



IA EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS

AI IN MATHEMATICAL PROBLEM-SOLVING

Alexánder Hernández¹

 ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0001-6342-3914>

RESUMEN

Esta investigación se centra en analizar la capacidad de una inteligencia artificial generativa, denominada o1, para analizar problemas matemáticos de manera reflexiva en un escenario de formación docente que utiliza herramientas digitales de forma coordinada. A partir de un problema matemático previamente trabajado en un seminario de docentes, se interactúa con o1 para realizar las distintas fases de la resolución de problemas. Prestando especial atención a la aproximación dinámica con GeoGebra y como o1 se resuelve en este contexto. Los hallazgos indican que, si bien o1 puede generar propuestas estructuradas y promover la reflexión matemática, también comete errores que requieren una evaluación crítica por parte del usuario. Se concluye que la IA puede ser una herramienta útil para facilitar el análisis de problemas por parte de los docentes, siempre y cuando se reflexione sobre sus respuestas haciendo uso de los conocimientos matemáticos y de la experiencia en la práctica docente.

Palabras clave: Inteligencia artificial generativa, resolución de problemas matemáticos, formación docente

ABSTRACT

This research focuses on analysing the capability of a generative artificial intelligence, named o1, to reflectively analyse mathematical problems within a teacher training scenario that utilizes digital tools in a coordinated manner. Starting from a mathematical problem previously worked on in a teacher seminar, interaction with o1 is conducted to carry out the different phases of problem solving, paying special attention to the dynamic approach with GeoGebra and how o1 performs in this context. The findings indicate that, although o1 can generate structured proposals and promote mathematical reflection, it also makes errors that require critical evaluation by the user. It is concluded that AI can be a useful tool to facilitate problem analysis by teachers, provided that its responses are reflected upon using mathematical knowledge and practical teaching experience.

Keywords: Artificial intelligence, Mathematical problem solving, Teacher training.

¹ Universidad de La Laguna, La Laguna, Código Postal 38207, Santa Cruz de Tenerife, España. Correo electrónico: alexander.hernandez@ull.edu.es

1. INTRODUCCIÓN

La integración de la resolución de problemas matemáticos, el uso de herramientas digitales y la irrupción de la inteligencia artificial (IA) en el entorno educativo conforman un nuevo escenario para la enseñanza de las matemáticas. Investigaciones previas han destacado cómo herramientas como GeoGebra facilitan la exploración de problemas, permitiendo la generación de conjeturas y la identificación de propiedades matemáticas que no suelen aparecer en enfoques tradicionales basados en lápiz y papel (Santos-Trigo & Camacho-Machín, 2013; Jacinto & Carreira, 2017; Hernández, Perdomo-Díaz, & Camacho-Machín, 2019). Estas y otras herramientas digitales han influenciado en los procesos de enseñanza-aprendizaje, ofreciendo nuevas oportunidades para enriquecer la comprensión matemática.

Con la aparición de aplicaciones que incorporan asistencia de IA, especialmente tras el lanzamiento de ChatGPT en noviembre de 2022, surge la necesidad de investigar cómo estas herramientas pueden influir en la resolución de problemas matemáticos. La IA automatiza procesos, genera enfoques innovadores personalizables y abre un nuevo campo para la experiencia educativa. Es esencial comprender tanto sus ventajas como sus limitaciones en contextos de resolución de problemas, para aprovechar estas oportunidades.

Para este reporte de investigación se realizó una experiencia de resolución y formulación de problemas asistidos por una inteligencia artificial generativa y se presenta una reflexión sobre su uso. Se pretende contribuir al entendimiento de cómo la IA generativa puede ser utilizada por docentes de Matemáticas, con el fin de que pueda ser incorporada en la enseñanza de las matemáticas en Educación Primaria y Secundaria.

2. ELEMENTOS CONCEPTUALES

A continuación, detallamos las ideas clave que envuelven la investigación. Comenzando con la resolución de problemas y el uso coordinado de las herramientas digitales, para luego, presentar una terminología básica relacionada con el uso de IA.

2.1 Resolver problemas como una actividad matemática

El término problema de matemáticas hace referencia a una tarea no rutinaria (Pólya, 1945). Esta definición tiene un carácter relativo, lo que es un mero ejercicio para una persona puede ser un problema para otra (Schoenfeld, 1985). Es más, para que se active el proceso de resolución de problemas, es necesario que haya alguien, o un grupo, interesado en buscar la solución (Santos-Trigo & Camacho-Machín, 2013). ¿Cuál es objeto de resolver el problema? Si sólo interesa dar con una solución, se buscará una forma eficiente de dar una respuesta correcta. Ahora, si el problema se usa para comenzar una actividad de indagación matemática, estamos ante un proceso más complejo. El uso de la tecnología combinado con la segunda opción permite enriquecer las discusiones, establece conexiones intramatemáticas y provoca la aparición de nuevas preguntas (Santos-Trigo & Camacho-Machín, 2013; Jacinto & Carreira, 2017).

Dentro de este escenario general, se puede concretar que en un contexto docente se efectúa la resolución de problemas como una actividad de preparación. Cuya finalidad principal será adelantarse a lo que pueda ocurrir en el aula posteriormente, pero, también, valorar las posibilidades de la tarea o su dificultad. En este sentido, tanto para el profesorado en activo como para el profesorado en formación “la resolución de problemas usando tecnología

ofrece una oportunidad para desarrollar la comprensión matemática necesaria en la Educación Secundaria” (Hernández, Perdomo-Díaz, & Camacho-Machín, 2019).

Las ventajas de abordar los problemas por múltiples aproximaciones han sido nombradas por distintas investigaciones (Gómez-Arciga & Poveda-Fernández, 2017; Santos-Trigo & Reyes-Martínez, 2018) señalando que el uso de tecnología facilita este proceso, así como estrategias que no aparecen si no se usan herramientas digitales. Indicando, entre otras conclusiones, que para aprovechar dichas ventajas en un entorno de enseñanza-aprendizaje es necesario realizar un uso coordinado de la tecnología.

2.2 Uso coordinado de las herramientas digitales

Actualmente, si dispones de un dispositivo con conexión a internet, se puede acceder a diversas aplicaciones y plataformas que permiten la indagación en Matemáticas. Están las que se diseñaron específicamente para ello, como Wolfram Alpha, GeoGebra, Desmos o Delta-Math y otras en las que se incluyen las Matemáticas dentro del resto de contenidos. Hay repositorios de contenido abierto, por ejemplo, Wikipedia que funciona de manera enciclopédica. Existen plataformas de autoformación, como Khan Academy o Brilliant, donde se encuentran los contenidos organizados por áreas de conocimiento, que permiten encontrar recursos multimedia ordenados por nivel de dificultad y profundización. Además, se pueden encontrar canales en plataformas (YouTube, Twitch, Amautas...) y grupos en redes sociales (Instagram, Pinterest, Telegram...) dedicados a las matemáticas de cualquier nivel. A la hora de plantear una actividad de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas, se deben tener en cuenta las posibilidades de las herramientas digitales y coordinar su uso como parte de la actividad.

Santos-Trigo et al. (2022) proponen el uso de un muro digital (*digital wall*) como una herramienta para coordinar los aprendizajes con el uso de la tecnología. Este muro digital es un espacio donde los estudiantes pueden registrar sus experiencias de aprendizaje. Este puede realizarse con diferentes estructuras dependiendo de la plataforma virtual que se utilice, podría ser parte del cuaderno de clase en Teams o diseñarse como un libro digital en GeoGebra. En cualquier caso, es una herramienta con la que se realiza un seguimiento detallado del aprendizaje y permite: documentar, monitorear y reflexionar sobre su progreso en la resolución de problemas matemáticos. De esta forma, un muro digital se convierte en una plataforma de colaboración, donde el aprendizaje y la autoevaluación se desarrollan de forma integrada.

El marco conceptual mencionado se estructura con tres elementos esenciales (Santos-Trigo et al, 2022, pp. 32-33): un enfoque de resolución de problemas que motive la búsqueda de múltiples representaciones y aproximaciones, el uso de diversas herramientas digitales y la capacidad para plantear y discutir preguntas y soluciones (Figura 1):

- Un *enfoque en resolución de problemas* para respaldar la enseñanza y el aprendizaje. Donde se abordan las matemáticas como un proceso activo de cuestionamiento, exploración y resolución de problemas que se abordan profundizando en los conceptos, usando recursos y desde varias estrategias. Las tareas son el medio para que las múltiples aproximaciones a la resolución desarrollen el pensamiento matemático.
- Uso coordinado y sistemático de *recursos*, herramientas digitales y plataformas en línea, como GeoGebra, WolframAlpha, Khan Academy o YouTube. Que permiten

representar, explorar y resolver problemas matemáticos, además de poder compartir ideas y comunicar resultados.

- *Soporte* en línea para el planteamiento de preguntas y obtención de retroalimentación de compañeros y profesores. Para ello, hay diferentes espacios de interacción (foros de discusión, correos electrónicos o chats) donde se pueden ampliar perspectivas y reforzar los procesos de aprendizaje.

Figura 1. Estructura de un muro digital con un enfoque en la resolución de problemas.



Fuente: Traducido por el autor a partir de Santos-Trigo, Reyes-Martínez y Gómez-Arciga (2022, p. 33).

Las conclusiones de Santos-Trigo et al. (2022, pág. 50) destacan que:

Aquí, un muro digital se convierte en una herramienta central para que los estudiantes registren y monitoreen su propio aprendizaje. Así, los tres componentes del marco conceptual distinguen los referentes para estructurar los muros individuales: un enfoque de resolución de problemas que respalde el trabajo de los estudiantes, el uso coordinado de las ventajas tecnológicas, incluidas aquellas asociadas con la representación y exploración de modelos dinámicos (GeoGebra), y el apoyo y la retroalimentación que los estudiantes podrían recibir de los docentes y compañeros.

