radicales de manera diferente pero equivalente (KoT-registros de representación). Usa diferentes ejemplos para mostrar la descomposición de los radicales como una estrategia (KMT-estrategias, técnicas, tareas y ejemplos) para que los estudiantes recuerden formas alternativas al expresar una cantidad radical no exacta.

Jenny muestra estos ejemplos, considerando lo que deben saber los estudiantes en las pruebas estandarizadas (KMLS-nivel de desarrollo conceptual y procedimental esperado), pues sabe que dentro de los objetivos del programa de estudio del nivel (3° medio, 16 a 17 años) los estudiantes deberán saber descomponer radicales en la resolución de ecuaciones cuadráticas.

En el caso del primer radical, $\sqrt{8}$,, Jenny pregunta a los estudiantes: "*La raíz de ocho ¿De qué otra manera la podemos escribir?*", y un estudiante responde: "*Raíz de cuatro por dos*". A partir de la respuesta del estudiante, Jenny explica:

> Jenny: Perfecto ¿Qué hacíamos ahí? ¡Muy bien!, y nos quedaba ¿Cierto?, que esto era, dos ¿Raíz de?, dos [Anota $2\sqrt{2}$] ¿Cierto? Porque la raíz de cuatro, la podíamos separar en dos raíces, la raíz de cuatro, por la raíz de dos ¿Cierto? Entonces la raíz de cuatro era dos y nos quedaba dos raíz de dos. ¿Se acuerda de eso forma típica de raíces?

De la respuesta de Jenny identificamos **KoT (procedimientos)**, pues Jenny conoce cómo se lleva a cabo el algoritmo convencional para descomponer radicales no exactos, de modo tal que uno de los factores pueda tener raíz cuadrada exacta y el otro factor sea un número irracional.

Para los siguientes ejemplos, $\sqrt{18}$ y $\sqrt{76}$,, Jenny, procede de forma similar a la anterior. Para el , los estudiantes logran representar el $\sqrt{18}=\sqrt{(9 \cdot 2)}$,, aludiendo a los factores 9 y 2, ante lo cual Jenny valida las respuestas de los estudiantes:

> Jenny: Raíz de nueve por dos ¿Cierto? y la forma típica entonces ¿Nos quedaría? raíz de nueve por raíz de dos, que es lo mismo que decir tres raíz de dos, en el fondo el nueve ¿Cierto? tiene raíz exacta… queda multiplicando la raíz de dos [Anota $3\sqrt{2}$] ¿Se acuerda o no se acuerda ahora?

De este fragmento, Jenny muestra **procedimientos** (**KoT)** para descomponer radicales cuadrados que no son exactos y expresarlos de forma equivalente. En el tercer caso, $\sqrt{72}$, es Jenny quien entrega la forma de expresar la descomposición, debido a que esta no es directa, escribiendo $\sqrt{72} = \sqrt{(36 \cdot 2)}$, descomposición que finalmente expresa como . De este **procedimiento (KoT)**, Jenny sabe que cuando la cantidad subradical se descompone en factores, uno de ellos debe tener raíz cuadrada exacta y que estos factores se pueden escribir como producto de raíces.

Del cálculo de la última raíz que presenta Jenny ($\sqrt{648}$), lo primero que evidenciamos es **KoT (procedimientos-¿cómo se hace?)**, pues sabe que como algoritmo alternativo se puede proceder vía ensayo y error hasta ir encontrando factores con raíces cuadradas exactas simples (**KMT-estrategias, técnicas, tareas y ejemplos**). Por ejemplo, cuando explica: *"Ah por dos [Corrige] ¡Ya¡ ¿alguno de estos tiene raíz exacta fácil? No, por ahora no me sirve mucho esto, pero podemos ir descomponiendo… si volvemos a poner un dos. ¿Dos por cuánto me da Trescientos veinticuatro? ¿Cuál es la mitad de trescientos?"*, lo que alude a ir probando factores para obtener 648. Esto se refleja cuando descompone 648 en 324 • 2, luego el 324 en 162 • 2, finalmente menciona "*Sí, pero aún hay más números todavía ¡Ya! Y aquí es ir jugando en realidad… el más grande que me va a servir va a ser treinta y seis por dieciocho comprobémoslo, seis por ocho, cuarenta y ocho.*

