Cuadernos
de Investigación y Formación
en Educación Matemática

e-ISSN en línea: 2215-5627
Impresa: ISSN 1659-2573
Vol: 18 · N°. 1 · 2025
251-275
Recibido: 20/10/2024
Aprobado: 02/12/2024

Artículos de investigación

DISEÑO DE UNA TAREA FENOMENOLÓGICA PARA LA EXPLORACIÓN DEDUCTIVA DE LA REGLA DE LA CADENA EN VARIAS VARIABLES

DESIGN OF A PHENOMENOLOGICAL TASK FOR DEDUCTIVE EXPLORATION OF THE CHAIN RULE IN SEVERAL VARIABLES

Eduardo Emiliano Muñoz Ortiz[1]
ORCID iD: https://orcid.org/0000-0001-7828-5016

Priscilla M. Angulo Chaves[2]
ORCID iD: https://orcid.org/0009-0008-2757-2136

Carlos Robles Padilla[3]
ORCID iD: https://orcid.org/0009-0003-2875-0428

Axcel Picado Piedra[4]
ORCID iD: https://orcid.org/0009-0003-3046-3196

RESUMEN

Se presenta una ruta para el diseño de una tarea fenomenológica matemática y se expone el análisis realizado de una implementación, en el contexto del curso MA-1022 Cálculo para Ciencias Económicas II, sobre la regla de la cadena en varias variables, usando la metodología de *Design Thinking*, considerando la teoría de Escenarios de Aprendizaje de Carroll y basado en los Principios de Diseño de Matos. Con el diseño del problema propuesto en la tarea, se buscó alcanzar una mejor comprensión de jerarquía y las relaciones entre las variables involucradas que favoreció la consolidación del *procept* asociado al teorema de la regla de la cadena en varias variables acorde a lo expuesto por Tall. Como la tarea proporcionó un contexto cercano al área disciplinar, propició que el estudiantado identificara la composición de funciones en varias variables y que tomara sentido al diagrama de árbol de dependencias entre las variables, útil en la aplicación del teorema.

Palabras clave: Regla de la cadena multivariable, Tarea fenomenológica, Escenarios de Aprendizaje, Principios de Diseño, Procept.

1 Escuela de Matemática, Universidad de Costa Rica, Montes de Oca, San José, Costa Rica, código postal 1150 1-2060. Correo electrónico: eduardo.munos@ucr.ac.cr

2 Escuela de Matemática, Universidad de Costa Rica, Montes de Oca, San José, Costa Rica, código postal 1150 1-2060. Correo electrónico: priscilla.angulo@ucr.ac.cr

3 Escuela de Matemática, Universidad de Costa Rica, Montes de Oca, San José, Costa Rica, código postal 1150 1-2060. Correo electrónico: carlos.roblespadilla@ucr.ac.cr

4 Escuela de Matemática, Universidad de Costa Rica, Montes de Oca, San José, Costa Rica, código postal 1150 1-2060. Correo electrónico: axcel.picado@ucr.ac.cr

ABSTRACT

In this document a route for the design of a mathematical phenomenological task is presented. For exemplify, we make an analysis of its implementation, in the context of the course MA-1022 *Cálculo para Ciencias Económicas II* focused on the chain rule in several variables. Our theoretical background is the Design Thinking methodology, considering the theory of Carroll's Learning Scenarios and based on Matos's Design Principles. With the design of the problem proposed in the task, we sought to achieve a better understanding of hierarchy and the relationships between the variables involved, which favored the consolidation of the *procept* associated with the chain rule theorem in several variables according to Tall. As the task provided a context close to the disciplinary area, it allowed students to identify the composition of functions in several variables and to make sense of the tree diagram of dependencies between variables, useful in the application of the theorem.

Keywords: Multivariable Chain Rule, Phenomenological Task, Learning Scenarios, Design Principles, Procept.

1. INTRODUCCIÓN

Como parte de la planificación de un curso universitario, los y las docentes suelen consultar referencias bibliográficas para considerar elementos metodológicos e insumos para la evaluación; sin embargo, en dichas referencias es difícil encontrar conceptos apropiadamente contextualizados para poblaciones específicas, y esto suele ser más notorio a medida que se aborda conocimiento matemático avanzado.

De manera específica en el ámbito de las Ciencias Económicas, Mejía (2010) citado por Puig et al. (2015, p. 414) indica que:

> el mejor análisis matemático es aquel que, durante su desarrollo ha sido capaz de enriquecer nuestra concepción intuitiva del fenómeno hasta el nivel suficiente para encontrar lógica la solución obtenida. Se debe lograr que los estudiantes entiendan la importancia de lo que aprenden para su profesión y apliquen estos contenidos en la solución de problemas modelados, del contexto económico. De esta manera se desarrolla la intuición matemática en el análisis de fenómenos económicos.

Esto evidencia la necesidad de desarrollar herramientas que permitan la elaboración de tareas debidamente contextualizadas, por lo tanto, se establece como objetivo el proponer una ruta para el diseño de tareas fenomenológicas que consideren elementos del contexto en su enunciado, y que faciliten la comprensión de los conceptos y procesos matemáticos desde un enfoque exploratorio.

Con esa finalidad, en este artículo se expone una guía para la elaboración de tareas y se muestra un ejemplo del diseño e implementación de una tarea fenomenológica contextualizada en Ciencias Económicas sobre la regla de la cadena en varias variables, donde se buscó que el estudiantado comprendiera la estrategia de derivar composición de funciones en varias variables y, en consecuencia, el reconocimiento de la utilidad del diagrama de árbol.

2. ELEMENTOS CONCEPTUALES

En esta sección se abordan los elementos teóricos que fundamentan la propuesta de diseño. En primer lugar, se describe qué es el *Design Thinking* como metodología de enseñanza y aprendizaje. Seguidamente, se presenta el pensamiento matemático avanzado, así como la fundamentación matemática de la regla de la cadena en varias variables. Se presentan ejemplos de cómo se aborda el tema en diversos libros de texto y, finalmente, se comentan algunas barreras de aprendizaje que presentan los y las estudiantes cuando aprenden sobre el tema.

2.1. Design Thinking

El *Design Thinking* (DT) ha sido implementado anteriormente por gran variedad de autores, recientemente en sus estudios metodológicos para el aprendizaje significativo, Izquierdo Izquierdo et al. (2022, p. 3) se refiere de la siguiente manera:

> El DT aplicado en el aula, se puede concebir como una metodología centrada en el proceso de enseñanza y aprendizaje del alumnado integrando las necesidades o dificultades que plantea este en la asimilación de conceptos académicos con su capacidad para resolver y afrontar problemas con el fin de conseguir los objetivos didácticos de cualquier rama del conocimiento.

Para Gasca (2015), citado por Latorre-Cosculluela et al. (2020), uno de los puntos más importantes de esta metodología establece de carácter indispensable la conexión entre el pensamiento racional y lógico con el intuitivo, cuya finalidad consiste en la exploración de diferentes soluciones válidas, al procurar que las personas estudiantes no solo apliquen procesos dados con anterioridad.

Para este aprendizaje exploratorio, el *Design Thinking* se centra en tres fases específicas: introducción y presentación de una tarea, trabajo autónomo por parte de los estudiantes y discusión colectiva con una síntesis formativa. Dividiendo el trabajo de esta forma, se promueven las técnicas y desarrollo de competencias, se incentiva la participación y el intercambio de ideas críticas, así como la investigación constante con el fin de aprender a crear soluciones para problemas en diferentes contextos (Aguirre-Villalobos et al., 2023, p. 522).

2.1.1. Principios de escenario de aprendizaje

Carroll (2000) plantea la necesidad de estudiar cómo se transforma el sistema relacional del cual aprende el individuo para mejorar el aprendizaje meta aprovechando las interacciones entre los diferentes conceptos, los procesos, el contexto y los objetivos de las personas participantes. Por lo que concibe al *escenario* como el espacio dinámico en el cual las relaciones casuales entre objetos se integran y generan otro estado relacional. Los escenarios podrían involucrar situaciones muy diversas. Entonces, se puede guiar el aprendizaje de las personas considerando el diseño de escenarios orientados al aprendizaje.

Además, menciona que los métodos de diseño de actividades de aprendizaje poseen cinco retos usuales que se evidencian en su aplicación, para lo cual los escenarios de aprendizaje tienen ventajas o razones que facilitan su abordaje, tal y como se muestra en la tabla 1.

CC BY NC ND

Tabla 1. Retos de diseño y ventajas del uso de escenarios de aprendizaje según Carroll.