Es fundamental explorar cómo integrar las IA en los elementos del modelo, aprovechando sus capacidades para ofrecer retroalimentación inmediata, generar ideas para el abordaje de problemas y tener la capacidad de representar varios papeles como recurso, soporte o resolutor.

2.3 Sobre la IA

Esta sección omite cualquier polémica que se ha generado por la aparición de la IA y que ha sido discutida en varios medios de comunicación y en gran cantidad de artículos

científicos (González-Alcaide, 2024, pp. 11-13). Vamos a partir de la hipótesis de que la integración de IA generativa en el aula permitirá que los estudiantes empleen esta tecnología en el desarrollo de su pensamiento matemático. Nos interesa indagar en cómo funciona de forma genérica las aplicaciones que la utilizan y como es actualmente la interacción con ella.

González-Alcaide (2024) señala la importancia de las *inteligencias artificiales generativas* en el escenario educativo. En ellas se incluyen *chatbots*, creadores de arte digital, generadores de textos, imágenes y contenido multimedia a partir de modelos entrenados con datos masivos. Basada en el aprendizaje automático, la IA generativa aplica algoritmos para reconocer patrones, aprender de datos y realizar tareas complejas, destacando el procesamiento del lenguaje con grandes modelos de lenguaje. Este autor explica como los chatbots textuales, como ChatGPT, se basan en estos modelos de lenguaje de aprendizaje profundo que analizan patrones para generar respuestas coherentes. Utilizando datos matemáticos y estadísticos, calculan probabilidades de palabras sucesivas en función del contexto, mejorando su precisión con cada nueva interacción. ChatGPT, por ejemplo, funciona con una estructura que permite analizar dependencias entre palabras para lograr coherencia en el texto. Este modelo aprovecha tres características: generación de contenido, preentrenamiento con datos extensivos y una red neuronal profunda, que reconoce secuencias complejas en lenguaje natural (González-Alcaide, 2024, pág. 25-29). Esta elección estocástica no está libre de los sesgos que puedan contener sus bases de datos, es más, la aceptación o no de sus respuestas, por parte de los usuarios, retroalimenta a la red neuronal. De esta manera “ajusta” sus respuestas al usuario que se las solicita. En la Tabla 1 hay parte de un glosario de términos asociados al uso de la IA.

Tabla 1. Glosario de términos asociados al uso de las herramientas de inteligencia artificial generativa.

Término	Definición
<i>Alucinación</i>	Término utilizado para referir los casos en los que los chatbots generan información aparentemente correcta, verosímil e incluso plausible, pero que es falsa o inexistente. Generalmente, se produce en los datos numéricos, fechas, referencias bibliográficas o enlaces, debido a la naturaleza probabilística de los grandes modelos de lenguaje.
<i>Contexto</i>	Conjunto de información utilizada para generar los contenidos, que incluye, además de la entrada o instrucción (prompts) que se realiza, todos los textos y contenidos generados como respuesta a peticiones previas.
<i>Entrada (prompt)</i>	Instrucción introducida en una aplicación de inteligencia artificial generativa de forma textual u oral con el propósito de que genere una respuesta. Puede adoptar la forma de una pregunta, de petición de información o de exhortación para desarrollar una acción, pudiendo acompañarse en algunas aplicaciones de documentos o imágenes.

Fuente: 1 d. C. (después de ChatGPT): Inteligencia artificial generativa en la educación superior (González-Alcaide, 2024).

3. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

Las herramientas digitales utilizadas en esta experiencia son GeoGebra y o1-preview (lo llamaremos o1 a partir de ahora). Como hemos indicado GeoGebra permite resolver problemas desde una aproximación dinámica y genera una reflexión matemática ideal para un enfoque basado en la indagación. La IA generativa o1 es del tipo chatbot, lo que permite que los usuarios puedan interactuar con ella usando un lenguaje natural. En consecuencia, las discusiones y retroalimentaciones que se generan se realizan de forma más directa y rápida.

Esta primera evaluación es un ejercicio de autorreflexión, como investigador me pongo en el papel de usuario. A partir de un problema trabajado previamente en un seminario de docentes, interactué con o1 para indagar en cada una de las fases de la resolución de problemas, buscar diferentes estrategias, revisar los procesos matemáticos, dar una respuesta al problema original y plantear nuevos problemas relacionados. Con esta información, y en un ejercicio de analogía, reflexiono sobre el marco presentado por Santos-Trigo et al. (2022), el muro digital queda alojado en el espacio de almacenamiento personal y los tres elementos serían:

- Un *enfoque en resolución de problemas* para respaldar la enseñanza y el aprendizaje. Similar al expuesto, pero con la particularidad que las personas envueltas en el proceso de aprendizaje son docentes de matemáticas. Buscan reforzar su pensamiento matemático y, también, reflexionar sobre la práctica de aula.
- Uso coordinado y sistemático de *recursos*, específicamente GeoGebra y o1-previewer.
- Un *soporte* en línea para el planteamiento de preguntas y obtención de retroalimentación sincrónica con o1 y una revisión de las respuestas de compañeros.

En definitiva, el problema de investigación trata de realizar una evaluación de la capacidad de aplicación de inteligencia artificial generativa o1 para analizar problemas matemáticos de manera reflexiva.

4. ABORDAJE METODOLÓGICO

4.1 OpenAI o1-previewer

La experiencia se realizó con OpenAI o1-previewer lanzado en septiembre de 2024. Según sus desarrolladores, o1 es un “gran modelo de lenguaje entrenado con aprendizaje de refuerzo para realizar razonamientos complejos” (OpenAI, 2024). La razón de su elección es que promete ser una IA más adaptada a los procedimientos científicos que ha superado varias pruebas (Jones, 2024). Una de estas pruebas fue específica de resolución de problemas matemáticos:

“OpenAI también probó a o1 en un examen de clasificación para la Olimpiada Internacional de Matemáticas. Su mejor modelo anterior, GPT-4o, resolvió correctamente solo el 13% de los problemas, mientras que o1 obtuvo un 83%.” (p. 275)

Otras razones para elegir o1 fueron: ser un modelo de gran lenguaje que permite las interacciones usando expresiones comunes, que la tarea prevista requiere de respuestas

elaboradas y ser de reciente desarrollo por lo que la experiencia fue la más actualizada posible. Una limitación fue que, en el momento de redactar este artículo, o1 no dispone de la capacidad de interactuar con otras aplicaciones de OpenAI o externas.

4.2 Generación del Contexto

La primera tarea es generar un *Contexto* dentro del que se puedan interactuar con o1 para obtener propuestas detalladas en los problemas. La pauta principal fue simular la forma de proceder que se sigue en un seminario de resolución de problemas para docentes de primaria y secundaria. Desde 2008, el *Seminario* se organiza en cada curso escolar.

Este grupo organiza el proceso de resolución de problemas siguiendo las cuatro fases propuestas por Polya (How to solve it?, 1945), que nombrar como: Comprender, Pensar, Ejecutar y Responder. Estas fases se han adaptado desde la investigación a la práctica docente en centros de Educación Primaria y Secundaria (niveles 1-10), especialmente para estudiantes de edades entre los 9 a los 14 años (Rupérez-Padrón & García-Déniz, 2006). Además, buscan desarrollar en el alumnado la habilidad de resolución de problemas, alineándose con la NCTM (National Council of Teachers of Mathematics, 2000). Para lograrlo se plantea la necesidad de resolver cada problema por diferentes estrategias, consiguiendo múltiples caminos a la solución, que permiten desarrollar procesos matemáticos variados y para diferente nivel educativo.

Con el objetivo de trasladar esta pauta de trabajo a o1, se eligió una *Entrada* inicial para indicar que se iba a resolver un problema por fases (Tabla 2).

Tabla 2. Entrada introducida para empezar la resolución con o1.

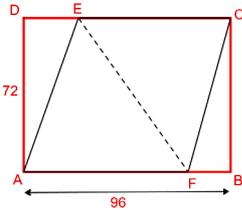
<p>Después te voy a dar el enunciado de un problema. Te doy indicaciones y espera. Hay que resolver este problema de matemáticas siguiendo cuatro fases de resolución. Estas fases como objetivo dar un enfoque de indagación matemática, de forma que resolver cada problema sea una tarea de aprendizaje para desarrollar el pensamiento matemático. Aquí te describo las fases que me gustaría que abordáramos para resolver el problema:</p>
<p>Fase 1: Comprender Hay que indicar claramente los datos del problema, los objetivos y las relaciones entre ellos. Si es necesario, también puedes proponer un diagrama o un esquema para visualizar el problema de manera más clara.</p>
<p>Fase 2: Planificar En esta fase se hace una lista de estrategias posibles para resolver el problema. Hay que dar varias opciones sin detallarlas, el objetivo es considerar la más que interés antes de decidir cuál ejecutar. Los heurísticos a tener en cuenta: modelo físico para que escolares manipulen, ensayo y error, organizar la información, construir modelos en programas de geometría dinámica y otros que valores.</p>
<p>Fase 3: Ejecutar Una vez hayamos decidido qué estrategia seguir, ejecutemos la solución paso a paso. Si algo no funciona, volvemos a la planificación para probar otra estrategia.</p>
<p>Fase 4: Responder Se verifica la solución: Comprobando si cumple con las condiciones originales del problema. Comentamos posibles extensiones o variaciones del problema. Presentemos la solución de manera clara y concisa, de acuerdo con lo que se pidió en la fase de comprensión.</p>

Fuente: Elaboración propia.

4.3 Problema planteado

El problema utilizado se denomina “Un rombo en el rectángulo” y fue propuesto en el Seminario en febrero de 2023. El enunciado del problema incluía una imagen, debido a que o1 no procesa imágenes se añadió al enunciado una descripción de la imagen como *entrada* (Tabla 3).

Tabla 3. Enunciado del problema propuesto en el Seminario y descripción de la imagen para o1.