En relación con la selección de la secuencia de ejemplos, Jenny nos responde:

> Jenny: fueron ejemplos que emergieron en el momento para profundizar en un concepto, particularmente que se pudieran descomponer de raíces, porque no podían con aquellas no exactas. Notar que acá lo que sí intencioné es que las cantidades subradicales fueran en orden creciente, porque la primera es relativamente asequible descomponerla en , la segunda también es asequible en , y la raíz cuadrada 76 y 648 ya no es tan simple, pero también se descomponen con el 2, lo que además es una forma diferente de mostrar las raíces.

Jenny pone en juego conocimientos sobre la descomposición de radicales no exactos, evidenciándose **KMT (estrategias, técnicas, tareas y ejemplos)**, dado que selecciona ejemplos adecuados para profundizar en el concepto. Así mismo, establece como estrategia de enseñanza una gradualidad en la selección de los ejemplos para profundizar en la comprensión de la descomposición por dos **(KMT-estrategias, técnicas, tareas y ejemplos)**, estrategia de enseñanza que emerge, dado que Jenny conoce posibles **dificultades (KFLM)** de los estudiantes en lo operacional y/o conceptual.

Los ejemplos que usa en orden creciente nos informa de su conocimiento de cómo sus estudiantes aprenden, y con ello establece una relación en la descomposición de radicales y los procedimientos que usan los estudiantes (KFLM-formas de interacción con un contenido matemático). Jenny es también consciente de que los radicales se pueden descomponer como producto de radicales $\sqrt{}(a \bullet b^2) = \sqrt{}a \bullet \sqrt{}(b^2) = b \bullet \sqrt{}a \bullet \sqrt{}(b^2)$, donde *b* es un cuadrado perfecto, conociendo una forma alternativa de expresarlo. Al respecto señala que: *"en el contexto educativo en el que están los estudiantes se hace necesario que ellos logren identificar formas distintas de representar esas raíces cuadradas"*. Esto muestra indicio de conocimientos sobre el papel que tiene la teoría de representaciones semiótica en la enseñanza de los conceptos *(KMT-teorías de enseñanza).*

La secuencia de ejemplos que plantea Jenny al ejemplificar el concepto de radical cuadrado no exacto hace que éstos sean coherentes con el objetivo planteado. En estos casos (en contexto escolar) usa la propiedad de radicales para la descomposición (KoT-definiciones, propiedades y sus fundamentos). Con esta ejemplificación de la idea de descomposición se releva la variación en medio de la invarianza, siendo el aspecto crítico la descomposición por 2 *(KFLM-teorías de aprendizaje)*, lo que es manifestado por Jenny al conocer las dificultades de los estudiantes.

En efecto, dado que Jenny considera la descomposición de radicales no exactos como un contenido de cursos anteriores *(KMLS-secuenciación con temas anteriores)*, usa como estrategia el ensayo y error (KMT-estrategias, técnicas, tareas y ejemplos) para descomponer por dos los radicales (aspecto invariante), es decir, iterativamente va dividiendo por dos para llegar a la cantidad subradical irreducible. Esto lo mostramos en el siguiente fragmento (se muestra el procedimiento de $\sqrt{}648$):):

P : ¡Ya! Busquemos factores que multiplicados me den seiscientos cuarenta y ocho.

E : Tres veinticuatro.

P : Trescientos veinticuatro por uno.

E : ¡No! Por dos.

P : Ah por dos [Corrige] ¡Ya! alguno de estos ¿Tiene raíz exacta fácil?

E : No.

P : No, por ahora no me sirve mucho esto, pero podemos ir descomponiendo… si volvemos a poner un dos. ¿Dos por cuánto me da Trescientos veinticuatro? ¿Cuál es la mitad de trescientos?