Retos del diseño	Ventajas del uso de escenarios de aprendizaje
Debe haber espacio para meditar las acciones que se realicen	*Reflexión inducida:* En un escenario de aprendizaje se propicia la reflexión crítica y profesional. Este proceso reflexivo es espacio para conceptualizar elementos teóricos presentes estudiados.
Las situaciones interactivas son fluidas	*Concreto y flexible:* Los escenarios tienen objetivos específicos, ofreciendo una solución constructiva por medio de una actividad colaborativa fluida. La construcción parcial de las actividades es planeada de tal forma que guía fluidamente mediante su flexible completación.
Las decisiones de los participantes podrían generar muchas posibilidades que deben ser contempladas en el mismo diseño	*Múltiples perspectivas:* El carácter participativo del escenario propicia la interacción desde distintas perspectivas y conceptualizaciones matemáticas de cada participante.
Enseñar conceptos técnicos requiere de un diseño técnico	*Genérico y categorizable:* El diseño puede incluir situaciones suficientemente abstractas. Integran al estudiantado, sin enfocarse en intereses particulares. Se puede categorizar mediante las relaciones casuales que contempla el escenario, lo que favorece su adaptación en cada versión.
Algunos factores externos pueden obstaculizar la aplicación del diseño	*Orientación al trabajo:* Los escenarios propician las interacciones mediante el trabajo secuencial en el cual se establecen los conceptos. Así, se involucran las personas participantes, las mismas construyen y utilizan el escenario.

Fuente: Adaptado de “Five reasons for scenario-based design” por J. Carroll, 2000, Interacting with Computers, 13(1), p. 43-60.

Por su parte, Piedade et al (2018) indica que en el diseño de los escenarios de aprendizaje se deben considerar seis principios orientadores del diseño los cuales se sintetizan y exponen en la tabla 2.

Tabla 2. Principios orientadores del diseño de escenarios de aprendizaje según Matos.

Principios de diseño	Descripción
Diseño participativo	Es indispensable que el escenario propicie el diálogo explícito y la colaboración entretenida entre estudiantes, investigadores, diseñadores, profesores, visitantes, y demás personas que puedan estar influyendo.

Principios de diseño	Descripción
Contexto y necesidades	Los escenarios deben contemplar las necesidades percibidas por la persona docente que contemplen las necesidades e intereses de las personas estudiantes. Esto debe adaptarse al contexto de las mismas personas, considerando su adaptación a las tecnologías y tecnicismos.
Dinámica experimentación-reflexión	El escenario debe realizar un desenvolvimiento paulatino entre sus fases, algo que las actividades acuerpan, propiciando en cada quien la reflexión sobre las experiencias. Así pues los escenarios son espacios constructivos y mutables. Por esto es necesario su revisión y adaptación continua.
Pensamiento y aprendizaje	Los escenarios deben generar situaciones desafiantes que evoquen el pensamiento crítico de las personas participantes, obteniendo aprendizajes derivados de estas experiencias reflexivas.
Tecnologías y sugerencias	Las herramientas técnicas y andamiajes son muy útiles orientando las situaciones, ya que apoyan a la consolidación de relaciones conceptuales necesarias para el aprendizaje buscado.
Nuevos retos para la consolidación de otros	La consolidación de retos va de la mano de los objetivos de aprendizaje, desarrollarlos en diferentes etapas permite la integración de información en el estudiantado, mediante experiencias colaborativas estimulantes.

Fuente: Adaptado de "Cenários de aprendizagem como estratégia de planificação de aulas na formação inicial de professores: o exemplo da área de informática" por J. Piedade, A. Petro y J. F. Matos, 2018, *Educação e Tecnologias: professores e suas práticas*, p. 11-36.

2.2. Pensamiento matemático avanzado

Tall (1996) expone dos tipos de pensamiento matemático avanzado requeridos en la educación universitaria. En primera instancia la *extensión de técnicas* matemáticas, mediante el cual la persona estudiante emplea conceptos vistos previamente en el colegio. Por otro lado, el pensamiento matemático universitario implica una *reconstrucción y formalización* que inicia desde ideas anteriores para consolidar a los nuevos conceptos.

En el caso de la población estudiantil universitaria de primeros años, esta se encuentra habitualmente en un nuevo proceso de reconstrucción conceptual de lo aprendido previamente en el colegio. Esto relativiza la concepción del proceso cognitivo que conlleva la adquisición de pensamiento matemático avanzado ya que se resalta la dinámica entre la persona docente, que posee una visión madurada de los objetos matemáticos, y la situación contextual del estudiantado, que se involucra con sus conceptualizaciones matemáticas previas.

CC BY NC ND

Además, Tall (1996) propone el esquema de desarrollo cognitivo de las personas estudiantes, en lo que se destaca en la primera etapa la exposición a representaciones desde diferentes marcos de referencia: numéricas, simbólicas, gráficas.

En la aplicación de la tarea propuesta en este artículo se busca generar un escenario, en el mismo se pretende que la población estudiantil ejercite la conceptualización de elementos matemáticos, mediante una participación en el proceso de análisis de tablas y construcción de gráficas, expresiones de lenguaje técnico y contextualizado. De esta manera, el escenario busca una experiencia constructiva, enriquecida por varios marcos de referencia, que constituye la conceptualización del procedimiento involucrado en la regla de la cadena.

Lo anterior acompaña al establecimiento cognitivo en los estudiantes de algo que podríamos llamar *procept* de la regla de la cadena. En esta perspectiva, Gray y Tall (1991, p. 73), definen *procept* como "la combinación entre proceso y concepto, en el que el procedimiento y el objeto se representan por el mismo simbolismo. Así, el símbolo de un *procept* puede evocar un proceso o un concepto".

Además, teniendo en cuenta que este objeto matemático es parte del estudio que se realiza en el Análisis Matemático, tanto en Tall (2004) como en Tall y Mejía (2004) se expone una comprensión de los objetos desde la teoría de tres mundos. A considerar: mundo personalizado o personificado, mundo proceptual, mundo formal. De ahí que, la enseñanza de la regla de la cadena en varias variables se puede ubicar en el segundo mundo, donde la reconstrucción de los conceptos se alcanza a través de una secuencia de diferentes experiencias.

Sanmartín (2023) aclara que

> El hecho de no pensar flexiblemente en símbolos como procesos y conceptos hace que el estudiante sea incapaz de pensar matemáticamente. Esta situación lo ubica en una posición regresiva donde prevalece la memoria, que puede funcionar en ciertos problemas; pero que en general produce un grado creciente de incomprensión en etapas sucesivas debido a que es más difícil coordinar procesos que manipular conceptos. Así, el estudiante que no reflexiona, le resulta complejo el aprendizaje de la matemática porque se ve obligado a usarla y le es más difícil ya que no ha adoptado un pensamiento flexible para comprenderla. (p.47)

2.3. Regla de la cadena en varias variables

Esta subsección muestra los conceptos técnicos del cálculo de derivadas usando regla de la cadena, basados teóricamente en el libro de Stewart et al. (2021). En primera instancia recordamos el teorema de regla de la cadena en una sola variable:

Teorema 1. Regla de la cadena en una variable real.

Si $g: D \longrightarrow A$ y $f: A \longrightarrow B$ son funciones de variable real derivables en todo su dominio, entonces, la composición $f \circ g: D \longrightarrow B$ también es una función derivable y se puede calcular en cada $x \in D$ con la fórmula:

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \circ g'(x). \qquad (1)$$

Al aplicar esta formulación es necesario dominar el cálculo de derivadas de funciones más simples que $f \circ g$, pues se necesitan calcular las derivadas de las funciones f y g , además es necesario tener más familiaridad sustituyendo correctamente la composición de funciones pues involucra la evaluación de f' en el valor numérico $g(x)$.

Estos conceptos se extienden a varias variables $(x_1, x_2,...,x_n)$ en vez de x, por esto debe especificarse la variable x_i respecto a la cual se calcula la derivada, sin embargo, en la notación de **(1)** se sobreentiende x como la variable de derivación, entonces, conviene usar otro tipo de notación para el teorema multivariable donde sí se especifica la variable respecto a la cual se deriva. Al emplear la notación de Leibniz en la que se indica explícitamente la variable de derivación podemos reescribir la fórmula de **(1)** como:

$$\frac{d(f\circ g)(x)}{dx} = \frac{df(g(x))}{dx} \cdot \frac{dg(x)}{dx} \qquad (2)$$

Esta notación es un poco más similar a la que se utiliza en las derivadas parciales que se emplean en varias variables. Aunque, la notación solamente es una guía en la escritura. Alguien podría escribir para $f(x) = x^2 - 2x^3$ y $g(x) = sen(x)$ la expresión:

$$(f \circ g)'(x) = [2sen(x) \ - 6sen^2(x)] \cdot [cos(x)],$$

sin utilizar ninguna de las notaciones anteriores como intermediaria.