Un rombo en el rectángulo	
Los lados del rectángulo ABCD miden 72 y 96mm, respectivamente. El polígono AFCE es un rombo. ¿Cuál es la medida de la diagonal EF del rombo?	
Imagen original	Descripción de la imagen para o1
	<p>Hay un rectángulo rojo, sus lados son horizontales y verticales. Los vértices A y B están abajo a izquierda y derecha, respectivamente. Los vértices D y C arriba, a izquierda y derecha.</p> <p>Hay un punto F sobre el lado AB, un punto E sobre el lado CD. Hay un rombo dibujado sobre el rectángulo es el AFCE.</p> <p>Debajo de AB dice 96, a la izquierda de AD dice 72.</p>

Fuente: Elaboración propia.

4.4 Resolución del problema sin IA

El problema se trabajó en el seminario durante unos 45 minutos por parte de los asistentes. Hubo aproximaciones con lápiz y papel y otras con GeoGebra. Tras la sesión, el equipo coordinador comparte una síntesis de las aportaciones de los y las docentes. Este documento y mis propias anotaciones como asistente al seminario son parte del muro digital de esta tarea. En esta sección se reproduce de forma fidedigna la resolución del problema que se produjo en el Seminario.

4.4.1 Fase 1: Comprender

La comprensión del problema se realizó en gran grupo, en ella se puntualizaron los datos, las relaciones y el objetivo (Figura 2). En ella se indicó que parte de la información venía dada en la imagen del problema. Entre la información implícita del problema, se recordó que los rombos y rectángulos son paralelogramos, es decir, los lados opuestos son paralelos y de la misma longitud.

Figura 2. Resumen de la fase 1 presentada en el Seminario.

Fase I Comprender

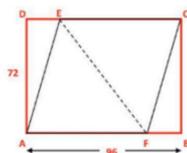
Datos: hay un rectángulo ABCD de lados 72 y 96 mm, en su interior hay un rombo AFCE.

Objetivo: saber la longitud de la diagonal del rombo.

Relación: dos vértices del rectángulo coinciden con los del rombo, dos lados del rombo están sobre los del rectángulo,

Otra información: un rombo tiene los cuatro lados de la misma longitud

Esquema:



Fuente: Equipo de coordinación del Seminario de resolución de problemas 2023.

4.4.2 Fase 2: Pensar

Se nombraron tres posibles estrategias para realizar en la fase siguiente:

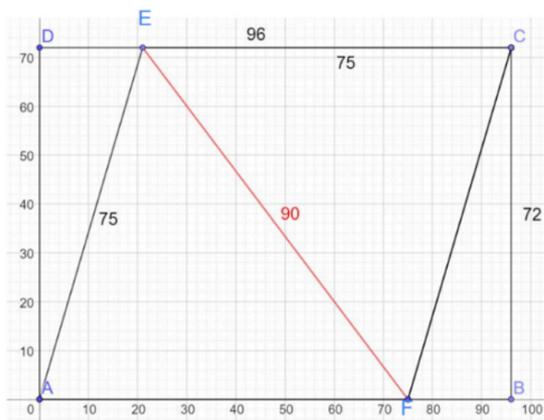
- Modelización del problema en GeoGebra
- Organizar la información con GeoGebra en una aproximación dinámica
- Organizar la información desde la geometría y el uso de razones trigonométricas.

4.4.3 Fase 3. Ejecutar

El modelo elegido fue una construcción de GeoGebra, sobre los ejes cartesianos y la cuadrícula (Figura 3). Se construyó el rectángulo ABCD colocando los vértices en las coordenadas $A = (0,0)$, $B = (96,0)$, $C = (96,72)$ y $D = (0,72)$. De esta manera sus dimensiones coinciden con 96 de largo y 72 de alto. Una vez hecho esto colocan el punto E en el lado CD y trazan dos segmentos AE y CE. Ahora, visualizando el valor de los segmentos (su longitud), pueden arrastrar E sobre CD hasta que ambas longitudes coinciden. De esta manera descubren que el lado del rombo debe medir 75 mm. Colocan en el eje x el punto $F = (75,0)$, por lo que AFCE es un rombo. Trazan el segmento EF y al visualizar su valor, 90. Dan por solución que la diagonal del rombo mide 90mm.

Figura 3. Construcción para la estrategia de modelización.

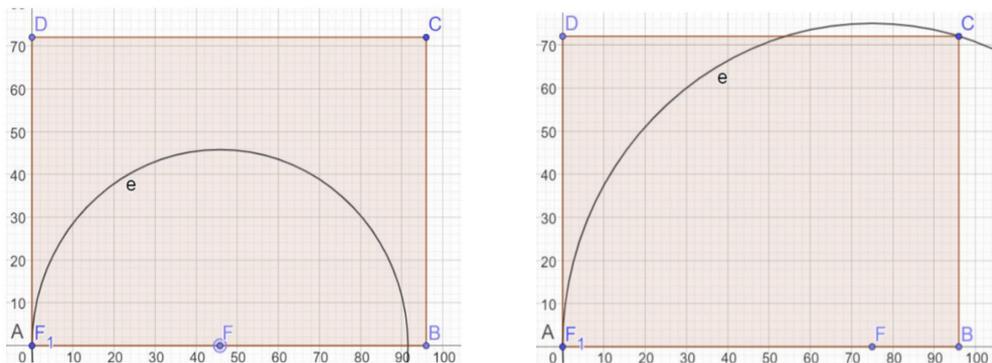
Fase III
Ejecutar



Fuente: Equipo coordinador del Seminario 2023.

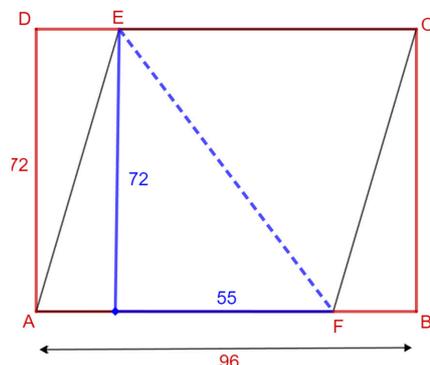
Otra de las aproximaciones presentadas se apoya en GeoGebra comenzando con una construcción similar. Esta vez colocan F sobre el segmento AB y trazan la circunferencia de centro F que pasa por A (Figura 4). Cuando la circunferencia pase por C, los lados AF y FC serán de la misma longitud. Luego, AFCE será un rombo.

Figura 4. Arrastre de F sobre AB.



Fuente: Equipo de coordinación del Seminario de problemas 2023.

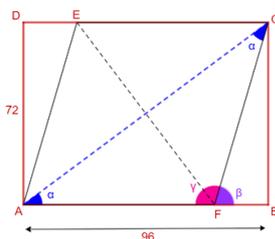
Llegados aquí, se puede comprobar que la longitud de AF es 75 mm y la de FB es 21mm. Con esta nueva información, se puede dibujar un triángulo rectángulo de altura 72 mm y base 55 mm, cuya hipotenusa coincida con la diagonal EF (Figura 5). Después de aplicar el teorema de Pitágoras para el cálculo de la longitud de la hipotenusa, se propone que la solución es 90mm.

Figura 5. Triángulo rectángulo dentro de la imagen inicial.

Fuente: Elaboración propia.

Ambas aproximaciones trabajan con la característica de que un rombo tiene lados de igual longitud, en la segunda conectan esto con que los puntos de una circunferencia son equidistantes al centro. El uso de GeoGebra es meramente instrumental, se podrían los mismos pasos usando regla y compás. Claro que, el arrastre de E y la visualización de los valores de los segmentos facilitan la tarea.

La estrategia que usa razones trigonométricas añade al diagrama la diagonal AC. Observan que ABC forma un triángulo rectángulo y que la diagonal coincide con la bisectriz del ángulo EAF. Así relacionan los ángulos interiores y exteriores del rombo con la longitud de los lados del rectángulo (Figura 6). Para luego, calcular la longitud del segmento FB, y proceder como en la aproximación anterior para dar con la solución, 90mm.

Figura 6. Dedución de la longitud del segmento FB.

$$ABC \text{ es un triángulo rectángulo} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{72}{96} = \frac{3}{4} \quad (1)$$

$$AFC \text{ es un triángulo} \Rightarrow \gamma = \pi - 2\alpha \Rightarrow \beta = \pi - (\pi - 2\alpha) = 2\alpha \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \tan \beta &= \frac{72}{\overline{FB}} \xrightarrow{\text{Por(2)}} \tan 2\alpha = \frac{72}{\overline{FB}} \Rightarrow \frac{2 \cdot \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{72}{\overline{FB}} \xrightarrow{\text{Por(1)}} \\ &\xrightarrow{\text{Por(1)}} \frac{2 \cdot \frac{3}{4}}{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{72}{\overline{FB}} \Rightarrow \overline{FB} = 21\text{mm} \end{aligned}$$

Fuente. Elaboración propia.

Este camino a la solución depende de reconocer varias propiedades geométricas que envuelven a la figura. En este caso, que los ángulos opuestos de un rombo tienen la misma amplitud y que sus bisectrices son las diagonales de este. Además, son necesarios conocimientos de trigonometría para relacionar las longitudes y los ángulos.

4.4.4 Fase 4: Respuesta

Para realizar la comprobación, se vio la necesidad de verificar que se cumplía la información recogida en la fase 1. Para ello, los docentes indicaron que en las construcciones de GeoGebra se podía verificar que los 4 lados del polígono AECF tienen la misma longitud (caracterización de un rombo), con dos de sus vértices coincidentes con los del rectángulo y los lados horizontales descansan sobre los del rectángulo.

Además, reflexionan sobre la posibilidad de que hubiera otra solución, indicando que es única, ya que al arrastrar E se observó que sólo se podía alcanzar en un punto las condiciones. Otra propuesta de trabajo, la hace un asistente, indicando que se podría buscar una construcción robusta, donde se puedan modificar las dimensiones del rectángulo y la figura inscrita fuera siempre un rombo.

Finalmente, escriben la respuesta ya discutida: La diagonal del rombo mide 90 mm.