E : Ciento cincuenta.

P : Ciento cincuenta, la mitad de ¿Veinte? Sería ciento sesenta ¿La mitad de cuatro?

E : Dos.

P : Dos. Ciento sesenta y dos [Descompone 648 en 324 • 2 y luego en 162 • 2] ¿Sí? Y hasta ahora no me sirve tampoco, pero aquí tengo dos, que podría ser. Dos por dos, cuatro, por ciento sesenta y dos y me da ese seis cuarenta y Ocho, ¿El cuatro me serviría? …

De la interacción de Jenny con los estudiantes, aflora el aspecto crítico que hace patente en la ejemplificación de los radicales no exactos. Esto se observa en el mecanismo de dividir iteradamente por 2 hasta llegar a una expresión irreducible (KoT-procedimientos). En este caso, identificamos dos dimensiones de variación posible, el factor “a” y el “b” en la cantidad subradical. En el caso de la selección de esta secuencia de ejemplos, donde aparecen aspectos de variación, Jenny centra la atención del estudiante en lo que varía, que es el factor , manteniendo invariante el factor $a = 2$.

En estos dos últimos ejemplos de la secuencia el aspecto invariante no es directo como en los dos primeros ejemplos ($\sqrt{(2 \bullet 4)}$ y $\sqrt{(2 \bullet 9)}$) donde 4 y 9 son cuadrados perfectos. En los ejemplos de y al descomponer como producto no resulta un factor que sea cuadrado perfecto de manera directa, lo que lleva a Jenny a seguir dividiendo por dos. Para $\sqrt{76} = \sqrt{(2 \bullet 38)}$ y luego $\sqrt{(2 \bullet 2 \bullet 38)} = \sqrt{(4 \bullet 19)}$ siendo $2 \bullet 2 = 2^2$ el aspecto crítico invariante, y para $\sqrt{648} = \sqrt{(2^3 \bullet 81)}$ evidenciándose el aspecto invariante.

Aun cuando Jenny no mostró evidencias de conocimiento explícito sobre teorías de aprendizaje (teoría de la variación), moviliza, controladamente, las dimensiones de variación posibles para que los estudiantes experimenten y centren la atención en un aspecto crítico y no en todos a la vez.

La Tabla 1 muestra una síntesis de conocimientos de Jenny en relación con el tema de la descomposición de radicales, como parte de la resolución de las ecuaciones cuadráticas.

Tabla 1. Indicadores de conocimiento movilizado por Jenny.

Dominio	Sub/ dominio	Categoría/indicador que Jenny conoce/sabe
MK	KoT	**Definiciones, propiedades y sus fundamentos.** Conoce la propiedad de la descomposición de radicales de índice par dos $\sqrt{(a \bullet b^2)} = \sqrt{a} \bullet \sqrt{(b^2)} = b \bullet \sqrt{a}$ $(a \geq 0)$. **Procedimientos**. Sabe los procedimientos habituales para descomponer un radical a una expresión irreducible.
PCK	KMT	**Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos**. Conoce secuencias de ejemplos adecuados para mostrar la descomposición de radicales y profundizar en la comprensión del procedimiento. **Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos**. Sabe que una estrategia de enseñanza en seleccionar una secuencia de ejemplos de manera gradual en complejidad. *Teorías de enseñanza. Podría conocer la teoría de registros de representación semiótica para mostrar diferentes formas de representar los radicales al descomponerlos.* **Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos**. Sabe que una estrategia de enseñanza es el ensayo y error en la descomposición de radicales.
	KFLM	**Fortalezas y dificultades**. Conoce posibles dificultades que tienen los estudiantes al descomponer radicales. **Formas de interacción con un contenido matemático**. Conoce la forma en que los estudiantes proceden en relación con el objeto matemático, graduando la secuencia de ejemplos. *Teorías de aprendizaje. Podría conocer elementos de la teoría de la variación en el aprendizaje de los estudiantes, dado que moviliza aspectos críticos de esta teoría.*
	KMLS	*Secuenciación con temas anteriores. Conocería los contenidos de cursos previos para la enseñanza de la descomposición de radicales.* **Nivel de desarrollo conceptual y procedimental esperado**. Sabe que curricularmente la descomposición de radicales es un contenido del nivel de enseñanza que sirve de base para la resolución de ecuaciones cuadráticas.