Aprender a implementar correctamente el teorema de regla de la cadena multivariable implica el manejo de conceptos previos como el de función y composición en varias variables, derivada parcial, e incluso, campos escalares. Pero, dependiendo de los objetivos de aprendizaje, en la introducción de un método para el cálculo de la derivada multivariable suelen omitirse algunos detalles. Si se desea enunciar este teorema en forma general sería necesario especificar condiciones topológicas sobre el dominio de la función a derivar, para lidiar con los cálculos en los puntos de la frontera, por lo que si se denota $\mathfrak{R}$ como el conjunto de los números reales, y al elemento típico de $\mathfrak{R}^m$ como el vector de $X = (x_1, x_2,...,x_k)$, el teorema puede enunciarse como sigue:

Teorema 2. Regla de la cadena en varias variables reales.

Considere f,g funciones derivables en todo su dominio. Definidas respectivamente, sobre conjuntos abiertos de la forma $g: D \subseteq \mathfrak{R}^n \longrightarrow A \subseteq \mathfrak{R}^k$ *y* $f: A \subseteq \mathfrak{R}^k \longrightarrow B \subseteq \mathfrak{R}$. *Sean* g_1 $g_2,...,g_k$ *campos escalares tales que:*

$$g(X) = (g_1\ (X),\ g_2\ (X),...,\ g_k\ (X))$$

entonces, la composición $f \circ g: D \subseteq \mathfrak{R}^n \longrightarrow B$ *está bien definida y es una función derivable respecto a cada una de las variables en* $X = (x_1, x_2,..., x_n)$. *La derivada respecto a la variable* x_m, $m \epsilon \{1,2,...,k\}$,, *evaluada en el vector* $x_0 \epsilon D$ *está dada por:*

$$\frac{d(f\circ g)}{dx_m}(x_0) = \frac{\partial f(g(x_0))}{\partial \alpha_1} \cdot \frac{\partial g_1(x_0)}{\partial x_m} + \frac{\partial f(g(x_0))}{\partial \alpha_2} \cdot \frac{\partial g_2(x_0)}{\partial x_m} + \ldots + \frac{\partial f(g(x_0))}{\partial \alpha_k} \cdot \frac{\partial g_k(x_0)}{\partial x_m} \quad \mathbf{(3)}$$

donde $\frac{\partial f}{\partial \alpha_r}$ *es la derivada parcial de respecto a la coordenada r-ésima del* $\mathfrak{R}^k$.

Observe que en el lado derecho de la fórmula **(3)** se agrega varias veces la expresión colocada en **(2)** especificando en cada caso la variable de derivación que corresponde, hasta incluir todas las posibles dependencias desde f a la variable x_m pasando por cada g_k. Es decir, la regla de la cadena en multivariable involucra realizar varias veces el teorema de variable la regla que se hacía en una variable, pero respecto a cada dimensión del espacio dominio de $f \circ g$.

CC BY NC ND

2.4. Abordaje de la regla de la cadena en varias variables en libros de texto arbitrados

En los libros de texto que habitualmente son utilizados para abordar la regla de la cadena en varias variables encontramos distintas formas de introducir el cálculo de derivadas parciales y la regla de la cadena, especialmente porque los objetivos de aprendizaje de cada libro pueden ser específicos para algún área o por los temas previamente estudiados.

En el libro de Stewart (2018, pp. 937-942) se realiza una introducción relativamente paulatina, ya que se presenta el teorema en tres casos, los cuales involucran cada vez más variables y dependencias entre ellas. Después de cada caso se realizan ejemplos posteriores. En el primer caso se establece la derivada de $Z = f\,(g(t), h(t))$ respecto a la variable t. Luego, en el segundo caso se plantea la fórmula de derivada de una función Z y se calculan las derivadas $\frac{dZ}{ds}$ y $\frac{dZ}{dt}$. En el tercer caso se presenta el teorema general. Es importante resaltar que el libro acompaña con ejemplos de aplicaciones y cálculos directos, además de que se apoya en el diagrama de árbol para acompañar la explicación.

En Larson y Edwards (2023), se introduce la regla de la cadena mediante la presentación del teorema, inicialmente en dos variables independientes s, t de las cuales dependen variables $x(s, t)$, $y(s, t)$ y a su vez se asume la dependencia de una variable $w = f(x, y)$. Se presenta una pequeña demostración, pero es referencial, es decir, no se desarrollan muchos detalles teóricos en esta parte, las intuiciones las desarrolla con ejemplos posteriores al enunciado. También es importante destacar que el diagrama de árbol se presenta como esquematización de la regla de la cadena en dos variables, por esto el diagrama acompaña al enunciado del teorema, pero no se utiliza más. Luego, se generaliza el teorema, pero no se presenta como enunciado, más bien, como comentario a partir del cual se realiza un ejemplo de tres variables

Otro caso distinto es la forma de abordarlo en Ardón Chávez (2020) en donde se realiza de una forma muy directa, no aparece la regla de la cadena como un teorema, lo que es usual en los libros de cálculo, se presenta como una definición utilizando solamente dos variables independientes y en seguida realizan ejemplos con variables explícitas. Por medio de cuatro ejemplos aborda el tema.

Por otro lado, el libro de Lang (1990) lo presenta de una manera distinta, particularmente porque previo a la regla de la cadena en varias variables se estudian vectores, con lo que se define el gradiente:

$$\nabla f(x_1, x_2, \ldots, x_k) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_k}),$$

y el producto escalar de vectores. Si $Y = (y_1, y_2, ..., y_k)$ y $X = (x_1, x_2, ..., x_k)$ se define:

$$X \cdot Y = (x_1, x_2, \ldots, x_k) \cdot (y_1, y_2, \ldots, y_k) = x_1 \cdot\ y_1 + x_2 \cdot\ y_2 + \ldots + x_k \cdot\ y_k.$$

Luego, con estas definiciones podemos plantear la regla de la cadena para una función real derivable $f(x_1, x_2, ..., x_k)$ y un campo escalar $C\,(t) = (x(t)_1, x_2\,(t), \ldots, x_k\,(t))$, el cálculo de:

$$\frac{df}{dt} = \nabla f(C(t)) \cdot C'(t).$$

De esta forma la notación que se utiliza es análoga a (1) lo cual permite mantener una familiaridad con la expresión vectorial, sin embargo, esto no contempla los casos más generales de varias variables, en particular, no abarca el caso que expone este documento con variables s y t, este caso es útil para modelar la dinámica de sustitución entre algunos productos demandados.

2.5. Barreras de aprendizaje

La regla de la cadena en una variable es un tema que genera dificultad en su comprensión por involucrar el concepto de composición de funciones (Valdivia y Parraguez, 2015), por ello, uno de los principales retos a los que se enfrentan los estudiantes a la hora de transitar entre funciones de una a varias variables es comprender que ahora pueden existir múltiples dependencias entre nuevas variables, de modo que, deben tener la capacidad de visualizar la composición de funciones a nivel multidimensional para poder establecer las conexiones de dependencia entre las variables.

Otro reto importante, es tener la flexibilidad cognitiva para cambiar rápidamente el enfoque de la variable con la respecto a la cual se está calculando la derivada parcial, pues deben considerar solo esta como una variable y las demás verlas como constantes, sin embargo, este proceso se debe repetir para cada una de las variables utilizadas. Es frecuente que al inicio esto implique un reto importante, el cual debe estar superado para efectuar apropiadamente la derivación con regla de la cadena.

Por otra parte, como el estudiantado conoce la regla para funciones de una variable, logran establecer una conexión a nivel de fórmula con la multiplicación de las derivadas parciales de una misma variable, sin embargo, comprender y justificación el origen de la suma de los productos anteriores, genera confusión porque no existe en la derivación de funciones de una variable una fórmula con la cual puedan establecer una analogía.

3. ABORDAJE METODOLÓGICO

La presente propuesta de diseño de una tarea fenomenológica es producto de una investigación de índole cualitativo, implementada en el curso MA-1022 Cálculo para Ciencias Económicas II en la Universidad de Costa Rica durante el I ciclo del 2023, en la cual se realizó un estudio del *procept* matemático asociado a la regla de la cadena en varias variables mediante la metodología *Design Thinking*.

El estudio fue desarrollado en el contexto del proyecto de docencia titulado *Desarrollo profesional en Didáctica del Cálculo Diferencial e Integral para personas docentes de Matemática de la UCR*, del cual los investigadores fueron partícipes, con una duración de 16 semanas, y en el que se llevó a cabo momentos de exploración teórica para establecer la planificación del escenario de aprendizaje.