5. RESULTADOS

Esta sección se dedica a presentar las interacciones con o1 a la hora de realizar la tarea descrita en la sección 4. La estructuraremos siguiendo las fases de resolución de problemas, al igual que se interactuó con el chatbot.

La interacción con o1 comienza con la entrada de la Tabla 2. Se le indica en otra entrada que: “No puedes cambiar de fase hasta que te avise, ahora te voy a dar el enunciado. Puedes realizar la fase 1.”. Luego, se introdujo el enunciado (Tabla 3).

En la Fase 1, o1 presentó una lista detallada de datos, objetivo y relaciones. Además, incluyó instrucciones para la visualización. Al revisarla, pude observar que incluyó alguna información poco relevante y repetitiva, por ejemplo, “A: abajo a la izquierda” como dato o “Base horizontal: $AB = CD = 96 \text{ mm}$ ” como relación cuando ya lo había puesto en dato. Le solicité que reescribiera esta parte, señalando que parte deseaba eliminar. La respuesta de o1 después de haberla refinado está en la Tabla 4. Este proceso de refinamiento de la respuesta es habitual a la hora de utilizar una inteligencia artificial generativa, la parte humana interactúa revisando lo expuesto por la IA y verifica su validez.

Tabla 4. Respuesta de o1 para la fase de Comprender.

Fase 1: Comprender

Datos del problema:

- Rectángulo ABCD:
 - Lados horizontales AB y CD miden 96 mm.
 - Lados verticales AD y BC miden 72 mm.
- Puntos adicionales:
 - F es un punto sobre el lado AB.
 - E es un punto sobre el lado CD.
- Rombo AFCE:
 - Formado por los puntos A, F, C y E.

Objetivo:

- Calcular la medida de la diagonal EF del rombo AFCE.

Relaciones entre los datos:

- Propiedades del rombo:
Todos los lados son iguales.
Las diagonales se cortan en el punto medio y son perpendiculares.
Las diagonales bisecan los ángulos internos.

Visualización:

- Dibujar el rectángulo ABCD con las dimensiones dadas.
- Ubicar el punto F en el lado AB y el punto E en el lado CD de tal manera que al unir A-F-C-E se forme un rombo.
- Identificar las diagonales del rombo: AC (que coincide con una diagonal del rectángulo) y EF (la diagonal que debemos calcular).

Fuente: Reproducido por el autor a partir de la respuesta de o1.

Si nos fijamos, respecto a la propuesta realizada en el seminario, o1 realiza una fase de comprender muy similar. Cabe destacar, que señala que las diagonales son perpendiculares, se cortan en sus puntos medios y que bisecan los ángulos del rombo. Estas dos propiedades pasaron desapercibidas en la fase de comprensión realizada por el profesorado y sólo la de bisección fue usada, posteriormente, en una de las aproximaciones. Si se hubiera surgido esta información de entrada, posiblemente las aproximaciones realizadas en el seminario podrían haber sido otras.

Para realizar la fase de planificar, se escribió la siguiente entrada en o1: “Realiza la fase 2 atendiendo a la primera instrucción.”. De esta manera se consiguió sin más interacciones la respuesta mostrada en la Tabla 5.

Tabla 5. Respuesta de o1 para la fase Planificar.

<p>Fase 2: Planificar A continuación, se presentan varias estrategias posibles para resolver el problema:</p>
<p>Uso de coordenadas cartesianas: Asignar un sistema de coordenadas al rectángulo y expresar las posiciones de los puntos A, B, C, D, E y F. Utilizar las propiedades del rombo para establecer ecuaciones y resolver para la diagonal EF.</p>
<p>Uso de coordenadas cartesianas: Asignar un sistema de coordenadas al rectángulo y expresar las posiciones de los puntos A, B, C, D, E y F. Utilizar las propiedades del rombo para establecer ecuaciones y resolver para la diagonal EF.</p>
<p>Aplicación de propiedades geométricas del rombo y el rectángulo: Utilizar las propiedades conocidas de los rombos (lados iguales, diagonales que se bisecan y son perpendiculares) junto con las dimensiones del rectángulo para encontrar relaciones que permitan calcular EF.</p>

Análisis de triángulos congruentes y semejantes: Identificar triángulos dentro de la figura que sean congruentes o semejantes y utilizar sus propiedades para establecer proporciones y relaciones entre los lados y diagonales.

Construcción de un modelo dinámico: Utilizar software de geometría dinámica como GeoGebra para modelar el problema, manipular los elementos y observar las relaciones que emergen, facilitando así la comprensión y solución del problema.

Organización de la información en tablas o diagramas: Crear tablas que relacionen las medidas conocidas y desconocidas, o diagramas adicionales que ayuden a visualizar las relaciones entre los elementos del problema.

Aplicación de vectores y álgebra lineal: Representar los puntos y vectores asociados para utilizar operaciones vectoriales que permitan calcular la longitud de EF. Estas estrategias ofrecen diferentes enfoques para abordar el problema y encontrar la medida de la diagonal EF del rombo.

Fuente: Reproducido por el autor a partir de la respuesta de o1.

El chat propuso seis estrategias para dar con la solución, al igual que antes o1 evidencia su capacidad para generar una tormenta de ideas bien estructurada. A priori, los caminos propuestos parecen válidos, quizás los menos desarrollados son la estrategia 5 y 6, pero en esta fase se buscaba pensar en ideas para luego poner en práctica. Esto se ha conseguido en la primera interacción, sin necesidad de refinar el proceso.

Antes de seguir con la fase 3, se realizó una pregunta para organizar las estrategias. En un escenario de formación docente, antes de abordar una estrategia de resolución es habitual preguntarse cuál de estos caminos es más conveniente para el alumnado. En la **Tabla 6** se puede leer la respuesta de o1 a la entrada: “¿Qué estrategia de las 6 propuestas sería más adecuada para abordar con estudiantes de matemáticas de entre 9 y 11 años? ¿Cuáles serían para estudiantes mayores?”. Se puede observar como la propuesta de la IA está bien estructurada y plantea una justificación aceptable.

Tabla 6. Respuesta de o1 sobre elección de estrategias.

Para estudiantes de matemáticas de entre 9 y 11 años, es recomendable utilizar estrategias que sean visuales, manipulativas y que no requieran conocimientos avanzados de álgebra o geometría analítica. De las seis estrategias propuestas, las más adecuadas para este grupo serían:

Estrategia 2: Aplicación de propiedades geométricas del rombo y el rectángulo

Esta estrategia utiliza las propiedades básicas de las figuras geométricas, como las medidas de lados y ángulos, que son conceptos accesibles para estudiantes de esta edad. Permite resolver el problema mediante razonamiento geométrico simple.

Estrategia 5: Organización de la información en tablas o diagramas

Crear tablas y diagramas ayuda a los estudiantes a visualizar y organizar la información de manera clara. Esto facilita la comprensión del problema y les permite identificar relaciones entre los datos.

Estrategia 4: Construcción de un modelo dinámico

Aunque requiere recursos adicionales, utilizar herramientas como software de geometría dinámica o incluso construcciones físicas con papel y lápiz puede ser muy efectivo. Los estudiantes pueden manipular el modelo y observar cómo cambian las medidas, lo que enriquece su comprensión.

Para estudiantes mayores, con conocimientos más avanzados en matemáticas, las siguientes estrategias serían más apropiadas:

Estrategia 1: Uso de coordenadas cartesianas

Esta estrategia implica asignar coordenadas a los puntos y utilizar ecuaciones para encontrar la solución. Es adecuada para estudiantes que han estudiado geometría analítica y tienen habilidades algebraicas sólidas.

Estrategia 3: Análisis de triángulos congruentes y semejantes

Requiere un entendimiento más profundo de las propiedades de los triángulos y cómo aplicarlas en la resolución de problemas geométricos complejos.

Estrategia 6: Aplicación de vectores y álgebra lineal

Es apropiada para estudiantes que han aprendido sobre vectores y pueden aplicar operaciones vectoriales en el contexto geométrico.

En resumen, para estudiantes de 9 a 11 años, la Estrategia 2 es la más adecuada, apoyada por la Estrategia 5 para organizar la información y, si es posible, la Estrategia 4 para ofrecer una experiencia más interactiva. Las otras estrategias son más apropiadas para estudiantes mayores que poseen un nivel avanzado en matemáticas y están familiarizados con conceptos como coordenadas cartesianas, vectores y análisis de triángulos.

Fuente: Reproducido por el autor a partir de la respuesta de o1.

A la hora de dar el siguiente paso en el proceso de resolución, se eligió primero la estrategia 4, construcción de un modelo dinámico. La razón es en parte técnica, ya que como se ha mencionado la IA generativa se retroalimenta de la conversación. Y como en el marco que se ha seleccionado el uso de GeoGebra es relevante, se busca una respuesta “sin contaminar”. Dicho de otro modo, que la resolución del problema siguiendo otras estrategias no intervenga en la respuesta que puede dar o1 sobre la construcción dinámica. La entrada para el chat fue: “Desarrolla la fase 3, ejecutar, siguiendo la estrategia 4: Construcción de un modelo dinámico. Indicando los pasos de construcción para GeoGebra y que hacer para dar con la solución usando esta herramienta digital.”. La respuesta completa sin ningún refinamiento se encuentra en la Tabla 7.

Tabla 7. Respuesta de o1 para la aproximación dinámica.

