Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática
e-ISSN en línea: 2215-5627
Impresa: ISSN 1659-2573
Vol: 18 • N°. 1 • 2025
277-290
Recibido: 15/10/2024
Aprobado: 25/11/2024
Artículos de investigación

FRACCIONES EN LA RECTA NUMÉRICA. UN EXPERIMENTO DE DISEÑO BASADO EN MODELOS DE LONGITUD

FRACCIONES EN LA RECTA NUMÉRICA. UN EXPERIMENTO DE DISEÑO BASADO EN MODELOS DE LONGITUD

Ivette Anel Delgado Valdez[1]
ORCID iD: https://orcid.org/0009-0006-1514-114X

Luis Manuel Aguayo Rendón[2]
ORCID iD: https://orcid.org/0000-0001-78977223

Lorena Alejandra Medina Hernández[3]
ORCID iD: https://orcid.org/0009-0005-3932-8374

RESUMEN

En este estudio se investigó la viabilidad de un Experimento de Diseño enmarcado en la Educación Matemática Realista con el objetivo de reconocer los objetos mentales que los alumnos desarrollan al trabajar las fracciones en un contexto de longitud, específicamente en la recta numérica. El análisis que aquí se presenta es resultado de una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje, aplicada en alumnos de quinto grado de una escuela en la Ciudad de México, que evidencia resultados favorables para que los estudiantes modifiquen sus esquemas respecto de su pensamiento fraccionario multiplicativo el cual es desarrollado al iterar fracciones unitarias de manera que puedan reconocer cuando una fracción es menor, igual o mayor a la unidad de referencia. Los hallazgos sugieren que el trabajo con la comparación de fracciones en un contexto de medición, específicamente de longitud, resulta una entrada viable para el trabajo con los números racionales y los posteriores saberes matemáticos más complejos, por ejemplo, el álgebra.

Palabras clave: Recta numérica, fracciones, experimento de diseño, pensamiento multiplicativo.

1 Unidad Zacatecas – 321, Universidad Pedagógica Nacional, Guadalupe, Zacatecas, México, C.P.98612. Correo electrónico: ivette.delgado8@hotmail.com

2 Unidad Zacatecas – 321, Universidad Pedagógica Nacional, Guadalupe, Zacatecas, México, C.P.98612. Correo electrónico: laguayo@upn.mx

3 Unidad Zacatecas – 321, Universidad Pedagógica Nacional, Guadalupe, Zacatecas, México, C.P.98612. Correo electrónico: lorealwera@gmail.com

ABSTRACT

This study investigated the feasibility of a Design Experiment framed in Realistic Mathematics Education with the objective of recognizing the mental objects that students develop when working with fractions in a length context, specifically in the number line. The analysis presented here is the result of a Hypothetical Learning Path, applied to fifth grade students in a school in Mexico City, which shows favorable results for students to modify their schemes regarding their multiplicative fractional thinking, which is developed by iterating unit fractions so that they can recognize when a fraction is less than, equal to or greater than the unit of reference. The findings suggest that working with fraction comparison in a measurement context, specifically length, is a viable entry point for work with rational numbers and subsequent more complex mathematical knowledge, e.g., algebra.

Keywords: Number line, fractions, design experiment, multiplicative thinking.

1. INTRODUCCIÓN

Los números racionales, específicamente los fraccionarios, han sido objeto de estudio en las últimas décadas por la relación que tienen con otros conceptos y áreas matemáticas, incluida el álgebra al considerar que las formas de pensar con fracciones son algebráicas (Hackenberg y Lee, 2015). Sin embargo, los estudios que hasta ahora se han elaborado sobre el concepto de fracción coinciden en reconocer que los alumnos experimentan dificultades al trabajar con dicho objeto matemático.

En tanto que la forma en que los estudiantes entienden las fracciones tiene relación con lo que pueden hacer y aprender posteriormente en la escuela, es necesario analizar las dificultades más importantes que se presentan en su aprendizaje.

Se ha encontrado que la comprensión del concepto de fracción no es una tarea sencilla para quienes la aprenden ni para aquellos que intentan enseñarlo, esto derivado de la polisemía que tiene dicho concepto; en una investigación hecha por Fandiño (2005) se pudo reconocer a la fracción como la parte de un todo (en contexto continuo o discreto), cociente, razón, operador, como probabilidad, en los puntajes, medida, punto de una recta, porcentaje, en el lenguaje cotidiano. “De la literatura internacional emerge claramente un primer problema notable, no sólo terminológico sino también matemático” (Fandiño, 2009, p.101), la diversidad de significados que asignamos a la fracción hace aún más difícil su enseñanza; qué y por dónde comenzar.

Es importante señalar que en la Educación Básica en México, como en muchos países de Latinoamérica y el mundo, la interpretación de fracciones más importante es la acuñada por Kieren (1988) en la cual reconoce a estos números como parte de los números racionales que se interpretan a través de diversos significados, a saber: parte-todo, cociente, medida, razón y operador. Es a partir de esta interpretación que encontramos otra de las dificultades presentes en la comprensión de las fracciones, pues al buscar que los alumnos construyan las nociones de todos estos significados, se espera que de alguna manera logren relacionarlos como un *megaconcepto,* lo que se considera como verdadero desafío para los docentes.