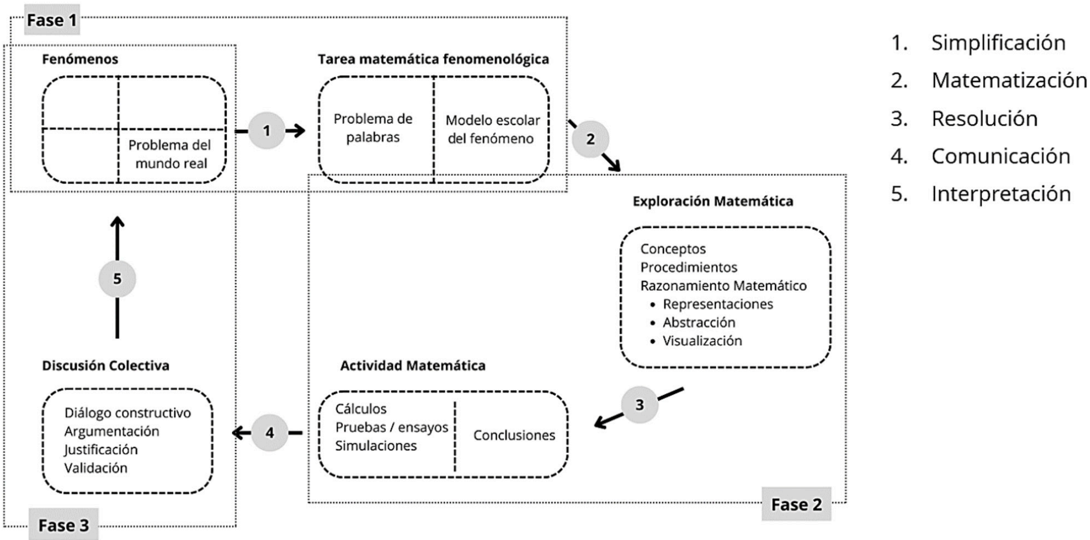
En las diferentes sesiones el equipo investigador logró consensuar el tema y diseñar la tarea correspondiente. Además, se logró definir el momento y la forma en que fue aplicada, por lo que el estudio se llevó a cabo en 4 grupos de 40 estudiantes cada uno, mediante equipos conformados entre 3 a 5 participantes. Tres de los cuatro docentes investigadores tenían al menos un grupo a cargo del curso MA-1022, lo cual facilitó la inserción al aula para la recolección de las evidencias del trabajo de campo realizado.

Para determinar la relación entre las variables, se propuso una tarea escolar basada en el modelaje, mediante regresión lineal multivariable, de una situación del entorno considerando datos empíricos de la venta de combos de pollo frito y pizzas, cuya relación se estableció con base en las cantidades y precios de estos productos.

En este estudio se planteó la siguiente conjetura de formación-aprendizaje, que orientó la toma de decisiones en el diseño de la propuesta: *Desde la resolución de un problema contextualizado en el área de Ciencias Económicas las personas estudiantes explorarán e identificarán una estrategia para ordenar las variables involucradas, que contribuye a dar significado y deducir la estrategia del diagrama del árbol para aplicar la regla de la cadena en la derivación de funciones en varias variables*.

En esta propuesta se expone un diseño de cómo elaborar una tarea fenomenológica matemática acorde al ciclo fenomenológico escolar expuesto por Gutiérrez-Fallas (2024) en la figura 1.

Figura 1. Ciclo fenomenológico escolar.

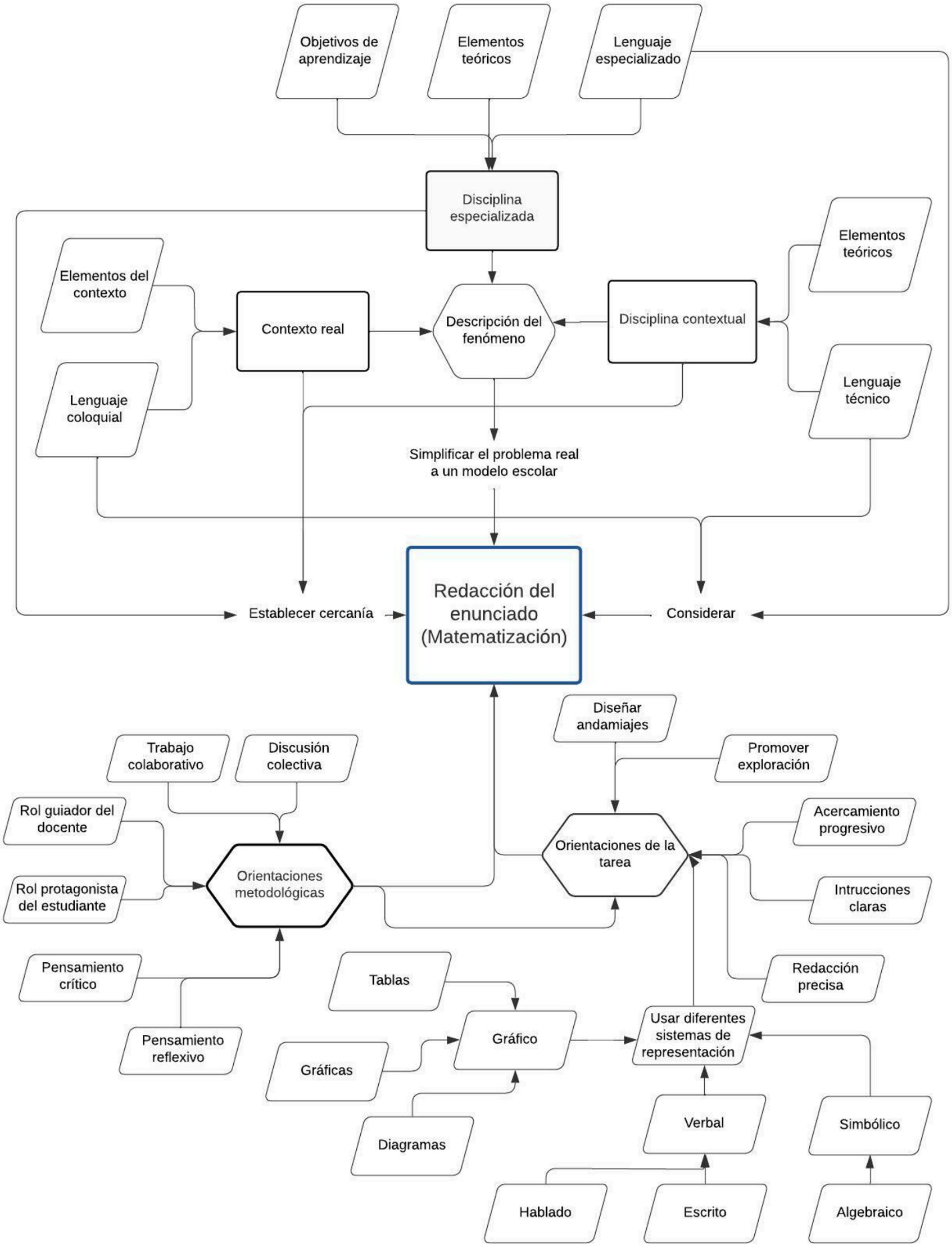


Fuente: De "Diseño de tareas matemáticas fenomenológicas con integración de la tecnología en la formación inicial de profesores de matemática.", por L. F. Gutiérrez-Fallas, 2024, *Revista Ibero-Americana de Estudos em Educação*, 3(n. esp. 2), p. 11.

Según Gutiérrez-Fallas (2024), el ciclo fenomenológico escolar se compone de tres fases dentro de las cuales se distinguen cinco procesos fundamentales; sin embargo, el objeto de esta propuesta se centra en el abordaje y construcción de la primera fase, compuesta por los procesos de simplificación y matematización.

A continuación, proponemos una ruta a seguir, tal y como lo muestra la figura 2, para la elaboración de tareas fenomenológicas de índole matemático, y de manera paralela se expone una adaptación concreta del diseño de una tarea matemática sobre la exploración deductiva de la regla de la cadena en variables en el curso MA1022.

Figura 2. Diagrama de flujo para la elaboración de una tarea fenomenológica.



Fuente: Elaboración de los autores.

cc BY NC ND

En concordancia con lo expuesto en la figura 2 se establecen cuatro etapas para el diseño de una tarea matemática de carácter fenomenológico, las cuales se describen a continuación.

Etapa 1. Descripción del fenómeno.

Esta primera etapa es esencial para la construcción de la tarea ya que busca la comprensión del fenómeno real, para lo cual se debe explorar el contexto real, la disciplina contextual y la disciplina especializada.

La exploración, indagación y comprensión del contexto real en el cual se sitúa el ente matemático, permite la identificación de necesidades, obstáculos, estrategias de abordaje, fortalezas y sobre todo elementos del lenguaje coloquial que son cercanos al estudiantado y que en conjunto permiten apropiarse del contexto. Además, se deben conocer los conceptos propios de la disciplina contextual que están asociados a la temática general de la tarea, además de comprender e incorporar una adecuada apropiación del lenguaje técnico correspondiente.

El tercer elemento involucrado corresponde a tópicos propios de la disciplina en que se va a implementar la tarea, e incorpora tanto conceptos específicos que van en concordancia con los objetivos de aprendizaje de la tarea como elementos propios del lenguaje especializado de dicha disciplina.