Estrategia 4: Construcción de un modelo dinámico en GeoGebra
<p>Vamos a utilizar GeoGebra para construir el rectángulo y el rombo, y así encontrar la medida de la diagonal EF del rombo AFCE. A continuación, se detallan los pasos para realizar la construcción y obtener la solución:</p>
<p>Paso 1: Dibujar el rectángulo ABCD</p> <ol style="list-style-type: none"> 1, Abrir GeoGebra: Inicia GeoGebra en tu computadora o accede a la versión en línea. 2, Crear los puntos del rectángulo: Punto A: Haz clic en la herramienta “Punto” y coloca el punto A en el origen de coordenadas (0, 0). Punto B: Crea el punto B en el eje x a una distancia de 96 mm de A. Como GeoGebra utiliza unidades estándar, consideraremos 96 unidades. Ingresas B = (96, 0). Punto D: Crea el punto D en el eje y a una distancia de 72 mm de A. Ingresas D = (0, 72). Punto C: Crea el punto C en la posición (96, 72) para completar el rectángulo. 3, Dibujar los lados del rectángulo: Utiliza la herramienta “Polígono” y selecciona los puntos en el siguiente orden: A, B, C, D, y de vuelta a A para cerrar el polígono. <p>Paso 2: Ubicar los puntos F y E para formar el rombo</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Colocar el punto F en el lado AB: Como queremos formar un rombo AFCE, necesitamos que los lados AF y CE sean iguales y paralelos. Para simplificar, coloca el punto F en el lado AB de manera que AF sea igual a AD (72 unidades). Dado que AB mide 96 unidades, esto significa que F estará a una distancia de 24 unidades de B. Ingresas F = (24, 0). 2. Colocar el punto E en el lado CD: De manera similar, coloca el punto E en el lado CD de forma que CE sea igual a AD (72 unidades). Esto significa que E estará a una distancia de 24 unidades de D. Ingresas E = (72, 72). <p>Paso 3: Construir el rombo AFCE</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Verificar los lados iguales: Utiliza “Distancia o longitud” para medir los segmentos AF, FC, CE y EA. Deben ser iguales. Comprueba que $AF = FC = CE = EA = 72$ unidades. 2. Dibujar las diagonales del rombo: La diagonal AC ya está dibujada como parte del rectángulo. Dibuja la diagonal EF uniendo los puntos E y F con la herramienta “Segmento entre dos puntos”. <p>Paso 4: Calcular la medida de la diagonal EF</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Medir la diagonal EF: Utiliza la herramienta “Distancia o longitud” y selecciona el segmento EF. GeoGebra mostrará la longitud de EF en la vista gráfica o en el panel algebraico. 2. Anotar el valor obtenido: Supongamos que GeoGebra muestra que EF = 120 unidades. <p>Paso 5: Verificar que el cuadrilátero AFCE es un rombo</p> <ol style="list-style-type: none"> 3. Comprobar la igualdad de los lados: Asegúrate de que todos los lados del cuadrilátero AFCE miden 72 unidades. 4. Comprobar que las diagonales son perpendiculares: Utiliza la herramienta “Ángulo” para medir el ángulo entre las diagonales AC y EF. Si el ángulo es de 90 grados, las diagonales son perpendiculares, confirmando que AFCE es un rombo.
<p>Conclusión:</p> <ul style="list-style-type: none"> • La medida de la diagonal EF del rombo AFCE es de 120 unidades. • Dado que cada unidad en GeoGebra representa 1 mm, la diagonal EF mide 120 mm.

Explicación adicional:

- Cálculo manual de EF:

Podemos utilizar el teorema de Pitágoras en uno de los triángulos formados por las diagonales del rombo.

Las diagonales del rombo se cortan en su punto medio y son perpendiculares.

La mitad de la diagonal AC mide : $\frac{AC}{2} = \frac{120}{2} = 60$ unidades.

La mitad de la diagonal EF es $\frac{EF}{2}$

La longitud de los lados del rombo es **72 unidades**.

Aplicando el teorema de Pitágoras:

$$\begin{aligned} \left(\frac{AC}{2}\right)^2 + \left(\frac{EF}{2}\right)^2 &= (\text{lado})^2 & 3600 + \left(\frac{EF}{2}\right)^2 &= 5184 & \frac{EF}{2} &= \sqrt{1584} \\ (60)^2 + \left(\frac{EF}{2}\right)^2 &= (72)^2 & \left(\frac{EF}{2}\right)^2 &= 5184 - 3600 & \frac{EF}{2} &\approx 39.8 \\ & & \left(\frac{EF}{2}\right)^2 &= 1584 & & \mathbf{EF \approx 79.6 \text{ unidades}} \end{aligned}$$

Sin embargo, esto no coincide con la medida obtenida en GeoGebra, lo que indica que necesitamos revisar nuestra construcción o cálculos.

Corrección de la construcción:

- Replantear la posición de los puntos E y F:

Es posible que al colocar F y E a 24 unidades de B y D, respectivamente, no obtengamos un rombo perfecto.

Para que AFCE sea un rombo con diagonales AC y EF, necesitamos que las diagonales cumplan con las propiedades del rombo.

Calculamos la longitud de AC:

$$AC = \sqrt{(96 - 0)^2 + (72 - 0)^2} = \sqrt{96^2 + 72^2} = \sqrt{9216 + 5184} = \sqrt{14400} = 120 \text{ unidades}$$

Entonces, la diagonal AC mide 120 unidades.

Utilizando el teorema de Pitágoras para encontrar EF:

$$\begin{aligned} 2 \times \text{Área del rombo} &= AC \times EC \\ \text{Área del rombo} &= \frac{(\text{lado})^2 \times \sin(\theta)}{\sin(90^\circ)} \end{aligned}$$

Sin embargo, para simplificar, volvamos a GeoGebra y ajustemos la posición de F y E para que las diagonales cumplan las propiedades del rombo.

Paso final: Ajuste en GeoGebra

1. Usar la herramienta “Mediatriz”:

Dibuja la mediatriz del segmento AC.

El punto de intersección con el segmento BD (que en este caso coincide con EF) será el centro del rombo.

2. Colocar F y E correctamente:

Asegúrate de que F y E estén ubicados de tal forma que EF sea perpendicular a AC y se crucen en su punto medio.

3. Medir EF nuevamente:

Después de ajustar, mide EF con la herramienta “Distancia o longitud”.

4. Cálculo correcto:

Con los ajustes, **es probable que EF mida 96 unidades**.

Respuesta final:

- La medida de la diagonal EF del rombo AFCE es de 96 mm.

Nota para estudiantes:

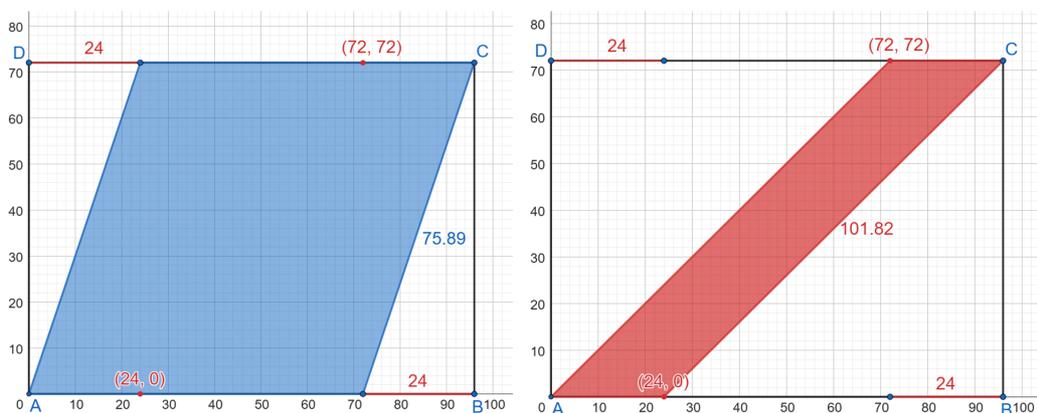
- Al utilizar GeoGebra, es importante entender las propiedades geométricas que rigen las figuras.
- El rombo tiene diagonales que son perpendiculares y se bisecan.
- Asegurarse de que las diagonales cumplan estas propiedades es clave para obtener medidas correctas.

Fuente: Reproducido por el autor a partir de la respuesta de o1.

En primer análisis general de la respuesta, hay que señalar que o1 sigue una estructura que podemos dividir en: instrucciones de construcción, explicación adicional, corrección de la construcción y una propuesta final de solución. En un primer vistazo, parece que el proceso redactado por o1, es un buen camino para la aproximación dinámica. Primero plantea trasladar la información del problema al modelo dinámico, incluyendo instrucciones para construir el rectángulo y un posible rombo, además señala la necesidad de medir el segmento EF, que es el objetivo del problema. Luego, propone una revisión de lo hecho basándose en propiedades conocidas análoga a la verificación de la solución o a la fase de revisión propuestas por Schoenfeld (1985, pág. 111) y Mason, Burton y Stacey (1982, pág. 39), respectivamente. Finalmente, hace una propuesta de construcción revisada, da una solución e indicaciones para estudiantes.

Al revisar con detalle la respuesta, se detectan varias *alucinaciones* por parte de o1, señaladas en rojo y en azul en la Tabla 7. En el paso 3, nos encontramos con que indica que F y E deben estar sobre los lados AB y CD a 24 unidades de B y de D, respectivamente. Pero escribe “Ingresa F = (24, 0)” y “Ingresa E = (72, 72)” que contradice lo anterior. Si se siguen las instrucciones dadas por o1, tendríamos dos posibilidades para el polígono AFCE, que se pueden ver en Figura 7. Al representarlos, es evidente que la instrucción más cercana a la búsqueda es la primera, siendo un error las instrucciones donde especifica las coordenadas. Como punto a favor, propone herramientas de control, en el paso 3 indica “Comprueba que AF = FC = CE = EA” y en ningún caso se verifica. Por un lado, o1 genera errores, pero siguiendo sus propias indicaciones los podemos detectar.

Figura 7. Rombo inscrito que se construyen siguiendo las instrucciones de o1 en el Paso 2 .