Fuente: Elaboración propia.

5. CONCLUSIONES

A partir del uso de secuencias de ejemplos intencionadamente seleccionados, se observa que se manifiestan conocimientos especializados en el dominio del conocimiento matemático y didáctico del contenido. La secuencia de ejemplos que utiliza la profesora permite que afloren aspectos críticos (Kullberg et al., 2017) en la enseñanza de la descomposición de radicales, permitiendo que los estudiantes centren su atención en aspectos particulares (variación) en medio de aquellos que son invariantes. Además de esto, se observa que en la selección consciente de ejemplos que realiza la profesora, ella considera aspectos del aprendizaje de los estudiantes (niveles de complejidad). Esta consideración le permite seleccionar ejemplos, centrándose en el aspecto crítico, que es la división de la cantidad subradical por dos.

Tanto en la selección como en el uso de los ejemplos de la secuencia, la profesora manifiesta, en mayor medida, conocimiento sobre estrategias, técnicas, tareas y ejemplos (KMT), formas de interacción con el contenido matemático y fortalezas y dificultades (KFLM). Esto parece estar en concordancia con el conocimiento curricular de la profesora sobre los contenidos previos (KMLS). Estos conocimientos dan cuenta de su conocimiento sobre los temas, especialmente en cuanto a procedimientos y propiedades.

Es importante resaltar la fuerza que se da entre la selección intencionada y deliberada de ejemplos (consciencia), cuando es claro lo que se quiere ejemplificar (la descomposición por dos), y el conocimiento didáctico del contenido que es movilizado y cómo nutre al conocimiento matemático para la enseñanza. Aun cuando este trabajo aporta en la línea del MTSK y la ejemplificación, creemos que se debe enfocar este trabajo en la formación de profesores, en la misma línea de desarrollo que proponen Adler & Pournara (2020), como también, abrir espacios de desarrollo para el formador de profesores.

DECLARACIONES DE CONTRIBUCIONES DE LAS PERSONAS AUTORAS

NSA, LSG y LCC concibieron la idea presentada en contexto de una investigación de mayor alcance sobre conocimiento especializado del profesor de matemáticas y ejemplificación. NSA, CS, GEV, LCC y LSG realizaron ajustes en la metodología y el análisis de datos. Todos los autores participaron activamente en la discusión de los resultados, revisaron y aprobaron el trabajo.

DECLARACIÓN DE DISPONIBILIDAD DE DATOS

Los datos de la investigación aquí presentada, y que respaldan los resultados y las conclusiones estarán disponibles por NSA, enviando la petición respectiva.

AGRADECIMIENTOS

Esta investigación se ha realizado con el apoyo del programa de formación pedagógica en matemática y Estadística de la Facultad de Educación, dependiente de la Universidad Central de Chile, Santiago, Chile.

The Spanish Government (RTI2018-096547-B-I00) (MECD) and the Research Centre COIDESO (University of Huelva, Spain) supported this research.

Este trabajo se ha desarrollado en el marco de los proyectos RTI2018-096547-B-I00 y PID2021-122180OB-I00 del Ministerio de Ciencia, Innovación y Universidades del Gobierno de España, del centro de investigación COIDESO, del grupo de Investigación DESYM (HUM168), y de la Red MTSK, auspiciada por la AUIP.

5. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Adler, J., & Pournara, C. (2020). Exemplifying with variation and its development in mathematics teacher education. En D. Potari & O. Chapman (Eds.), *International handbook of mathematics teacher education: volume 1. Knowledge, beliefs, and identity in mathematics teaching and teaching development*. (pp. 329–353). Sense.