Estos tres elementos aportan insumos importantes para el estudio de un fenómeno presente en el mundo real, por lo tanto, es necesario anotar y especificar los elementos del contexto que se van a implementar en la tarea.

El ejemplo específico de esta propuesta está situado en el ámbito de las ciencias económicas por lo que es importante entender que en el mundo real existen empresas que dependen del mercado para establecer sus relaciones de oferta y demanda, que a su vez permiten el establecimiento de precios y la determinación de cantidades de producción de los diferentes productos y que conllevan a la determinación de los ingresos, costos y utilidades respectivas.

En el caso particular del problema de la tarea, está ambientado en una soda restaurante especializada en la venta de pollo frito y pizza, un tipo de negocio muy conocido en Costa Rica.

Adicionalmente, el propósito de la tarea busca la exploración deductiva de la regla de la cadena en varias variables por lo que se extraen del contexto global los elementos del lenguaje expuestos en la Tabla 3 que son insumos importantes para la elaboración de la tarea y que permiten una descripción del fenómeno.

Tabla 3. Elementos del lenguaje involucrados en la descripción del fenómeno.

Lenguaje	Elementos principales
Contexto real	Soda, combo de pollo frito, combo de pizza, producto estrella, cliente, dueño.

BY NC ND

Lenguaje	Elementos principales
Disciplina contextual	Ecuación de demanda, ecuación de oferta, precio de venta, utilidad, tasa de cambio, velocidad de variación, producción, venta.
Disciplina especializada	Derivada, variable independiente, variable dependiente, composición de funciones, regla de la cadena, cálculo en varias variables.

Fuente: Elaboración de los autores.

Otro insumo importante son los datos suscitados de una exploración rápida de los precios en el mercado de los productos propuestos para el problema, esto con la intención de establecer cierto grado de cercanía con el contexto de la tarea propuesta.

Tabla 4. Datos exploratorios del mercado.

Precio del combo de pollo frito "s"	Precio del combo de pizza "t"	Cantidad de combos de pollo frito "x"	Cantidad de combos de pizza "y"	Utilidad Total "U"
2700	3900	63	217	3462979
2700	4100	87	202	5402220
2900	4000	38	240	1205810
2900	4200	62	225	3604872
3000	4200	44	240	1922749
3000	4500	79	217	5192282
2800	3900	45	232	1859728
2800	4200	81	210	5123756

Fuente: Elaboración de los autores.

CC BY NC ND

Etapa 2. Redacción del enunciado.

Esta etapa tiene la intencionalidad de lograr una matematización del problema, es decir, lograr traducir o simplificar el problema del mundo real del fenómeno a un modelo escolar, por lo que se deben considerar diferentes principios.

En primera instancia es indispensable reconocer la relevancia del lenguaje en la elaboración del enunciado y se deben considerar elementos o expresiones del entorno real (lenguaje coloquial), de la disciplina contextual (lenguaje técnico) y de la disciplina especializada orientadora de la tarea (lenguaje especializado), para poder establecer puentes que crean una cercanía entre el estudiante y el constructo particular.

En el ejemplo propuesto, para la construcción del problema de la tarea se busca contextualizar el contenido matemático con el saber económico y especialmente con el contexto real, por lo que la redacción del problema usa fórmulas y expresiones matemáticas, pero a su vez considera algunos conceptos propios del ámbito económico, abonado a una situación familiar o similar a una situación que está presente en el entorno del estudiante.

Para efectos de la propuesta, en relación con el ámbito matemático es importante que las funciones involucradas tengan un comportamiento cercano al contexto o la situación real de la cual se extraen y que sean acordes o análogas a ejemplos o ejercicios presentes en los diferentes textos arbitrados y sobre todo que respeten el quehacer matemático, por lo que con base en los datos exploratorios del mercado mediante regresión lineal se determinan funciones que modelan el comportamiento de dichos datos, las cuales son incorporadas en la redacción del enunciado del problema de la tarea y se exponen en la Tabla 5.

Tabla 5. Criterio de funciones involucradas en el problema introductorio

Función	Variables independientes	Criterio
Cantidad de combos de pollo frito “x”	Precio del combo de pollo frito “s” Precio del combo de pizza “t”	$x(s,t) = 95 - 0{,}185s + 0{,}12t$
Cantidad de combos de pizza “y”	Precio del combo de pollo frito “s” Precio del combo de pizza “t”	$y(s,t) = 105 + 0{,}15s - 0{,}075t$
Utilidad total	Cantidad de combos de pollo frito “x” Cantidad de combos de pizza “y”	$U(x,y) = -\frac{x^3}{25000} - \frac{3x^2}{100} + 496\,xy + 450x + 508y - 3455000$

Fuente: Elaboración de los autores.

Finalmente, en la redacción del enunciado se deben considerar las orientaciones metodológicas definidas de manera previa y respetar las orientaciones de la tarea que la definen y complementan.

BY NC ND

Etapa 3. Orientaciones de la tarea.

Son elementos preponderantes que deben ser considerados al momento de elaborar la tarea y tienen el propósito de promover la exploración del tema y un acercamiento progresivo al objeto de aprendizaje, por lo que se valora todo el proceso de su resolución y no solo el producto final, por lo tanto, se deben incluir instrucciones claras y una redacción por etapas precisas y relacionadas entre sí.

Adicionalmente, de manera paralela al diseño del problema se debe prever la elaboración de un andamiaje que fomente la autorregulación y el acercamiento o comprensión progresiva del contenido implícito en la problemática estudiada.

En este contexto el uso de diferentes sistemas de representación en la redacción del problema y en la confección de los andamiajes es de suma importancia ya que permite una mejor comprensión de este.

En el ejemplo concreto propuesto, el diseño de la tarea propicia un acercamiento progresivo y una exploración deductiva de la regla de la cadena en varias variables, adicionalmente se brindan andamiajes en tres líneas: preguntas generadoras, tablas y figuras con situaciones particulares que buscan una mejor comprensión del problema y que se utilizan únicamente si son necesarios y de manera progresiva, tal y como se muestra en la tabla 6, tabla 7 y figura 3.

Tabla 6. Ejemplo de preguntas generadoras como andamiaje para su implementación en la tarea de exploración deductiva de la regla de la cadena en varias variables.

Andamiaje	Ejemplo
Frases o preguntas generadoras	1. Recuerde que la tasa de cambio o la velocidad está directamente relacionada a la función derivada. 2. Recuerde que si una función varía respecto a cierto elemento es porque dicho elemento corresponde a la variable independiente. 3. ¿De qué variables depende la función utilidad? 4. ¿De qué variables depende la cantidad de combos de pollo? 5. ¿De qué variables depende la cantidad de combos de pollo? 6. Complete, visualice y analice las tablas y figuras.

Fuente: Elaboración de los autores.

Las frases o preguntas generadoras incentivan el pensamiento crítico y reflexivo, propician la apropiación de conceptos nuevos mediante el análisis de la información dada y a través de la relación con conocimientos previos, se elaboran de manera previa y se usan solamente en caso de ser necesarias.

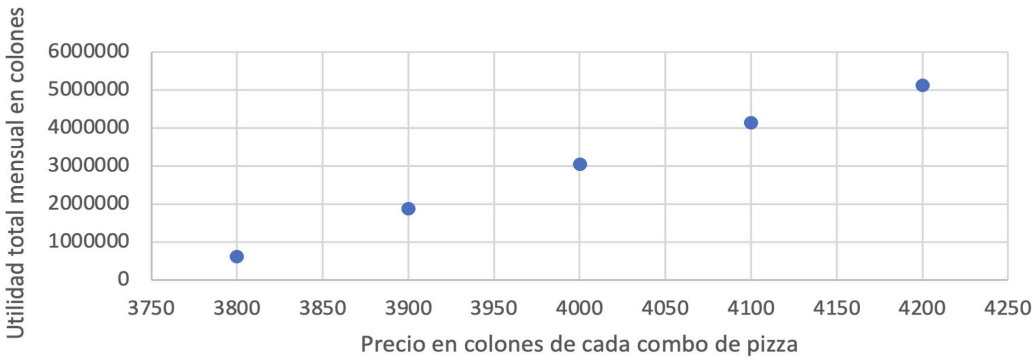
Tabla 7. Ejemplo de una tabla como andamiaje para el estudio de la utilidad total mensual cuando el precio de cada combo de pollo frito se mantiene constante y se varía el precio de cada combo de pizza.

Precio de cada combo de pollo frito “s”	Precio de cada combo de pizza “t”	Cantidad de combos de pollo frito “x(s,t)”	Cantidad de combos de pizza “y(s,t)”	Utilidad Total “U(x,y)”
2800	3800			
2800	3900			
2800	4000			
2800	4100			
2800	4200			

Fuente: Elaboración de los autores.