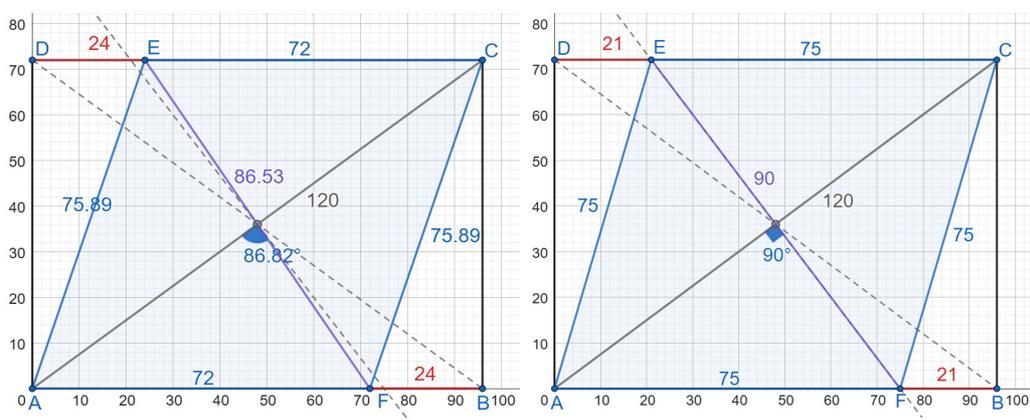


Fuente: Elaboración propia.

Otra alucinación evidente, es la que realiza en el apartado *Corrección de la construcción* (Tabla 7), donde indica que va a aplicar el teorema de Pitágoras y a continuación escribe dos ecuaciones, una relacionada con el área del rombo y otra que se podría tildar de “sin sentido”. Debido a que los procesos internos del chatbot no son visibles para un usuario estándar, cualquier intento de buscar la razón de este error sería especulativa. Lo que si demuestra este tipo de *alucinación* es que al usar una IA generativa hay que tener una visión crítica que permita valorar las respuestas. En este caso en concreto, es necesario un conocimiento matemático que permita desechar esta parte de su propuesta.

Para terminar con el análisis de los errores generados por o1, hay que fijarse en una serie de afirmaciones falsas que están relacionadas entre sí (en color azul). En un momento de su argumentación (Paso 2 y 4, Tabla 7) realiza una suposición para la longitud del lado del rombo y de la diagonal EF. Hay que fijarse, en que uno de los valores aparece en el enunciado (72 es la longitud de unos de los lados del rectángulo) y el otro es la distancia de la diagonal de AC, que se puede calcular aplicando el teorema de Pitágoras (para el triángulo ABC conocidas las longitudes 96 y 72 de los catetos). Realizar suposiciones es un paso válido en un proceso de ensayo y error, pero se comete una falta de rigor matemático al tomar esos valores como ciertos. o1 no los registra como valores de prueba, por lo menos no explícitamente, sino que los toma como parte de la solución. Este tipo de alucinación se repite en el paso final, afirma que es probable que EF sea de 96 unidades (valor que aparece en el enunciado) y luego toma este valor como solución final.

Figura 8. Arrastre se E y F para encontrar la solución.



Fuente. Elaboración propia.

Ya se señaló que o1 comete errores que se pueden detectar siguiendo sus propias indicaciones. Otro ejemplo se encuentra en el Paso final (Tabla 7). Aquí o1 propone añadir nuevos elementos a la construcción inicial: la mediatriz de AC, su punto medio y el ángulo entre EF y AC. Este último elemento no lo añade explícitamente, pero si indica la necesidad de registrar cuando EF es perpendicular a AC. Al incluir estos elementos, cuando se arrastran E y F para conseguir la perpendicularidad de las diagonales se observa que la solución correcta es 90 mm y no 96 (Figura 8).

Figura 9. Extracto de la respuesta de o1 al solicitar una repetición de la construcción dinámica.

Paso 3: Dibujar la diagonal EF perpendicular a AC y pasando por M

1. Ecuación de la recta perpendicular a AC pasando por M:

- Utiliza la fórmula de la recta:

$$y - y_M = m_{\text{perp}}(x - x_M)$$

Sustituyendo los valores:

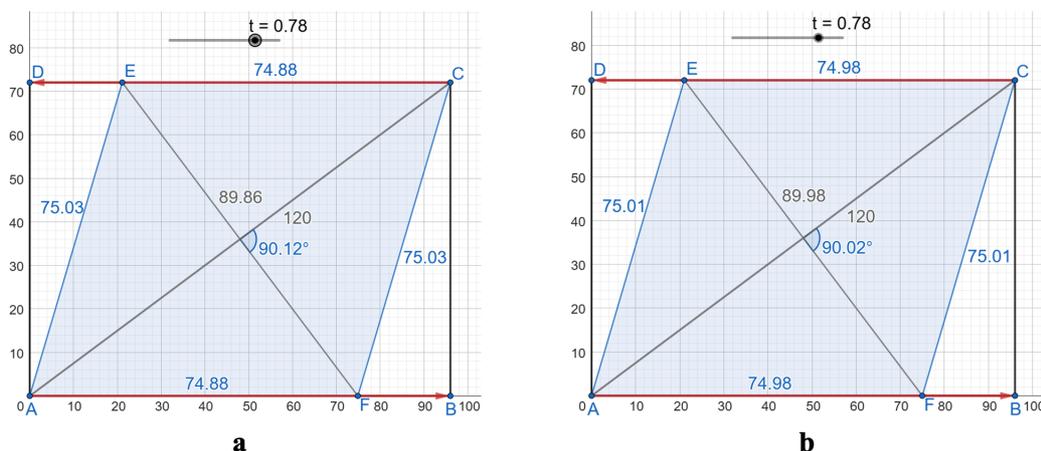
$$y - 36 = -\frac{4}{3}(x - 48)$$

Fuente: Captura de pantalla de la respuesta de o1

Retomando las interacciones con o1, tras ver que la respuesta mostrada contenía errores, se decidió corregirlos, para lograr refinar la estrategia. Se requirieron dos entradas de instrucciones, en la primera se detalló una lista de los errores cometidos y solicitó repetir la estrategia de construcción dinámica. La respuesta de o1 no fue la esperada, realizando una aproximación analítica usando ecuaciones de rectas para hallar los puntos (Figura 9). Al alejarse de lo esperado se introdujo la siguiente entrada: “Te has alejado mucho de la construcción dinámica, se trata de que se realice con GeoGebra sin realizar una resolución de ecuaciones paralelamente.”. Aquí o1 rehace totalmente su propuesta original,

En la tercera respuesta de o1 para la estrategia dinámica se reconocen varias partes: instrucciones de construcción, exploración de la construcción y reflexiones sobre el proceso.

En la construcción aparece la inclusión de un deslizador que permita variar de forma ordenada y exhaustiva el rombo $AECF$. Este deslizador es un factor entre 0 y 1 que modifica la longitud de dos vectores, \overrightarrow{AB} y \overrightarrow{CD} . Esto permite definir E y F de manera que los segmentos AF y CE siempre tienen la misma longitud. El chat o1 propone realizar una exploración de los atributos de la construcción. Tras hacer visuales los valores de la longitud de los lados del rombo se debe variar el deslizador y encontrar el valor en que las cuatro longitudes coinciden (o son muy cercanas). Luego propone verificar que es un rombo, comprobando que las diagonales son perpendiculares y que se cortan en el punto medio de ambas. Una vez logrado esto, señala que basta registrar la longitud de EF para dar con la solución. Si reproducimos los pasos que indica o1 en GeoGebra (Tabla 8-Pasos 1, 2 y 3), observamos como efectivamente alcanzamos una buena aproximación (Figura 10 a).

Figura 10. Construcción dinámica incluido un deslizador.

Fuente: Elaboración propia.

Ahora sí, o1 informa de que el valor alcanzado de esta manera será una aproximación y da el valor estimado de 90 mm. Finaliza la respuesta con reflexiones, consejos y una conclusión, todas ellas con perspectiva educativa. De entre estas afirmaciones, hay un consejo referido a mejorar la aproximación modificando el incremento del deslizador. Si se sigue, se alcanza una mejor aproximación (Figura 10 b).

Tabla 8. Respuesta de o1 para la aproximación dinámica refinada.

Fase 3: Ejecutar

Estrategia 4: Construcción de un modelo dinámico en GeoGebra

Vamos a utilizar GeoGebra para construir el rectángulo y el rombo, explorando de forma dinámica cómo determinar la medida de la diagonal EF del rombo AFCE. Nos centraremos en los pasos de construcción y en cómo utilizar la herramienta para encontrar la solución, sin realizar resoluciones de ecuaciones en paralelo.

Paso 1: Dibujar el rectángulo ABCD

Abrir GeoGebra: Inicia GeoGebra en tu computadora o accede a la versión en línea en geogebra.org.

Crear los puntos del rectángulo:

- Punto A: Utiliza la herramienta “Punto” para colocar el punto A en el origen, ingresando (0, 0).
- Punto B: Crea el punto B ingresando las coordenadas (96, 0).
- Punto C: Crea el punto C ingresando las coordenadas (96, 72).
- Punto D: Crea el punto D ingresando las coordenadas (0, 72).

Dibujar el rectángulo: Utiliza la herramienta “Polígono” y selecciona los puntos A, B, C, D, y nuevamente. A para cerrar el polígono.

Paso 2: Colocar los puntos F y E

Crear un deslizador para controlar la posición de F: Selecciona la herramienta “Deslizador” y crea un deslizador llamado t, con valores desde 0 hasta 1, incrementos de 0.01.

Definir el punto F en el lado AB:

En la entrada de GeoGebra, define el punto F como:

$$F = \text{Punto}(A + t \times \overrightarrow{AB})$$

Esto posiciona el punto F en el lado AB, donde t = 0 corresponde a A y t = 1 corresponde a B.

Definir el punto E en el lado CD:

Define el punto E de manera que se mueva simétricamente a F pero en el lado CD:

$$E = \text{Punto}(C - t \times \overrightarrow{CD})$$

Esto asegura que cuando F se mueve desde A hacia B, E se mueve desde C hacia D.

Paso 3: Construir el rombo AFCE

Dibujar los lados del rombo: Utiliza la herramienta “Segmento entre dos puntos” para crear los lados:

AF: Une A y F, FC: Une F y C, CE: Une C y E, EA: Une E y A.