Ball, D.L., Thames, M.H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389-407.

Barrera-Mora, F., & Reyes-Rodríguez, A. (2010). Raíces cuadradas y uso de tecnología en el aprendizaje de matemáticas. En *Memorias del XIII Coloquio para la Enseñanza de las Matemáticas Alfonso Nápoles Gándara* (pp. 1–5). Pachuca, México.

Bassey, M. (1999). *Case study research in educational settings*. Buckingham: Open University Press.

Bills, L., Dreyfus, T., Mason, J., Tsamir, P., Watson, A., & Zaslavsky, O. (2006). Exemplification in Mathematics Education. En J. Novotna, H. Moraová, M. Krátká, & N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Volume 1, pp. 126-154). Prague, Czech Republic: PME.

Bills, L., & Watson, A. (2008). Editorial introduction, Editorial, Educational Studies in Mathematics, pp. 77-79. Recuperado de: http://search.ebscohost.com/login.aspx?

Cayo, H., Codes, M., & Contreras, L. C. (2024). A mathematics teacher's specialized knowledge in the selection and deployment of examples for teaching sequences. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *55*(3), 784-803.

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L.C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M. y Muñoz-Catalán, M.C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model, *Research in Mathematics Education*. DOI: 10.1080/14794802.2018.1479981

Chick, H., & Harris, K. (2007, November 25–28). Pedagogical content knowledge and the use of examples for teaching ratio In *Proceedings of the 2007 AARE International Educational Research Conference* (Vol. 1, pp. 1-15). Fremantle, Australia. https://www.aare.edu.au/data/publications/2007/chi07286.pdf

Creswell, J. W. (2007). *Qualitative Inquiry and Research Design. Choosing among Five Traditions*. Thousand Oaks, California, Sage.

Dorio, I., Sabariego., y Massot, I. (2004). Características generales de la Metodología Cualitativa. En A. R. Bisquerra (Coord.), *Metodología de la investigación educativa* (pp. 329-365). Colección Manuales de Metodología de Investigación Educativa. Madrid: La Muralla.

Figueiredo, C. (2010). *Los ejemplos en clase de matemáticas de secundaria como referente del conocimiento profesional*. (Tesis Doctoral). Universidad de Extremadura, España.

Figueiredo, C.A., Contreras, L.C., y Blanco, L.J. (2009). A transparência e a variação dos exemplos utilizados na aprendizagem de conceitos matemáticos. *ZETETIKÉ*, 17(32), 29-60.

Figueiredo, C., y Contreras, L.C. (2013). A função quadrática: variação, transparencia e duas tipologías de ejemplos. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *3*, 45-68.

Figueredo, C., & Contreras, L. C. (2015). Ejemplos y ejemplificación en el aula de matemáticas. In L. Blanco, J. Cárdenas, & A. Caballero (Eds.), *La resolución de problemas de matemáticas en la formación inicial de* *profesores de Primaria* (pp. 209–224). Servicio de Publicaciones de la Universidad de Extremadura. http://hdl.handle.net/11162/174225

Flick, U. (2007). *Introducción a la investigación cualitativa*. Ediciones Morata.

Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Montes, M., Aguilar, Á., & Carrillo, J. (2014). Nuestra modelación del conocimiento especializado del profesor de matemáticas, el MTSK. En J. Carrillo, N. Climent, L.C. Contreras, M. Montes, D. Escudero-Ávila, & E. Flores-Medrano (Eds.), *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de Matemáticas*. Huelva, España: Universidad de Huelva Publicaciones.

García, S., Borjón, E., Calvillo, N. J., & Torres, M. (2022). Enseñanza-aprendizaje de la raíz cuadrada con uso de geometría en el nivel bachillerato. *Educación matemática*, *34*(3), 352-371. https://doi.org/10.24844/em3403.13

Gómez, B. (2011). El análisis de manuales y la identificación de problemas de investigación en Didáctica de las Matemáticas. *PNA*, *5*(2), 49-65.