Usualmente el primer acercamiento de los alumnos con las fracciones se da mediante el significado parte-todo, en situaciones donde un todo se divide en partes iguales de las cuales se toma una o varias de esas partes, las situaciones más frecuentes tienen que ver con un pastel o una pizza divididos en rebanadas iguales (Cortina, 2014; Melquiades-Martínez et al., 2022). Freudenthal (1983) considera que la fracción como fracturador es algo convincente y de fascinante concreción, pero también que es fenomenológicamente muy restringido porque tiene pocos fenómenos o situaciones en los que se puede utilizar y, aunque esta condición brinda una cierta sencillez para comprender el origen de la fracción, termina siendo una limitante para que pueda construir otras nociones ligadas a este objeto matemático, “es razonable que la equipartición oriente a los estudiantes a entender las fracciones en formas que dificultan el desarrollo de concepciones maduras de los números racionales” (Cortina et al., 2013, p. 7).

En la idea de tantos de tantos como se explicó anteriormente, la fracción está concebida obligatoriamente dentro de un entero, esto implica que la fracción se comprenda como algo menor o igual a la unidad (m veces 1/ únicamente ≤ 1). Esto no resulta un problema mientras se interprete 3/7, pero cuando se involucran números fraccionarios como 7/3 no se le encuentra sentido a tomar siete cosas de tres (Thompson y Saldanha, 2003). En su mayoría los alumnos comprenden las fracciones propias pero no tienen los mismos resultados al reflexionar en torno a las fracciones impropias; porque resulta incomprensible tomar más partes de las que tiene el entero.

No obstante las dificultades que genera las formas que predominan en la enseñanza de las fracciones están vinculadas a las ideas de parte-todo en contextos continuos (con modelos de área); esta forma de ir generando representaciones en los alumnos provoca que las interpreten a través de esquemas sumativos, “pensar en 1/*n* como ´una de *n* partes´es pensar en fracciones aditivamente” (Thompson y Saldanha, 2003, p.24); esto implica que el primer *tantos* debe estar incluido en el segundo *tantos* y que como resultado no podríamos hablar de una fracción que no tienen nada en común.

La introducción de las fracciones mediante modelos de área, además de las dificultades ya mencionadas, arrastra consigo un obstáculo para comprender y ubicar las fracciones en la recta numérica y reconocer la densidad (números entre dos números) y magnitud (tamaño) de los números racionales. En un estudio hecho por González-Forte y Fernández (2024) encontraron que 25% de alumnos de un quinto grado no sitúan de manera correcta 1/2 dentro de la recta numérica y un 11% de ellos dejan en blanco la consigna al no reconocer cómo hacerlo. Las evidencias de su estudio remarcan la necesidad de trabajar fracciones y números decimales a través de distintas representaciones de un mismo número racional a lo largo de la Educación Primaria y Secundaria.

Así mismo en un estudio realizado por Melquiades-Martínez et al. (2023) se evidenció que más de la mitad de los alumnos en la investigación tienen facilidad para ubicar fracciones propias (entre 0 y 1) mientras que la mayoría muestra dificultades para ubicar las fracciones impropias ya que no son capaces de identificar el intervalo en que se ubica dichas fracciones. En el mismo estudio se reconoce que uno de los errores que se comenten con mayor frecuencia es la no partición congruente de la recta.

En este artículo observamos las dificultades que tienen los alumnos para ubicar los números racionales, e incluso los naturales, dentro de una recta numérica. Partimos del supuesto que estas dificultades son generadas por el tipo de representación visual que utilizan los profesores (áreas) para explicar y resolver problemas con fracciones, respecto de esto Lee (2017) señala la importancia de reconocer las unidades de referencia y sus representaciones como un punto de partida en contextos de medición dando oportunidad de que surjan los esquemas multiplicativos que permiten escribir y resolver ecuaciones a medida de que los estudiantes avancen en el álgebra (Hackendberg y Lee, 2015).

Ahora bien, para resolver las dificultades que genera la enseñanza que inicia con el significado parte-todo y reconociendo las implicaciones a futuro (el tránsito de la aritmética al álgebra) que esto conlleva, entre los años 2006-2008 un equipo de investigadores estructuró un experimento de diseño enmarcado en la Educación Matemática Realista que proporciona heurísticas de diseño para encontrar e interpretar el aprendizaje matemático.

En tanto que la enseñanza de las fracciones es un objeto matemático difícil de concretar en la educación primaria, este equipo diseñó una Teoría de Enseñanza de un Dominio Específico (TEDE) centrada en la idea de número comparador de Freudenthal (1983), el objetivo fue generar herramientas para que el docente desarrolle la enseñanza de las fracciones en el contexto de medida. La TEDE diseñada incluye seis prácticas matemáticas que permitirían al alumno comprender las fracciones unitarias, propias e impropias hasta el punto en que las puedan ubicar dentro de una recta numérica, desde una perspectiva multiplicativa y no aditiva.

En este trabajo se analizan los resultados de la cuarta práctica en la que se pretende que los alumnos identifiquen fracciones que son mayores, menores o iguales a una medida dada a partir de la iteraciones de la unidad de referencia, se pretende que reconozcan por ejemplo que 5/2 es mayor a dos unidades pero menor a tres. Para ello se echa mano de una nueva herramienta, la recta de medición que hace referencia a la recta numérica, específicamente se analiza la manera como las acciones del docente permiten que los alumnos desarrollen razonamientos para reconocer las fracciones impropias más allá de la unidad de referencia.