Visualizar el rombo:

- Observa cómo, al mover el deslizador t, el cuadrilátero AFCE cambia de forma.
- Nuestro objetivo es encontrar el valor de t donde AFCE es un rombo.

Paso 4: Explorar dinámicamente para formar el rombo

1. Medir las longitudes de los lados:

- Utiliza la herramienta “Distancia o longitud” para medir los segmentos AF, FC, CE y EA.
- Crea etiquetas que muestren estas longitudes en la pantalla.

2. Buscar la igualdad de los lados:

- Ajusta el deslizador t hasta que las cuatro longitudes sean iguales o muy cercanas en valor.
- Esto indica que el cuadrilátero AFCE tiene todos sus lados iguales, una propiedad del rombo.

3. Verificar la perpendicularidad de las diagonales:

- Dibuja las diagonales AC y EF (AC: Une A y C, EF: Une E y F).
- Utiliza la herramienta “Ángulo” para medir el ángulo entre las diagonales en su punto de intersección.
- Cuando el ángulo es de 90 grados, las diagonales son perpendiculares, otra propiedad del rombo.

4. Confirmar la bisección de las diagonales:

- Encuentra el punto de intersección O de las diagonales AC y EF utilizando la herramienta “Intersección de dos objetos”.
- Mide las distancias desde O hasta los extremos de cada diagonal para confirmar que O es el punto medio.

Paso 5: Determinar la medida de la diagonal EF

1. Medir la longitud de EF:

- Utiliza la herramienta “Distancia o longitud” para medir el segmento EF.
- GeoGebra mostrará la longitud actual de EF en la pantalla.

2. Anotar el valor de EF cuando AFCE es un rombo:

- Una vez que los cuatro lados son iguales y las diagonales son perpendiculares y se bisecan, anota la medida de EF.
- Por ejemplo, puedes encontrar que $EF \approx 90$ mm.

Paso 6: Concluir y responder

Respuesta: La medida de la diagonal EF del rombo AFCE es aproximadamente 90 mm.

Reflexión sobre el proceso:**Exploración interactiva:**

- Este método permite a los estudiantes explorar de manera interactiva las propiedades geométricas del rombo.
- Al ajustar el deslizador t , pueden observar cómo las medidas cambian y cómo se satisfacen las condiciones para formar un rombo.

Comprensión visual:

- Sin recurrir a cálculos algebraicos, los estudiantes desarrollan una comprensión intuitiva de cómo las posiciones de E y F afectan la forma del cuadrilátero.

Validación de propiedades:

- La verificación de la igualdad de los lados y de las propiedades de las diagonales refuerza el conocimiento de las características distintivas del rombo.

Consejos adicionales:**Precisión en el valor de t :**

- Para obtener un valor más preciso de t donde AFCE es un rombo, puedes ajustar el incremento del deslizador a un valor más pequeño, como 0.001.
- También puedes ingresar valores numéricos directamente en el deslizador para refinar la posición.

Uso de herramientas automáticas:

- GeoGebra ofrece herramientas como “Regular Polygon” (Polígono Regular) que pueden ayudar a construir figuras con lados iguales, pero en este caso, seguimos un enfoque que enfatiza la exploración y comprensión de las relaciones en el rectángulo dado.

Documentación del proceso:

- Anima a los estudiantes a tomar notas sobre sus observaciones durante la manipulación del modelo, fomentando habilidades de registro y análisis.

Conclusión:

Al utilizar GeoGebra para construir y explorar dinámicamente el rectángulo y el rombo, hemos encontrado que la diagonal EF del rombo $AFCE$ mide aproximadamente 90 mm. Este enfoque permite a los estudiantes visualizar y comprender profundamente las propiedades geométricas involucradas, promoviendo un aprendizaje activo y significativo sin la necesidad de resolver ecuaciones algebraicas.

Fuente: Reproducido por el autor a partir de la respuesta de o1.

Sin entrar a valorar otros aspectos de redundancia de algunas afirmaciones o si las reflexiones y consejos son los más adecuados, se puede observar que en la respuesta de o1 tras las interacciones de refinamiento (Tabla 8), no se detectan otras *alucinaciones*. Si es cierto, que debido a que o1 no puede interactuar con otros programas, al dar la solución 90 mm, realmente no la ha construido con el razonamiento redactado. Posiblemente, se ha basado en el resto de las interacciones o correcciones de la conversación. Como usuario no podemos saber cómo la construyó. Insisto en esta idea para recordar que la manera de generar las respuestas de esta IA generativa no viene dada completamente por un razonamiento deductivo formal. Además, si se siguen las instrucciones dadas, se puede realizar una construcción dinámica que permite visualizar los atributos del problema y encontrar la solución. Sin olvidar que en la redacción de la respuesta se invita a la indagación de propiedades de la figura y a llevar la actividad al aula. Con ayuda de o1 se han generado unas instrucciones de construcción, unas recomendaciones para la exploración y una propuesta de solución, que conforman una guía de la aproximación dinámica o, simplemente, *guía*. Paralelamente, en GeoGebra se han realizado construcciones dinámicas que han servido para evaluar la información dada por o1. Dos de estas construcciones, tienen todos los elementos necesarios para dar con la solución. En definitiva, se ha añadido al muro digital relacionado con el problema “Rombo en rectángulo” una *guía* y dos construcciones en GeoGebra correspondientes a la estrategia de aproximación dinámica.

Al comparar estos resultados con las construcciones dinámicas realizadas por docentes en el seminario. Se pueden ver cómo se repiten algunos patrones de construcción, claro que el razonamiento de los docentes se realiza visualmente, mientras o1 lo está infiriendo de sus bases de datos. En cualquier caso, ambas visiones se complementan, lo que parece indicar que introducir el uso de IA como apoyo en los seminarios podría ser de interés.

El resto de las estrategias que se plantearon en la fase de planificar, también se ejecutaron usando o1-previewer. Se siguió el orden que el mismo o1 propuso para la elección de estrategias según la edad del alumnado (Tabla 6). La entrada para que ejecutara cada una de ellas siguió siempre la estructura “Desarrolla la fase 3, ejecutar, siguiendo la estrategia k . Sin tener en cuenta lo realizado en las estrategias anteriores.”, señalando en cada caso el valor de k .

Figura 11. Ecuaciones que surgen a partir de igualar la longitud de los lados.

Para que AFCE sea un rombo, todas las longitudes deben ser iguales:

1. $AF = FC$:

$$x = \sqrt{(96 - x)^2 + 72^2}$$

2. $FC = CE$:

$$\sqrt{(96 - x)^2 + 72^2} = |96 - x'|$$

3. $CE = EA$:

$$|96 - x'| = \sqrt{x'^2 + 72^2}$$

Fuente: Captura de pantalla de la respuesta de o1.

Los procesos matemáticos llevados a cabo son similares en las estrategias 1, 2 y 6. Desde caminos diferentes plantea ecuaciones basadas en la igualdad de distancia de los lados del rombo (Figura 11). La resolución del sistema de ecuaciones lo lleva a la solución.

Para la estrategia 5, o1 redacta una aproximación que pasa por construir un modelo a escala, en el que hay que tomar medidas usando una la regla. Es una versión análoga a la construcción dinámica, en la que se añade como heurístico realizar una tabla de registro de ensayo y error (Tabla 9).

Tabla 9. Parte de la respuesta de o1 para ejecutar la estrategia 5.

Paso 4: Medir y comparar las longitudes de los lados						
Creación de una tabla de mediciones:						
Posición de F (mm desde A)	Posición de E (mm desde D)	Longitud AF (mm)	Longitud FC (mm)	Longitud CE (mm)	Longitud EA (mm)	¿Es un rombo?
24 mm
36 mm
48 mm
60 mm
72 mm
Instrucciones:						
1. Medir AF:						
<ul style="list-style-type: none"> • Es la distancia desde A hasta F. • Como estás usando una escala, mide directamente en tu dibujo. 						
2. Determinar la posición de E:						
<ul style="list-style-type: none"> • Intenta encontrar E de manera que FC tenga la misma longitud que AF. • Mide la distancia FC (desde F hasta C). 						
3. Medir CE y EA:						
<ul style="list-style-type: none"> • Mide las distancias CE (desde C hasta E) y EA (desde E hasta A). 						
4. Verificar si AFCE es un rombo:						
<ul style="list-style-type: none"> • Comprueba si las cuatro longitudes son iguales. • Si lo son, anota “SI” en la columna “¿Es un rombo?”. 						

Fuente: Reproducido por el autor a partir de la respuesta de o1.

La estrategia 3, análisis de triángulos congruentes y semejantes, se refinó debido a que muchas de los procesos eran redundantes. Primero, pidiendo que diera menos pasos y, al ver que seguía siendo demasiado extensa, se le indicó que relaciones de todas las que presentaba eran suficientes para esta aproximación. Finalmente, redactó una versión adecuada basada en la semejanza de dos triángulos rectángulos ABC y AOF (O punto de corte de AC y EF) como se le había solicitado.

En las resoluciones de cada estrategia, o1 vuelve a destacar por seguir una estructura ordenada y aparentemente veraz. Dando una respuesta correcta en todos los casos. Estas estrategias se caracterizan por que pueden ser desarrolladas en un aula sin necesidad de usar herramientas digitales. Las respuestas que o1 ha generado para cada una de ellas parte de un enfoque diferente y sirven para reflexionar sobre las conexiones intramatemáticas. Claro está, que para ello hay que contar con unos conocimientos básicos sobre geometría, geometría analítica y álgebra. Ya que, inicialmente hay que evaluar las respuestas del chatbot y refinarlas. Para, a continuación, poder establecer conexiones entre los diferentes elementos matemáticos que aparecen. Estas interacciones y las respuestas refinadas serán, también, parte del muro digital del problema.