En la tabla 7 se muestra un ejemplo de andamiaje, pero su éxito está ligado a la implementación de varias tablas en las que se fija el precio del pollo frito y se estudia el comportamiento de la utilidad al variar el precio de la pizza. Además, de otras tablas donde se fija el precio de la pizza y se estudia el comportamiento de la utilidad al variar el precio del pollo frito esto con la intencionalidad de mostrar que, aunque la función de utilidad depende de la cantidad de pollo y pizza vendidos, el modelo realmente depende del precio los combos de pollo frito y de pizza, mostrando la mediante la relación de dependencia entre las variables como se da una composición de funciones de varias variables.

Figura 3. Ejemplo una gráfica de andamiaje que muestra la utilidad mensual respecto al precio de cada combo de pizza, donde cada combo de pollo frito vale ¢2800.



Fuente: Elaboración de los autores.

De manera similar a la intencionalidad de las tablas de andamiaje, mediante varias gráficas de andamiaje se puede mostrar de manera visual el comportamiento de la utilidad al variar el precio del combo de pizza y del pollo frito.

Finalmente, el uso de diferentes sistemas de representación en la elaboración del enunciado y de los andamiajes permite una mejor comprensión del fenómeno real y por ende de la tarea.

Etapa 4. Orientaciones metodológicas.

Las orientaciones metodológicas deben ser consideradas en la elaboración de las orientaciones de la tarea y en la elaboración del enunciado, por lo que están presentes durante la implementación de la misma y tienen el propósito de promover la discusión colectiva y el diálogo constructivo para la construcción de los aprendizajes.

Es importante mencionar que bajo estas orientaciones el diseño de la tarea promueve el trabajo colaborativo, el pensamiento crítico y reflexivo, el papel protagónico del estudiante como responsable principal de la apropiación de sus aprendizajes y un papel de orientador o mediador de los aprendizajes por parte del docente.

Adicionalmente, mediante la discusión y el análisis de los elementos de la tarea propuesta se busca el reconocimiento de la importancia de la relación de dependencia entre las variables y por ende la composición de funciones que converge en la deducción de la regla de la cadena en varias variables.

Finalmente, para el ejemplo concreto de la tarea propuesta y considerando la ruta de diseño expuesta se establece el siguiente enunciado.

"Considere la siguiente situación:

En un reciente estudio, el dueño de "Soda La Favorita" logró identificar que un alto porcentaje de sus utilidades mensuales están directamente relacionadas con la producción y venta de dos de sus productos estrella, cada combo de pollo frito, cuya variable es "x" y cada combo de pizza, cuya variable es "y", los cuales se venden en combos tanto de manera independiente como combinados, según el gusto de cada cliente.

De este modo, la utilidad total de "Soda La Favorita" en término de estos productos, se establece como:

$$\boldsymbol{U(x,y) = -\frac{x^3}{25000} - \frac{3x^2}{100} + 496\,xy + 450x + 508y - 3455000}$$

Si de manera complementaria, dicho estudio revela que la ecuación de demanda del pollo frito está determinada por $x(s, t) = 95 - 0{,}185s + 0{,}12t$, y la ecuación de demanda de la pizza corresponde a $y(s, t) = 105 + 0{,}15s - 0{,}075t$, donde "s" es el precio de venta de un combo de pollo frito y "t" corresponde al precio de venta de un combo de pizza.

(a) Determine la utilidad que obtiene Soda La Favorita si vende cada combo de pollo frito a ¢2800 y cada combo de pizza a ¢4000.

(b) Determine la utilidad que obtiene Soda La Favorita si vende cada combo de pollo frito a ¢3000 y cada combo de pizza a ¢4500.

(c) Determine la tasa de cambio o velocidad a la que varían las utilidades en relación con el precio de cada combo de pollo frito.

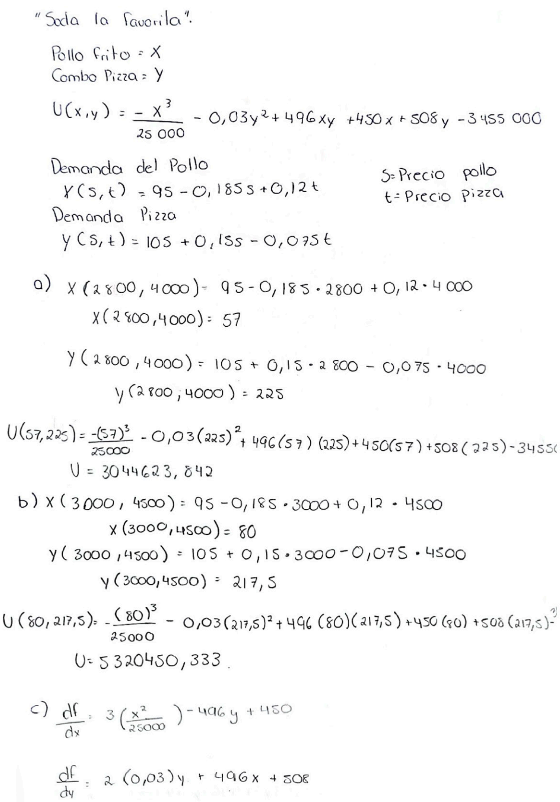
(d) Determine la tasa de cambio o velocidad a la que varían las utilidades en relación con el precio de cada combo de pizza".

3. RESULTADOS

Posterior al diseño de la tarea que se construyó, junto con el escenario de aprendizaje, se implementó en cuatro grupos de MA1022, por lo que se presentan algunas fotografías que permiten respaldar el análisis de este apartado. Como punto de partida, el enunciado de la tarea permitió que las personas estudiantes identificaran la dependencia de la función utilidad de la soda respecto a los precios de los combos del pollo frito y de pizza.

A través de la discusión en subgrupos y el intercambio de ideas, los estudiantes lograron realizar las partes (a) y (b) sin dificultad, donde primero debían sustituir los valores de *s* y *t* en las ecuaciones de demanda para obtener la cantidad de combos requeridos, posteriormente les fue necesario sustituir estos valores en la ecuación de utilidad para encontrar el monto en colones, tal como se muestra en la figura 4.

Figura 4. Evidencia de la resolución de la tarea por parte de un equipo de estudiantes..


"Soda la favorita".

Pollo frito = X
Combo Pizza = Y

$U(x,y) = \frac{-x^3}{25\,000} - 0{,}03y^2 + 496xy + 450x + 508y - 3\,455\,000$

Demanda del Pollo
$x(s,t) = 95 - 0{,}185s + 0{,}12t$
Demanda Pizza
$y(s,t) = 105 + 0{,}15s - 0{,}075t$

S = Precio pollo
t = Precio pizza

a) $x(2800, 4000) = 95 - 0{,}185 \cdot 2800 + 0{,}12 \cdot 4\,000$
$x(2800,4000) = 57$

$y(2800, 4000) = 105 + 0{,}15 \cdot 2\,800 - 0{,}075 \cdot 4000$
$y(2800, 4000) = 225$

$U(57,225) = \frac{-(57)^3}{25000} - 0{,}03(225)^2 + 496(57)(225) + 450(57) + 508(225) - 3455$
$U = 3044623{,}842$

b) $x(3000, 4500) = 95 - 0{,}185 \cdot 3000 + 0{,}12 \cdot 4500$
$x(3000,4500) = 80$
$y(3000,4500) = 105 + 0{,}15 \cdot 3000 - 0{,}075 \cdot 4500$
$y(3000,4500) = 217{,}5$

$U(80, 217{,}5) = -\frac{(80)^3}{25000} - 0{,}03(217{,}5)^2 + 496(80)(217{,}5) + 450(80) + 508(217{,}5) -$
$U = 5320450{,}333$

c) $\frac{df}{dx} = 3\left(\frac{x^2}{25000}\right) - 496y + 450$

$\frac{df}{dy} = 2(0{,}03)y + 496x + 508$

Fuente: Elaborado por un grupo de estudiantes.

Adicionalmente, la figura 4 nos muestra cómo algunos estudiantes tuvieron dificultades en la realización de las partes (c) y (d), ya que se observa que este equipo calculó la derivada de la función utilidad con respecto a las dos variables involucradas x y y, sin embargo, no continuaron con el proceso de derivar respectivamente las funciones de demanda, y más aún, no lograron establecer la conexión entre la derivación de las tres funciones. En conclusión, el principal obstáculo observado en la mayoría de los grupos fue obtener la tasa de cambio de la utilidad a partir de la relación de dependencia entre las variables intermedias.

En esta etapa, como parte del andamiaje, los diferentes equipos fueron guiados por el docente a través de preguntas claves que motivaron la reflexión. En la tabla 8, se muestra un extracto del intercambio de ideas entre el profesor y un estudiante.

Tabla 8. Extracto de interacción entre el profesor Eduardo Muñoz (P) y un estudiante (Es).