2. ELEMENTOS TEÓRICOS/ ELEMENTOS CONCEPTUALES/ ELEMENTOS HISTÓRICOS

La Educación Matemática Realista (EMR) es creada por Hans Freudenthal con la idea no de enseñar matemáticas sino de *reinventar las matemáticas* mediante la matematización del mundo real (Cobb, et al., 2008). Proponer un cambio en la manera tradicional de enseñar las matemáticas fue la base de las investigaciones de Freudenthal, con ellas pretendía alejarse de la teoría de los objetivos operacionales, de los test estructurados y de las teorías constructivistas de Piaget.

Desde las ideas de la EMR se asume que la escuela invierte el orden natural del trabajo matemático, esto es olvida que los matemáticos parten de problemas para encontrar una solución, por ello la escuela debería recrear la actividad del matemático y en el aula *jugar a ser matemáticos*, en ese sentido Freudenthal (1983) acuña el concepto de fenomenología didáctica para subrayar que el material que los estudiantes matematizan debería ser real para ellos, ya sea tangible o imaginable.

La fenomenología didáctica es la base para el desarrollo de una Educación Matemática Realista que busca alejarse de la idea de que para adquirir cierto contenido se debe partir de su enseñanza abstracta y posteriormente aplicarlo, por ejemplo para enseñar la longitud se piensa que primero debe inculcarse el concepto de longitud y posteriormente ver su aplicabilidad en múltiples ejercicios. La fenomenología didáctica postula un enfoque diferente, propone "empezar por observar los fenómenos que solicitan ser organizados y, desde ese punto de partida, enseñar al estudiante a manipular esos medios de organización (Freudenthal H. , 1983).

El objetivo de una investigación fenomenológica didáctica es encontrar situaciones problema a partir de las cuales se puedan generalizar situaciones para abordar la enseñanza de un determinado objeto matemático y encontrar situaciones que puedan evocar procedimientos paradigmáticos de solución como base para la matematización. En este sentido Gravemeijer (2000) señala que las matemáticas deben ser enseñadas como un proceso de matematización, como una forma de organizar la realidad y la disciplina matemática, se trata de hacer más matemáticamente pues "la matemática como actividad humana es una actividad de resolución de problemas, de ver los problemas, pero es también una actividad de organización de una disciplina" (Gravemeijer, 2000, p.3). Desde esta perspectiva debe tratarse a la propia actividad matemática como materia prima para una reflexión en la que se incluyen no sólo temas de la realidad, sino también temas matemáticos. Siguiendo el sentido de esta idea la pregunta es ¿cómo estructurar una educación matemática en la que convergen la realidad y la matemática misma?

De acuerdo con Freudenthal (1983), la respuesta se encuentra en la amalgama que forman la reinvención guiada, la matematización progresiva (Treffers, 1987), los niveles de aprendizaje (Van Hiele) y la fenomenología didáctica (Freudenthal, 1983), estas ideas sustentan esta corriente didáctica y a partir de ellas nacen los principios de la EMR.

Principios de la EMR

Para comprender mejor el sentido de la Educación Matemática Realista en el marco del proceso de enseñanza y aprendizaje, Bressan et al. (2004) mencionan los principios sobre los cuales se fundamenta esta teoría, a saber:

Principio de actividad. La matemática se considera una actividad humana que se aprende haciéndola y lo fundamental no es aprender algoritmos, sino el proceso de algoritmización; no es aprender álgebra, sino la actividad de algebrizar; no es aprender las abstracciones sino la acción de abstraer (Freudenthal, 1991).

Principio de Realidad. Matematizar significa organizar la realidad para comprenderla, la realidad significa que las matemáticas deben ser realizables, imaginables y razonables, sobre ello señala Freudenthal, "…yo prefiero aplicar el término realidad a lo que la experiencia del sentido común toma como real en cierto escenario" (Freudenthal, 1991, p. 17).

Principio de Reinvención. La reinvención es un proceso en el que el conocimiento matemático formal puede ser reconstruido para generar uno nuevo.

Principio de Niveles. La matematización sobre la realidad y sobre la actividad matemática es progresiva (Treffers, 1987), va del conocimiento informal, al preformal y luego al formal. En este proceso los alumnos pasan por distintos niveles de comprensión.

Principio de Interacción. Las matemáticas son una actividad social y por ello los estudiantes deben tener la oportunidad de mostrar sus estrategias e invenciones a otros (Santamaría, 2006).

Principio de Interconexión (estructuración). Existe una interrelación entre los contenidos matemáticos de varios ejes curriculares, por ello no pueden ser tratados como entidades separadas, esta interrelación debe ser tomada en cuenta, los contenidos de diversos ejes de aprendizaje deben entrelazarse en las situaciones problemáticas (Santamaría, 2006).

Estos principios ayudan al profesor a orientar su práctica pero también permiten analizar las acciones que se despliegan en el aula y comprender la manera como los alumnos matematizan los objetos matemáticos y el papel del docente para que ello se se logre.

3. ABORDAJE METODOLÓGICO

Esta investigación tiene como base la metodología del *Experimento de diseño* que nace bajo la influencia de Cobb, Confrey, DiSessa, Lehrer y Schauble (2003), el tipo de estudio más frecuente en este marco son los experimentos de enseñanza en los que participa un investigador-docente, alumnos e investigadores-observadores (Steffe y Thompson, 2000).