Para terminar la conversación con o1 se introduce una entrada para que desarrolle la fase Responder. De esta manera, se genera una respuesta final: “La medida de la diagonal EF del rombo AFCE es 90 mm”, escribiendo previamente una verificación de que la figura final es un rombo (lados de 75mm y diagonales perpendiculares). Al incluir las instrucciones (Tabla 2) que en esta fase se deben proponer extensiones o variaciones del problema, o1 redacta 5 propuestas para su investigación (Tabla 10). Las tres primeras, son preguntas aptas para investigar con una construcción dinámica: Variar las dimensiones del rectángulo, arrastrar E y F para indagar sobre la variación de propiedades e inscribir otras figuras en el rectángulo. Para cualquiera de ellas es interesante plantearse que cambios hay que realizar en la construcción para poder investigar lo solicitado. Cabe preguntarse ¿es posible hacer una construcción para analizar todo en conjunto? De esta manera, seguiría el proceso de indagación y realización de conjeturas, que es la semilla para formular nuevos problemas a partir del problema inicial.

Tabla 10. Parte de la respuesta de o1 para la fase Responder.

Posibles extensiones o variaciones del problema:
<p>1. Variar las dimensiones del rectángulo:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Explorar cómo cambia la medida de la diagonal EF si modificamos las dimensiones del rectángulo ABCD. Por ejemplo, ¿qué sucede si el rectángulo mide 80 mm por 60 mm?
<p>2. Cambiar la posición de los puntos F y E:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Investigar cómo afecta la posición de F en AB y E en CD a la forma y propiedades del rombo AFCE. ¿Es posible formar otros rombos dentro del mismo rectángulo?
<p>3. Analizar otras figuras geométricas:</p> <ul style="list-style-type: none"> • En lugar de un rombo, intentar formar un cuadrado o un paralelogramo dentro del rectángulo y calcular sus diagonales y áreas.
<p>4. Aplicación en contextos reales:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Aplicar el problema a situaciones prácticas, como el diseño de estructuras arquitectónicas o patrones en arte y decoración.
<p>5. Extender al espacio tridimensional:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Considerar la creación de un sólido geométrico, como un prisma romboidal, utilizando el rombo AFCE como base y analizar sus propiedades volumétricas.

Fuente: Reproducido por el autor a partir de la respuesta de o1

6. REFLEXIONES

A lo largo del artículo se ha mostrado una experiencia con o1 al resolver un problema de matemáticas. El *contexto* elegido tiene un enfoque en la resolución de problemas para respaldar la enseñanza y el aprendizaje (Santos-Trigoet al., 2022) y las repuestas del chatbot se han estructurado siguiendo las premisas de un seminario de docentes y las cuatro fases de resolución de problemas (Rupérez-Padrón & García-Déniz, 2006; Pólya, 1945). Se ha prestado

una especial atención a cómo *o1* argumenta sobre una aproximación a la solución en la que se usa una construcción dinámica en GeoGebra. Cómo esta IA no interactúa con GeoGebra, ha sido el autor quién ha interactuado y seguido las instrucciones para visualizar si la propuesta de *o1* era válida.

Fruto de esta experiencia, se ha mostrado que interactuar con una inteligencia artificial generativa requiere de realizar un proceso de refinamiento de sus respuestas. Esto involucra conocimientos matemáticos previos sobre los elementos que intervienen en el problema. Además, se requiere cierta destreza en el manejo de GeoGebra, para poder trasladar las instrucciones a una construcción dinámica. El profesorado de matemáticas con alguna experiencia en el uso de GeoGebra cumple estos requisitos. Por lo que, *o1* es una herramienta válida que se puede incorporar en la formación continua y a la preparación de recursos docentes.

Respecto a las ventajas que puede aportar *o1*. La herramienta demostró una notable capacidad para generar ideas y estrategias diversas en las fases de planificar y ejecutar. Al refinar sus respuestas se logra obtener nuevos recursos que pasan a formar parte del muro digital del profesorado. En la experiencia se obtuvo una guía de la aproximación dinámica, una propuesta para modelizar con papel y otras cuatro estrategias detalladas que implicaban diferentes áreas de las matemáticas. Esto se consiguió usando 19 entradas por parte del usuario, y con un tiempo total de ejecución procesamiento por parte de *o1* de 6 minutos aproximadamente. Lo que significa que practicando este proceso el usuario podría generar una gran cantidad de recursos, donde el límite está en su propia capacidad de revisión de respuestas.

Por otro lado, *o1* puede tener un rol de soporte. La interacción con el chatbot se puede utilizar como parte de la indagación matemática. ¿Por qué son perpendiculares las diagonales de un rombo? ¿Es cierto que el centro del rectángulo y el rombo coinciden? ¿Cómo sabes que esos triángulos son semejantes? Son preguntas que surgieron al revisar las estrategias ejecutadas. La capacidad de *o1* para emitir respuestas detalladas y adaptadas a las interacciones de un usuario lo convierten en un agente interactivo de la enseñanza y aprendizaje. Esta experiencia se acerca a la que se puede tener con un compañero de estudios o un profesor.

En conclusión, en un escenario de formación docente y uso coordinado de las herramientas digitales, la inteligencia artificial puede usarse como generadora de recursos para un problema matemático. Y también, se puede convertir en un foro interactivo para la indagación matemática donde el uso coordinado de otras herramientas digitales enriquece el proceso. Esto plantea un reto adicional, cómo incluir en Educación Primaria y Secundaria estas herramientas para fomentar una resolución y formulación de problemas más interactiva y reflexiva.

DECLARACIONES SOBRE EL USO DE IA

Se declara que el autor de este trabajo hizo uso de herramientas que usan inteligencia artificial generativa. Específicamente: las respuestas de *o1*-previewer fueron objeto de estudio y el ChatGPT se utilizó como herramienta de corrección de estilo gramatical, como asistente de traducción y para generar síntesis de ideas propias del autor.

Para respetar y proteger la autoría académica se contrató el paquete Team de la compañía OpenAI, que garantiza que no utiliza los datos introducidos en su plataforma para formar sus modelos de IA.



DECLARACIÓN DE DISPONIBILIDAD DE DATOS

Los datos que respaldan los resultados de este estudio están custodiados por el autor (Alexánder Hernández) y están disponibles previa solicitud razonable.

AGRADECIMIENTOS

Se agradece la financiación suministrada por el proyecto de investigación de referencia PID2022-139007NBI00 aprobado por el MCIN/AEI/10.13039/501100011033/ FEDER, UE. Y la subvención que financia las ayudas para esta estancia de movilidad que dicta el Ministerio de Universidades y la Universidad de La Laguna en la Orden de 6 de noviembre de 2023 del Ministro de Universidades, con aplicación presupuestaria 1804032326.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Camacho-Machín, M., Moreno, M., & Afonso, M. C. (2014). Hacia la elaboración de un marco metodológico para la formación de profesores de Secundaria haciendo uso de Software de Geometría Dinámica. En *Formación del profesorado e investigación en Educación Matemática* (Vol. 11, págs. 9-22,45-66).
- Gómez-Arciga, A., & Poveda-Fernández, W. (2017). El uso de tecnologías digitales en actividades que extienden la discusión matemática de los estudiantes. En *Tópicos Selectos de Educación en CITEM* (págs. 65-84). La Libertad.
- González-Alcaide, G. (2024). *I d. C. (después de ChatGPT): Inteligencia artificial generativa en la educación superior*. Universidad de Valencia.
- Hernández, A., Perdomo-Díaz, J., & Camacho-Machín, M. (2019 a). Mathematical understanding in problem solving with GeoGebra: a case study in initial teacher education. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. doi:10.1080/0020739X.2019.1587022
- Hernández, A., Perdomo-Díaz, J., & Camacho-Machín, M. (2019). Mathematical understanding in problem solving with GeoGebra: a case study in initial teacher education. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. doi:10.1080/0020739X.2019.1587022
- Jacinto, H., & Carreira, S. (2017). Mathematical Problem Solving with Technology: the Techno-Mathematical Fluency of a Student-with-GeoGebra. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 1115-1136. doi:10.1007/s10763-016-9728-8
- Jones, N. (2024). 'In awe': scientists impressed by latest ChatGPT model o1. *Nature*, 634, 275-276. doi:https://doi.org/10.1038/d41586-024-03169-9
- Kieran, C., Krainer, K., & Shaughnessy, J. (2013). Linking Research to Practice: Teachers. En M. (. Clements, A. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick, & F. K. Leung (Edits.), *Third International Handbook of Mathematics Education* (Vol. 27, págs. 361-392). New York: Springer International Handbooks of Education. doi:10.1007/978-1-4614-4684-2_12
- Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (1982). *Thinking Mathematically*. Addison-Wesley Publishing Company.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principios y estándares para la educación matemática (M. Fernández Reyes, Trad.)*. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.
- OpenAI. (21 de 10 de 2024). *openai.com*. Obtenido de <https://openai.com/index/learning-to-reason-with-llms/>
- Pólya, G. (1945). *How to solve it?* Princeton: Princeton University Press.

- Rupérez-Padrón, J. A., & García-Déniz, M. (2006). Problemas comentados (XVI). *Números*(65), 5-12. Obtenido de https://scpmmluisbalbuena.org/revista_numeros/065/
- Santos-Trigo, M., & Camacho-Machín, M. (2013). Framing the use of computational technology in problem solving approaches. *The Mathematical Enthusiast*, 10(1&2), 279-302
- Santos-Trigo, M., & Reyes-Martínez, I. (2018). High school prospective teachers' problem-solving reasoning that involves the coordinated use of digital technologies. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. doi:10.1080/0020739X.2018.1489075
- Santos-Trigo, M., Reyes-Martínez, I., & Gómez-Arciga, A. (2022). A conceptual framework to structure remote learning scenarios: a digital wall as a reflective tool for students to develop mathematics problem-solving. *International Journal of Learning Technology*, 17(1), 27-52. doi:<https://doi.org/10.1504/IJLT.2022.123686>
- Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving*. New York: Academic Press.