P	¿Qué pasa con la utilidad, de qué depende la utilidad, que cosas afectan para que la utilidad aumente o disminuya?
Es	Los precios
P	¿De quién?
E	Del pollo y la pizza
P	Ajá, entonces, en realidad, aunque la función dice que depende de la cantidad de pollo y de la cantidad de pizza, en realidad, ¿de quién está dependiendo?
Es	De los precios
P	Exacto, eso es lo que está marcando el comportamiento.

Fuente: Elaboración de los autores.

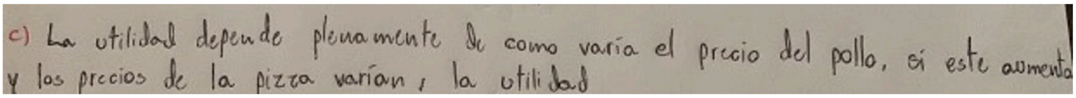
Otro elemento que ayudó a establecer la relación de dependencia entre las variables fue el uso de andamiajes en forma de tablas y gráficas, en concordancia con el principio orientador de diseño *tecnología y sugerencias* descrito en la tabla 2 y la primera etapa del esquema de desarrollo cognitivo expuesto por Tall (1996), tal y como se muestra en la figura 5.

Figura 5. Evidencia del trabajo colaborativo de un grupo de estudiantes.

Fuente: Elaboración de los autores.

Durante la aplicación de los andamiajes algunos estudiantes construyeron de manera verbal el diagrama de árbol que establece la relación de dependencia entre las variables. Incluso, lograron realizar una descripción escrita de dicha relación de dependencia, como se muestra en la figura 6.

Figura 6. Respuesta a la parte c de la pregunta, dada por un grupo de estudiantes.



c) La utilidad depende plenamente de como varía el precio del pollo, si este aumenta y los precios de la pizza varían, la utilidad

Fuente: Elaborado por un grupo de estudiantes.

Durante esta parte de la actividad se evidenció un análisis participativo y una reflexión colectiva en los diferentes equipos, lo cual es propio de la cualidad *reflexión inducida* de los escenarios de aprendizajes descrita en la tabla 1 y el principio de aprendizaje *dinámica experimentación-reflexión* expuesto en tabla 2.

Luego, de manera dialéctica, los estudiantes y el docente establecen, usando el lenguaje coloquial presente en el enunciado, una representación de la relación de dependencia entre las variables y la composición de las funciones de varias variables involucradas, como se ejemplifica en la tabla 9.

Tabla 9. Extracto de la interacción entre la profesora Priscilla Angulo (P) y un estudiante (Es).

P	Entonces, necesitamos sacar la tasa de cambio de la utilidad con respecto a la demanda y la demanda con respecto al…
Es	Precio
P	Al precio ok. Eso fue lo que la mayoría logró identificar, pero no sabían cómo hacerlo Una manera de hacerlo es tomar las ecuaciones de la demanda y sustituirlas en…
Es	La utilidad
P	¿Pero qué pasaba?
E	Que quedaba extenso.
P	Exacto, quedaba muy extensa esa derivada. Ahora bien, para que no quede tan extenso, qué vamos a hacer. Vamos a aplicar lo nuevo que estamos viendo hoy. Una estrategia que nos va a ayudar a resolver de forma más eficiente este tipo de ejercicios.

Fuente: Elaboración de los autores.

Del extracto anterior, se observa que los estudiantes comprenden la noción de sustituir una ecuación en la otra, pero también lograron identificar que, si el ejercicio se realizaba de esa forma, el proceso para derivar y simplificar quedaba muy extenso. Entre los comentarios que se escucharon en la discusión, un estudiante mencionó:

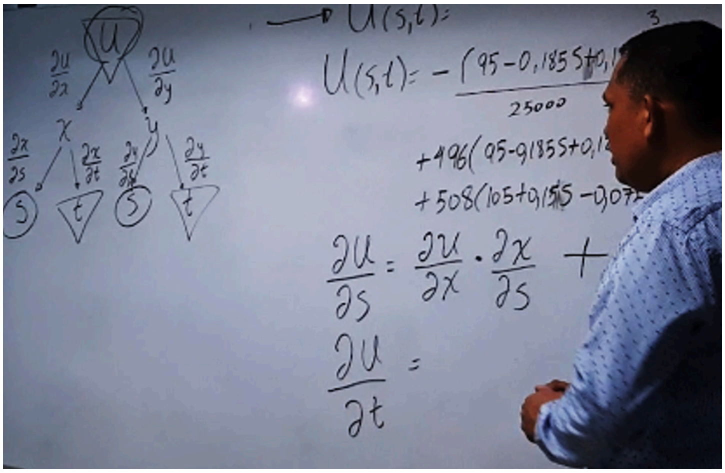
Profe, me rehúso a creer que esto haya que calcularlo así, tiene que existir un método más rápido para resolverlo.

Posteriormente, esta representación verbal se traduce a una representación gráfica por medio de la construcción grupal de un diagrama de árbol que involucra la implementación intencional de diferentes símbolos, formas geométricas y colores, para la identificación y diferenciación de las variables y la dependencia entre las mismas, esto evidencia que la tarea considera los principios de diseño descritos en la tabla 2 y la presencia de la ventaja *concreto y flexible* del uso de escenarios de aprendizaje mencionada en la tabla 1.

En la figura 7 se pueden observar, al lado izquierdo de la pizarra, el diagrama de árbol construido con los elementos simbólicos mencionados anteriormente, y al lado superior derecho de la pizarra se encuentra parte del cálculo tedioso como consecuencia de la sustitución directa de las ecuaciones de demanda en la ecuación de utilidad.

CC BY NC ND

Figura 7- Representaciones de la regla de la cadena en varias variables construidas en la clase.

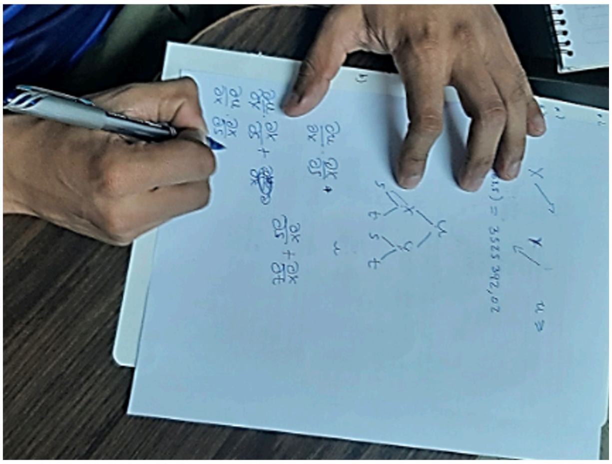


Fuente: Fotografía tomada por el autores.

Finalmente, se realizó la construcción de una expresión algebraica que permitió estimar la tasa de cambio de la función utilidad. En este proceso se realizó una lectura interpretativa de los símbolos y gráficas previamente hechas, de manera que sus relaciones se establecen algebraicamente con el fin de dar solución completa al ejercicio.

En particular, en la clase del profesor Eduardo Muñoz, a manera de cierre se brindó un espacio para que los estudiantes completaran la tarea, donde se evidenció una apropiación del *procept* ya que lograron construir y utilizar el diagrama de árbol correspondiente en la determinación de la tasa de cambio de la función utilidad respecto al precio del combo de pollo y el combo de pizza, tal y como se muestra en la figura 8.

Figura 8. Construcción del diagrama de árbol por un grupo de estudiantes.



Fuente: Fotografía tomada por el autor.

4. CONCLUSIONES

Esta propuesta presentó una estructura base para el diseño de tareas fenomenológicas orientadas al aprendizaje y la activación del pensamiento matemático avanzado. Como vimos en los principios de diseño, en cada escenario de aprendizaje, es indispensable una interacción atenta con las personas estudiantes, es decir, el contexto en que se trabaja debe ser contemplado en cada implementación. Para el caso de la tarea elaborada, se buscó que el enunciado fuese cercano a los estudiantes mediante la adaptación del contexto. Debido a que en el curso previo se estudiaron las funciones en al ámbito económico, pero en una sola variable, se consideró que los criterios de las funciones, descritas en el enunciado de la tarea particular, presentaran un formato que active en el estudiantado un razonamiento inducido por simbologías previamente trabajadas.

Un aspecto importante que se destaca de la gestión de esta clase es la introducción y desarrollo de la temática *Regla de la cadena en varias variables* de una forma distinta a la que usualmente se presenta en los cursos de cálculo. Al realizarlo de esta forma, el estudiantado es dotado de un espacio de observación, en el cual puede entretejer sus conceptos previos, y así intuir una mecánica estructural propia, en sustentación del *procept* de regla de la cadena en varias variables. Este momento de *reflexión inducida* permite fortalecer la *relación-conexión* entre las variables y las funciones. Lo anterior se verificó ya que en la mayoría de los subgrupos de estudiantes lograron elaborar un mapa mental del diagrama de árbol utilizado en la regla de la cadena en varias variables, inclusive pudieron expresarlo verbalmente sin una representación simbólica en sí. Esto es muy enriquecedor pues permite que el estudiante se apropie del *procept* y que el aprendizaje es producto de su involucramiento. Tal y como menciona Carrol (2000, p. 55) *"Designers are not just making things; they are making sense"*. Es decir, mientras se esté implementando un escenario de aprendizaje, el diseño debe considerarse una herramienta que acompaña atentamente a las personas estudiantes para que, mediante una experiencia sensorial intencionada, tengan la oportunidad de *intuir* las relaciones conceptuales meta.