El experimento de enseñanza es una metodología de aprendizaje instruccional para investigar la relación entre la teoría educativa, los artefactos diseñados y la práctica en la que se pone a prueba una Teoría Hipotética de Aprendizaje para promover el aprendizaje de los estudiantes y una Teoría Conjeturada de Aprendizaje para definir lo que debe hacer el docente para alcanzar los objetivos de aprendizaje (Luna y Aguayo, 2021). Es importante resaltar que el análisis de un experimento de enseñanza no es un proceso que tenga fin, es un ciclo donde la planeación, ejecución y análisis dan lugar a un rediseño que puede ser tomado en cuenta para futuras investigaciones con diversas variables, las recurrentes puestas a prueba y sus correspondientes análisis, generarán una Teoría de Enseñanza de un Dominio Específico (TEDE) que incluye los objetivos del experimento de enseñanza y los medios didácticos para procurarse.

El experimento que aquí se analiza propone una TEDE para la enseñanza de la fracción como medida, se puso a prueba en la escuela primaria «República de Tanzania» del municipio de Iztacalco, Cd. de México, en un quinto grado con 31 alumnos (16 mujeres y 15 hombres). La TEDE consta de seis prácticas matemáticas (ver Tabla 1) que se trabajaron en 26 clases de 90 minutos, cada sesión se videograbó, se transcribió y se analizó. Aquí se presenta el análisis de la cuarta práctica, cuyo objetivo era lograr que los alumnos ubicaran fracciones en una recta numérica.

Tabla 1. TEDE para el trabajo con fracciones.

Práctica	Herramientas
1. Se interpreta un número entero como medida, que da cuenta de la acumulación de la longitud de una unidad. *Comprender la medición como la iteración de una unidad*.	*Tije*, tiras de papel, tijeras
2. Se reconoce y compara el tamaño relativo de una subunidad de medida. *Comparar fracciones unitarias*	*Tije*, cilindros de papel, tijeras
3. Se interpretan las fracciones como medidas que resultan de iterar una subunidad de medida, se comparan fracciones con la unidad. *Determinar cuándo una fracción es mayor, menor o igual que la unidad*	*Tije*, cilindros de papel, tiras de papel, tijeras
4. Se interpretan las fracciones como medidas que pueden ser menores, mayores o iguales a medidas realizadas iterando la unidad. *Determinar cuándo una fracción es mayor, menor o igual a la iteración de la unidad dos o más veces*	*Tije*, cilindros de papel, tiras de papel, tijeras, recta numérica
5. Se interpretan las fracciones como medidas susceptibles de producir otras medidas al ser iteradas cierto número de veces. *Multiplicar una fracción por un número entero*	Recta numérica
6. Se interpretan las fracciones como medidas de longitud menores, iguales o mayores a un medio. *Establecer igualdades y desigualdades con un medio*	Recta numérica

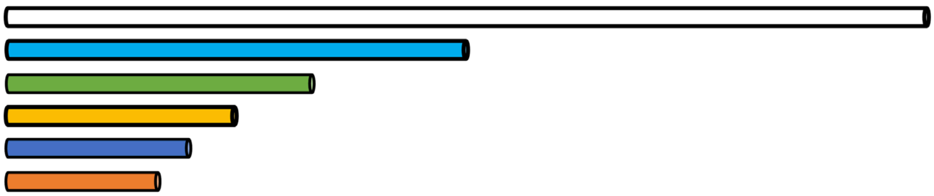
Fuente: Descripción de objetivos y herramientas dentro de la TEDE. Fuente: elaboración propia.

En la presente investigación se analizan los resultados encontrados en la práctica cuatro, los cuales son resultado de un trabajo previamente abordado con los alumnos, que se realizó para re-estructurar los esquemas sumativos en torno a las fracciones y complementarlos con esquemas multiplicativos, en donde "el nuevo esquema puede considerarse como una reorganización del esquema anterior" (Steffe, 2002, p. 1) para permitir comprender el objeto fracción como algo que puede ser iterado x veces, aun más allá de la unidad de referencia, además de comprender cómo las representaciones lineales (recta numérica) apoyan el razonamiento fraccionario multiplicativo necesario para avanzar en matemáticas más complejas.

El significado de la fracción como *punto en la recta numérica* (Fandiño, 2009) emerge en la actividad cuando el estudiante identifica entre qué números naturales consecutivos se ubica la fracción, además esta actividad contribuye a la comprensión de una partición congruente de la misma recta y puede ayudar a los alumnos a representar y resolver problemas de aplicación. Dentro de los resultados se muestra que el uso de la TEDE descrita anteriormente favorece estos aspectos y permite al alumno operar con la recta numérica con mayor facilidad respetando las peculiaridades de la ejecución de las consignas.

En correspondencia con el principio de realidad de la EMR, todas las prácticas se contextualizan en una una narrativa que cuenta la historia de un pueblo antiguo (los Ajacay) que requerían realizar mediciones para fabricar sus productos, para ello utilizan como unidad de referencia, la vara de Kía o *Tije* (de aproximadamente 24 cm de largo) y como subunidades al *pequeño* de a dos (1/2), *pequeño* de a tres (1/3), *pequeño* de a cuatro ¼) (ver Figura 1).

Figura 1. El Tije y los pequeños de 2, 3, 4, 5 y 6



Fuente: Elaboración propia.

Nota. El Tije está en blanco. El pequeño de a dos (azul) mide 1/2 del Tije y necesita iterarse dos veces para ser igual que él. El pequeño de tres (verde) mide 1/3 del Tije y necesita iterarse tres veces para ser igual que él. Fuente. Cortina, (2014).