Johnson, H.L., Blume, G.W., Shimizu, J.K., Graysay, D. y Konnova, S. (2014) A teacher's conception of definition and use of examples when doing and teaching mathematics. *Mathematical Thinking and Learning*, *16*(4), 285-311.

Krippendorff, K. (1990). *Metodología de análisis de contenido*. Teoría y práctica. Paidós.

Kvale, S. (2011). *Las entrevistas en investigación cualitativa*. Madrid: Ediciones Morata.

Kullberg, A., Runesson, K. & Marton, F. (2017). What is made possible to learn when using the variation theory of learning in teaching mathematics? *ZDM Mathematics Education*, *49*, 559–569. DOI 10.1007/s11858-017-0858-4

Loughran, J., Mulhall, P., & Berry, A. (2008). Exploring pedagogical content knowledge in science teacher education. *International Journal of Science Education*, *30*(10), 1301–1320. doi: 10.1080/09500690802187009

Marton, F., y Booth, S. (1997). *Learning and Awareness*. Hillsdale, USA: Lawrence Erlbaum.

Marton, F. (2009). *Sameness and difference in learning*. Lecture at the Swedish Research Links Symposium on Phenomenography and Variation Theory, University of Hong Kong, Hong Kong SAR, 1-3 December.

Marton, F., & Pang, M. F. (2006). On some necessary conditions of learning. *Journal of the Learning Science*s, 15(2), 193–220.

Marton, F., y Tsui, A. B. M. (2004). *Classroom discourse and the space of learning*. Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates.

MINEDUC. (2015). *Bases Curriculares 7º básico a 2º medio*. Unidad de Currículum y Evaluación, Santiago, Chile.

NCTM. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston.

Pang, M. F., Marton, F., Bao, J. S., & Ki, W. W. (2016). Teaching to add three-digit numbers in Kong Kong and Shanghai: an illustration of differences in the systematic use of variation and invariance. *ZDM Mathematics Education*, *48*(4) (this issue). doi:10.1007/s11858-016-0790-z

Sánchez-Acevedo, N., Sosa, L., y Contreras, L. C. (2024). Conocimiento especializado del profesor de Matemáticas evidenciado en la selección y uso de ejemplos en la enseñanza de la ecuación cuadrática. *Bolema*, *38*, e220140 https://doi.org/10.1590/1980-4415v38a220140

Sánchez-Acevedo, N., Sosa, L. y Contreras, L. C. (2023). Posibles relaciones entre el conocimiento especializado del profesor de matemáticas con la ejemplificación. En R. Delgado-Rebolledo y D. Zakaryan (Eds.), *Actas del VI Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (pp. 256-263). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Sánchez-Acevedo, N., Segura, C., Contreras, L. C. y Sosa, L. (2024). Relaciones entre conocimiento especializado de las características del aprendizaje y de la enseñanza de las matemáticas a partir del uso de ejemplos transparentes en la ecuación cuadrática. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (pp. 481-488). SEIEM.

Schoenfeld, A. (2010). *How we think*. New York: Routledge.

Stake, R.E. (1999). *Investigación con estudio de casos*. Madrid: Ediciones Morata, S.L.

Tatto, M.T., Schwille, J., Senk, S.L., Ingvarson, L., Peck, R., & Rowley, G. (2008). *Teacher Education and Development Study in Mathematics (TEDS-M): Conceptual Framework*. East Lansing, MI: Teacher Education and Development International Study Center, College of Education, Michigan State University.

Watson, A., & Chick, H. (2011). Qualities of examples in learning and teaching. *ZDM*, *43*(2), 283-294. doi: 10.1007/s11858-010-0301-6

Zaslavsky, O. (2019). There is more to examples than meets the eye: Thinking with and through mathematical examples in different settings. *The Journal of Mathematical Behavior*, *53*(2), 245–255. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.10.001

Zodik, I., y Zaslavsky, O. (2008). Characteristics of teachers' choice of examples in and for the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, *69*, 165–182.