Además, la implementación del trabajo en equipos propició un ambiente favorable en la clase, pues esto les permitió intercambiar ideas con sus compañeros y discutirlas en el proceso de creación de estas; incluso, se logró observar que identificaron y controlaron los procesos que estaban desarrollando. Por mencionar, en ocasiones el valor de la utilidad les resultó ser muy elevado y, en consecuencia, reiniciaban el proceso. El principio de *diseño participativo* reluce en esta parte: se dio mucho movimiento cognitivo durante la implementación ya que fue una clase llena de motivación con un lenguaje cercano al estudiantado y con mucha dialéctica entre los pares y el docente. Por este lado resalta el valor de las *múltiples perspectivas* propias de los escenarios de aprendizajes que se detalla en la tabla 1 de los elementos conceptuales.

Es importante indicar que el diseño y la implementación de estas tareas no es algo definitivo, sino que de acuerdo con la metodología *Design Thinking* está sujeta a cambios o mejoras en concordancia con el principio *genérico y categorizable* por lo que se pueden hacer ajustes a medida que se aplica en diferentes momentos. Por ejemplo, luego de dos aplicaciones de la tarea se identificaron los siguientes obstáculos: duraban mucho en la resolución de la parte (a) y la parte (b), había deficiencias en la comprensión lectora y la necesidad de reforzar algunos conceptos previos. De este modo, se hicieron ajustes en las siguientes implementaciones de la tarea para enfrentar dichos obstáculos.

Adicionalmente, en el ciclo lectivo siguiente, el coordinador y docente de la cátedra Carlos Robles, logró aplicar una modificación del diseño, basada en la discusión y análisis de la experiencia y resultados obtenidos en la primera implementación, incorporando de manera intencional las siguientes acciones:

CC BY NC ND

1. Incorporar preguntas de comprensión lectora, para que cada estudiante interiorice el contexto modelado por la tarea.

2. Dividir la tarea en cuatro momentos secuenciales, cada uno con tiempo establecido según la meta requerida, para potenciar el trabajo en equipo.

3. Realizar una plenaria grupal después de cada momento, para garantizar que cada equipo tenga las herramientas necesarias para avanzar al siguiente momento.

4. Solicitar únicamente la tasa de cambio con respecto a uno de los combos de comida, con el fin de ajustar el tiempo destinado para la realización de la tarea según el horario disponible en la clase.

Como recomendación para futuras aplicaciones de la tarea sobre regla de la cadena en varias variables, se sugiere un enfoque más interactivo mediante el uso de herramientas tecnológicas donde se puedan modelar en clase los criterios de las diferentes funciones con base en datos concretos recolectados con anterioridad.

DECLARACIONES DE CONTRIBUCIONES DE LAS PERSONAS AUTORAS

EEMO elaboró una primera versión del enunciado de la tarea, elaboró el diseño para la elaboración de una tarea fenomenológica y el diagrama de flujo correspondiente, propuso la estructura de los elementos conceptuales.

EEMO y CRP elaboraron una primera versión del abordaje metodológico.

APP y PMAC elaboraron una primera versión de los elementos conceptuales

EEMO, PMAC y CRP implementaron la tarea en su clase.

APP tradujo y sintetizó elementos teóricos de los principios de escenarios de aprendizaje, pensamiento matemático avanzado, abordaje de la regla de la cadena en varias variables.

PMAC elaboró una primera versión del apartado de resultados, realizó la edición final del formato de la publicación.

CRP elaboró una primera versión del pensamiento matemático avanzado, desarrolló la primera versión de las barreras de aprendizaje y la primera versión de las conclusiones.

Todos los autores participaron en la lectura, revisión, redacción, edición y aprobación de la versión final.

DECLARACIÓN DE DISPONIBILIDAD DE DATOS

Los datos que respaldan los resultados de este estudio estarán disponibles por EEMO, PMAC, CRP y APP previa solicitud razonable.

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos a la Escuela de Matemática de la Universidad de Costa Rica por incentivar la investigación y la formación continua de los docentes.

CC BY NC ND

Al Dr. Fabián Gutiérrez Fallas, porque su liderazgo en el curso de docencia del Cálculo Diferencial e Integral fue fundamental para el desarrollo de la experiencia que se presentó en este artículo.

5. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Aguirre-Villalobos, E. R., Guzmán, C., y González, L. (2023). Metodología Design Thinking en la enseñanza universitaria para el desarrollo y logros de aprendizaje en arquitectura. *Revista de Ciencias Sociales*, *XXIX*(2), 509-525.

Ardón Chávez, G. A. (2020). *Cálculo II*. McGraw-Hill.

Carroll, J. (2000, 1 de setiembre). Five reasons for scenario-based design. *Interacting with Computers*, *13*(1), 43-60. https://doi.org/10.1016/S0953-5438(00)00023-0

Gasca, J. (2015). Design Thinking. Afrontar los retos con la actitud de un diseñador. *Leaners Magazine, 8*, 22-25. http://www.leanersmag.com/docs/publicaciones/08-design-acting/design-thinking.pdf

Gray, E. y Tall, D. (1991). *Duality, Ambiguity and Flexibility in Successful Mathematical Thinking*. Mathematics Education Research Centre University of Warwick. https://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1991h-gray-procept-pme.pdf

Gutiérrez-Fallas, L.F. (2024, 20 de julio). Diseño de tareas matemáticas fenomenológicas con integración de la tecnología en la formación inicial de profesores de matemática. *Revista Ibero-Americana de Estudos em Educação, Araraquara*, 19(esp.2), 1-24. https://doi.org/10.21723/riaee.v19iesp.2.18999

Izquierdo, M. I., Calero, C. G., y Lázaro, D. G. (2022). Design Thinking, una metodología para fomentar el aprendizaje significativo. *Revista Ingeniería Industrial*, *21*. https://doi.org/10.22320/S07179103/2022.01

Lang, S. (1990). *Cálculo*. Addison-Wesley Iberoamericana.

Larson, R. y Edwards, B. (2023). *Cálculo de varias variables*. Cengage.

Latorre-Cosculluela, C., Vásquez-Toledo, S., Rodríguez-Martínez, A. y Liesa-Orús, M. (2020). Design Thinking: creatividad y pensamiento crítico en la universidad. *Revista Electrónica de Investigación Educativa*, 22, e28, 1-13. https://doi.org/10.24320/redie.2020.22.e28.2917

Piedade, J., Pedro, A. y Matos, J. F. (2018). Cenários de aprendizagem como estratégia de planificação de aulas na formação inicial de professores: o exemplo da área de informática en A. Moser , M. S. C. Alencastro y R. O. Dos Santos (Eds.), *Educação e Tecnologias: professores e suas práticas* (pp. 11-36). Artesanato Educacional.

Puig, O., Diéguez, R., y Torrecilla, R. (2015, octubre-diciembre). Regularidades de la formación matemática en carreras universitarias de Ciencias Económicas. *Multiciencias, 15*(4), 410-416. http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=90448465007

Sanmartín, R. (2023). El Pensamiento Matemático Avanzado en el contexto de la Educación Media Superior. *Revista ISCEEM*, *1*(2). http://revista.isceem.edu.mx/index.php/revista/article/view/8

Stewart, J., Clegg, D. y Watson, S. (2021). *Cálculo de varias variables*. *Trascendentes tempranas*. CENGAGE.

Sydsaeter, K. y Hammond, P. J. (1996). *Matemática para el análisis económico*. Prentice Hall.

Tall, D. (1996). *Advanced Mathematical Thinking*. Mathematics Education Research Centre, University of Warwick. https://doi.org.10.1007/0-306-47203-1

Tall, D. (2004). Introducing Three Worlds of Mathematics. *For the Learning of Mathematics, 23*(3), 29-33.

Tall, D. y Mejía, J. (2004, julio). *Reflecting on Post-Calculus-Reform*.[Plenaria]. International Congress of Mathematics Education, Copenhagen, Dinamarca. https://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2004b-tall-meija-icme.pdf

Valdivia Sepúlveda, C. y Parraguez González, M. (2015). Un modelo cognitivo para la comprensión profunda de la regla de la cadena. *Paradígma*, *36*(2), 146-176. http://ve.scielo.org/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1011-22512015000200008&lng=es&tlng=es