El objetivo de las tres prácticas matemáticas era permitir que los alumnos crearan objetos mentales en torno a la unidad de referencia (Tije), nociones de fracciones unitarias (pequeños) y objetos mentales para la interpretación de fracciones unitarias e impropias; esto bajo los esquemas multiplicativos a través de la iteración.

4. RESULTADOS/DISCUSIONES

En la cuarta práctica matemática se pretendía que el docente ayudara al alumno a comprender la relación entre la unidad, las partes y el todo dentro de una recta numérica y así poder comparar fracciones y determinar su tamaño relativo sin dejar de reconocer que la unidad, las partes y el todo son independientes unos de los otros, lo cual permite su comparación.

Para lograr el objetivo de esta práctica el docente involucra a los alumnos en el uso de la recta numérica, entendida como un segmento dividido en partes iguales donde el todo es la recta y cada segmento es una unidad, lo que la convierte en algo definido, continuo y con estructura lineal que permite la reflexión más allá de la clásica equipartición del pastel (área) (Valenzuela et al., 2016). En este caso el docente busca la creación de la recta a partir de la iteración del *Tije* para que los alumnos reconozcan que al igual que las subunidades (*pequeños*), la unidad también se puede iterar sin restricciones. Al trabajar con la recta numérica uno de los aspectos fundamentales es que se reconozca una partición congruente a partir del reconocimiento de la unidad de referencia.

Al respecto Lee (2017) identifica estas unidades de referencia como uno de los componentes más importantes del razonamiento fraccionario al considerar que “una unidad es una estandar para la medición, que podría ser un todo o una parte…las unidades de referencia son unidades que se necesitan cuando los números están incluidos en el problema” (p.329); para ello es indispensable la construcción de la recta numérica a partir del reconocimiento de una unidad de referencia.

Advertir las bondades de usar la recta numérica en el experimento de enseñanza obliga al docente a buscar la manera de crear esta herramienta sin que parezca arbitraria ya que como lo menciona Cobb (2003), hay que generar escenarios que permitan identificar la necesidad de utilizarla para resolver las problemáticas que se proponen. Para instaurar la recta como herramienta, en el siguiente fragmento se puede observar que el maestro parte de cierta problemática. Cabe aclarar que en todos los fragmentos se utilizan nombres ficticios para los alumnos.

> ***Maestro:*** *¡Imagínense!, imagínense que fuéramos a hacer tiras para todo el quinto “A” y cada quien hiciera su traje con cincuenta tiras (señala al pizarrón), que midieran así, ¿cuánto nos tardaríamos haciéndolo?*
>
> ***Alumnos:*** *Uuuuy ... Como medio año ... Como tres meses.*
>
> ***Maestro:*** *¿Se les ocurre alguna forma en la que lo podrían hacer más rápido sin tener que medir cada una?*
>
> ***Ana Corina:*** *primero ponemos una tira y después la repetimos.*

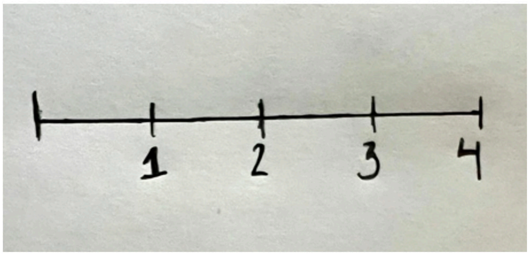
En este momento, la reinvención guiada en tanto principio de la EMR, juega un papel importante en la clase, pues el docente tendrá que guiar a los alumnos hacia la idea de recta numérica para que la utilicen sin que esa actividad se descontextualice de la realidad de los *acajays*. Es importante recordar que este tipo de actos del maestro ayudan al desarrollo de la TEDE porque brindan al alumno herramientas útiles para participar en el proceso de matematización, es decir para comparar las medidas con la unidad de referencia y la fracción con unidad iterada, es decir 2 o 3 varas (Bressan et al., 2016).

Como se puede observar en el siguiente fragmento, en la conversación colectiva (principio de interacción) el maestro utiliza las aportaciones de los alumnos para marcar la segmentación en la recta numérica, lo que servirá de herramienta para comparar fracciones en las que se iteraron dos o más unidades, “ya que los números en la recta numérica vacía comenzarían para derivar su significado en un marco de relaciones numéricas para los estudiantes” (Gravemeijer et al., 2003, p. 59); es por eso que en ese momento de la clase el docente ve la necesidad de recordar lo qué significa cada una de las marcas y pide al alumno que esgrima una justificación.

> ***Maestro:*** *A ver, explícanos Esteban, ¿cómo se usaría la recta de medición entonces?*

***Esteban:** (Señalando cada división de la recta). Aquí sería un Tije, aquí dos, aquí tres y aquí cuatro.*

Figura 2. La recta segmentada.



Fuente: Elaboración propia basada en el trabajo de los niños.

La actividad que ha guiado el maestro permite que los alumnos reconozcan cada uno de los segmentos como unidades contiguas (*Tijes*) que componen un todo (la recta), lo cual hace de la recta una herramienta ideal para la comparación de fracciones, incluso aquellas mayores a la unidad de referencia. Sobre el respecto, Steffe (2002) señala que utilizar la recta para identificar la iteración de unidades y subunidades resulta un buen elemento que facilita la enseñanza y la comprensión de longitudes.

Aunado a esto, la creación de la recta numérica permite al alumno identificar la importancia de las unidades de referencia y sus representaciones "porque el uso de la longitud (a diferencia del área) exige una atención más explícita a la coordinación y distribución de las unidades" (Lee, 2017, p.233). Con este tipo de prácticas se prevé que los estudiantes identifiquen la congruencia en la segmentación de la recta como una condición indispensable de ésta, además de abonar a su esquema multiplicativo a partir de la iteración de la unidad de referencia.

Siguiendo el sentido de la matematización que los alumnos han desarrollado en torno a la iteración de las fracciones para su ubicación sobre la recta, el docente propone señalar la posición de dos fracciones 5/2 y 15/4. Los resultados y los argumentos de los alumnos nos permiten advertir el logro de los objetivos de la práctica.

En un primer momento, en la argumentación de los alumnos describen una forma de solución que da cuenta de su conocimiento acerca de los esquemas multiplicativos fraccionarios, Thompson y Saldanha (2003) mencionan que es necesario que los alumnos consideren a la fracción con propiedades multiplicativas y no sumativas, pues la fracción tiene sus raíces en las nociones proporcionales que implican x número de veces la unidad, en este caso los *pequeños*. Este conocimiento se hizo evidente en los alumnos desde las primeras sesiones, cuando comprendieron que podían iterar la subunidad tantas veces fuera necesario, incluso más allá de la unidad de referencia.

***Ana:** (Está frente al pizarrón y empieza a explicar).*

***Maestro:** A ver Ana ¿qué hizo?*

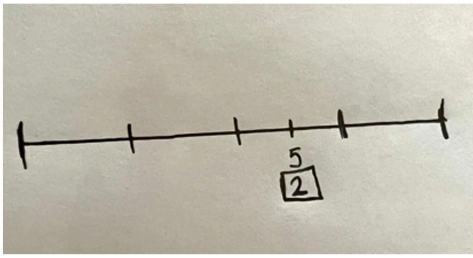
***Ana:** Fui contando.*

Maestro: *¿Fuiste contando?, ¿desde dónde?*

Ana: *(Indica en el pizarrón desde dónde contó).*

Maestro: *¿Desde aquí?, ¿hasta dónde contaste?, uno, dos, tres, cuatro y cinco. A ver (comienza a hacer marcas en el pizarrón)¿cómo le iría contando?, hasta aquí, ¿cuánto habría sido?*

Figura 3. Ubicación de 5/2 en la recta.



Fuente: Elaboraciones de los niños.

Como se puede observar, Ana ubica correctamente en la recta a 5/2 porque reconoce que para lograrlo es necesario iterar cinco veces el *pequeño* de dos, para cumplir dicho objetivo hubo de utilizar los pequeños de manera física; en primer lugar advertirmos que identifica que el tamaño del pequeño necesario (toma el que equivale a 1/2) y reconoce que debe iterarlo cinco veces (como lo indica el numerador), sin embargo no emplea un discurso que nos permita considerar que ha creado un objeto mental sólido antes la situación planteada.

Cuando se reconoce la importancia de las conversaciones colectivas (principio de interacción) en el desarrollo de la TEDE se busca que a partir de la participación de todos los alumnos de la clase, la respuesta de un alumno a determinada tarea permita evocar en los otros las nociones que sobre el inverso multiplicativo han desarrollado y la manera como este saber les ayuda a ubicar la fracción dada dentro de la recta:

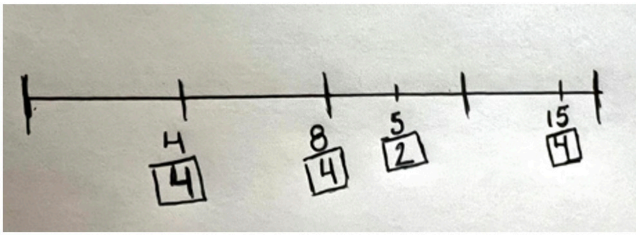
Donatello: *Porque dos veces el pequeño de a dos es un Tije y yo lo hice igual que Jacinto. En un Tije ya eran dos, aquí también dos y aquí nomas uno (señalando la recta).*

Donatello expresa la relación que existe entre el tamaño del *pequeño* de a dos con el *Tije* al reconocer la relación recíproca de tamaño relativo, es decir identifica las fracciones unitarias como resultado de multiplicar la subunidad por un número entero, por ejemplo en la narrativa de los *acajay* un *Tije* es dos veces el *pequeño* de a dos que es la mitad de un *Tije* (1/2). Por esta razón puede determinar que en dos *Tijes* se ha iterado cuatro veces el *pequeño* de a dos (4/2) y que para alcanzar la medida solicitada (5/2) sólo hace falta una iteración más, de esta manera puede reconocer la ubicación de 5/2 y comprender que esta fracción es mayor que dos unidades pero menor que tres. Con esta actividad la intención es que los alumnos puedan conceptualizar la medida en términos multiplicativos (al iterar) y matematicen esas ideas con la noción del tamaño relativo (Thompson y Saldanha, 2003) para interpretar una fracción impropia de forma natural.

Cuando se ubican fracciones en la recta numérica se puede comprender que es posible ubicar más de una fracción en un mismo segmento e incluso en un mismo punto (fracciones equivalentes), esta comprensión, que puede lograrse con el trabajo de esta TEDE, posibilita que los alumnos identifiquen intervalos en la recta que son longitudes iguales, es decir la unidad de referencia es congruente y provoca la reflexión de dicha partición; los argumentos de los alumnos dan cuenta de la importancia de trabajar con las fracciones desde un esquema multiplicativo, el cual otorga sentido a las representaciones a través de los modelos de longitud, tales como la recta.

> ***Maestro:*** *Vamos a oír a Lupita, voz bien fuerte*
>
> ***Lupita:*** *(Señalando división por división) Aquí son cuatro, aquí tenemos otros cuatro, son ocho...*
>
> ***Maestro:*** *Ajá.*
>
> ***Lupita:*** *Si le sumas estos cuatro, son doce.*
>
> ***Maestro:*** *Ajá.*
>
> ***Lupita:*** *No sé*
>
> ***Maestro:*** *¿Y de ahí qué hacemos? Ahí llevamos doce, ¿podemos contar tres más? (comienza a medir con un Tije, sobre la recta), ¿podemos medir tres más? (sigue marcando las divisiones en la recta) Uno, dos, tres... Ok, ¿quién más lo hizo como Lupita?*

Figura 4. Las iteraciones de ¼ en la recta.



Fuente. Elaboraciones de los niños.

A pesar de que Lupita establece que 12/4 es una longitud igual a tres *Tijes* (unidades iteradas) reconoce que para llegar al punto solicitado no debe hacerse una iteración más, puesto que sobrepasará la fracción solicitada, es decir reconoce que 15/4 es mayor a tres unidades pero menor a cuatro.

Con lo anterior se evidencia la importancia que los alumnos vean a la fracción como un número que es capaz de cuantificar y que, a la par, puede ser menor, igual o mayor que la unidad de referencia; las explicaciones que los alumnos brindan al momento de justificar cómo determinan la ubicación de la fracción en la recta nos da un panorama muy preciso de lo que los alumnos han logrado aprender y de los objetos mentales que han llegado a desarrollar.

Así mismo, se puede observar que los saberes sobre la fracción como medida, previamente reinventados, les sirven para ubicar números fraccionarios en la recta y reconocer cada segmento como una unidad que, dependiendo de la fracción trabajada, guarda relación como inverso multiplicativo, es decir el alumno es capaz de reconocer que cuatro veces el *pequeño* de a cuatro es la misma medida que un *Tije* y por la iteración considera natural, que una fracción pueda ser mayor a la unidad, es por eso que Lupita puede expresar que en un *Tije* hay cuatro *pequeños*, en dos hay ocho y en tres hay doce, lo cual muestra sus saberes en relación a cada segmento de la recta (unidad) y su capacidad para ubicar a la fracción.

Sobre esta actividad Valenzuela et al., (2017) subrayan las múltiples ventajas de trabajar con la recta y en este caso podemos apreciar que los alumnos perciben de manera sencilla las fracciones impropias puesto que pueden realizar una iteración de unidades y subunidades sin restricciones y además, a través de ésta pueden comparar fracciones por la posición que ocupan en la recta (objetivo planteado en la quinta práctica matemática de la TEDE).

De la misma manera consideramos el uso de la recta numérica como un elemento indispensable en el desarrollo del razonamiento fraccionario (Lee y Hackenberg, 2014; Steffe, 2002), resulta ser una forma viable para abordar las fracciones basándonos en un juicio cuantitativo pues se considera que las fracciones constituyen una cantidad mesurable.

5. CONCLUSIONES/ REFLEXIONES / CONSIDERACIONES FINALES

Este estudió investigó los resultados en la aplicación de un Experimento de Diseño cuyo objetivo permitiría que los educandos mejoraran en torno de su pensamiento fraccionario multiplicativo a partir del trabajo en un contexto de longitud; los resultados obtenidos dan cuenta de la viabilidad de implementar nuestro experimento al observar la manera en que los alumnos se involucran con las prácticas, específicamente la cuarta.

El trabajo con la recta numérica permitió al alumno comparar fracciones, reconocer cuáles son menores, mayores o iguales a la unidad de referencia, también le ha permitido participar en la segmentación de dicha recta numérica a partir del reconocimiento de la unidad de referencia, este último aspecto es detectado como una de las mayores dificultades para los alumnos al trabajar con la recta numérica.

De la misma manera reconocemos que el trabajo con la fracción debe iniciarse dejando de lado los contextos del significado parte-todo y priorizar aquellos donde este objeto matemático pueda concebirse como independiente de la unidad de referencia; en este sentido el experimento que trabajamos basándonos en la Educación Matemática Realista es una oportunidad para considerar a la fracción desde un ángulo diferente con la finalidad de facilitar el trabajo en aspectos más complejos de ésta y con posteriores conceptos matemáticos.

Este estudio es el preámbulo para posteriores investigaciones donde se pueda vincular el pensamiento fraccionario multiplicativo con aspectos más complejos de la fracción, como los relacionados con equivalencias y fracciones aritméticas, así como del álgebra misma (Hackendberg y Lee, 2015).

DECLARACIONES DE CONTRIBUCIONES DE LAS PERSONAS AUTORAS

IADV como parte de un equipo de investigación para el análisis retrospectivo del experimento de diseño desarrolló la fundamentación teórica, participó en la estructura de la metodología y sus actividades y analizó los datos recabados. Los otros autores (LAMF y LMAR) constituían el Comité Asesor del Trabajo Final de Doctorado de IADV (sustentado

en el presente estudio), por lo que participaron en la discusión de los resultados, la revisión y aprobación la versión final de esta publicación.

DECLARACIÓN DE DISPONIBILIDAD DE DATOS

Los datos que respaldan los resultados de este estudio estarán disponibles por la autora de correspondencia IADV, previa solicitud.

6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bressan A., Zolkower B., y Gallego M. (2004). La educación matemática realista. Principios en que se sustenta. Presentado en la Escuela de Invierno en Didáctica de la Matemática, Universidad Autónoma de Chiapas (UNACH).

Bressan, A., Gallego, M., Pérez, S., y Zolkower, B. (2016). Educación Matemática Realista. Bases teóricas. GPDM.

Cobb, P. (2000). Conducting teaching experiments in collaboration with teachers. En A. Kelly y R. Lesh (Eds.), Handbook of research design in mathematics and science education (pp. 307-333). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Cobb, P., Confrey, J., Disessa, A., Lehrer, R. y Schauble, L. (2003). Design Experiments in Educational Research. American Educational Research Journal, 32, 9-13. http://www.jstor.org/stable/3699928

Cobb, P., Visnovska, J., y Zhao, Q. (2008). Learning from and adapting the theory of realistic mathematics education. *Education et Didactiqu*e (pp. 105-124). https://doi.org/10.4000/educationdidactique.276

Cortina, J. L., Zuñiga, C., y Jana, V. (2013). La equipartición como obstáculo didáctico en la enseñanza de las fracciones. Educación Matemática, 25(2), 7-29.

Cortina, J. L. (2014). Investigar las fracciones: experiencias inspiradas en la metodología de los experimentos de diseño. *Educación Matemática*, 25 años 270-284. https://www.redalyc.org/pdf/405/40540854014.pdf

Fandiño, M. (2009). *Las fracciones*. *Aspectos conceptuales y didácticos*. Editor Magisterio.

Freudenthal H. (1983). Didactical phenomenology of mathematical structures. Dordrecht, Holland: Reidel Publishing Company.

Freudenthal, H. (1991). Revisiting Mathematics Education: China Lectures. Dordrecht, The.

Gravemeijer, K. y Terwel, J. (2000). Hans Freudenthal: un matemático en didáctica y teoría del currículo. *Revista de estudios curriculares*, *32* (6), 777–796. https://doi.org/10.1080/00220270050167170

González-Forte, J. y Fernández, C. (2024). Razonamientos de estudiantes en tareas de comparación, ordenación y representación de fracciones y números decimales. *PNA, 18*(2), 131- 160. https://doi.org/10.3102/00028312032001009

Hackenberg, A. & Lee. (2015). Relationships Between Students' Fractional Knowledge and Equation Writing. *Journal for Research in Mathematics Education*, *46*(2), 196–243. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.46.2.0196

Kieren, T. (1988). Personal Knoweldge of Rational Numbers: Its Intuitive and Formal Development. En Hiebert Y Behr (Eds.), *Number concepts and Operations on the MIddle Grades*. (pp. 162-181). EUA: Lawrence Erlbaum Associates/National Council of Teachers of Mathematics.

Lee, M. (2017). Flexibilidad de los docentes en formación con unidades de referencia para resolver un problema de división de fracciones. *Educ Stud Math 96* , 327–348. https://doi.org/10.1007/s10649-017-9771-6

Lee, M. y Hackenberg, A. (2014). Relaciones entre conocimiento fraccionario y razonamiento algebraico: el caso de Willa. Revista Internacional de Educación en Ciencias y Matemáticas, 12(4), 975–1000.

Luna, C y Aguayo, L.M. (2021). El experimento de diseño. Una alternativa metodológica para la investigación y la innovación. En Aguayo, L y Calderón, J. (Eds.). *Formación y profesión docente. Entre prescripciones teorías y prácticas educativas*. (PP. 325-342). Taberna Librería Editores.

Melquiades-Martínez, M., Salgado-Beltrán, G. y García-García, J. (2023). La fracción como punto en la recta numérica en el saber de estudiantes de quinto grado de Primaria**.** *Números, Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *114*, 63-81.

Santamaría, F. (2006). *La contextualización de la matemática en la escuela primaria de Holanda* [Tesis de maestría, Universidad Nacional del Comahue]. https://docplayer.es/12979482-La-contextualizacion-de-la-matematica-en-la-escuela-primaria-de-holanda.html

Steffe, L. P. (2002). Una nueva hipótesis sobre los niños con conocimiento fraccional. *Departamento de Educación Matemática*.

Steffe, L. y Thompson, P. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. En A. Kelly y R. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 267-306). Mahwah: NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Thompson, P. y Saldanha, L. (2003). Fracciones y razonamiento multiplicativo. En J. Kilpatrick, G. Martin y D. Schifter (Eds), Investigación complementaria de los Principios y estándares para las matemáticas escolares (pp. 95-114). Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas.

Treffers, A. (1987). *Three Dimensions: A Model of Goal and Theory Description in Mathematics Education. The Wiskobas Project*. Springer Dordrecht. https://doi.org/10.1007/978-94-009-3707-9

Valenzuela, C., Figueras, O., Arnau, D. & Gutiérrez-Soto, J. (2016). Hacia un modelo de enseñanza para las fracciones basado en el uso de applets. Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 5(2), 1-20.

Valenzuela, C., Figueras, O., Arnau, D., y Gutiérrez-Soto, J. (2017). Objeto mental fracción de alumnos de secundaria con problemas de absentismo escolar. 227-242.