

INGENIERÍA DIDÁCTICA

Edison De Faria Campos

www.cimm.ucr.ac.cr/edefaria

Centro de Investigaciones Matemáticas y Meta-Matemáticas

Universidad de Costa Rica

Asociación de Matemática Educativa

Resumen

En este artículo presentaremos una metodología de investigación denominada ingeniería didáctica, la cuál se utiliza para analizar situaciones didácticas, y daremos algunos ejemplos de investigaciones realizadas utilizando esta metodología.

Abstract

In this article we shall present a research methodology called didactical engineering, which is used to analyze instructional situations, and we shall give some examples of research carried out using this methodology.

Palabras clave

Educación Matemática, Didáctica, Matemática, Pedagogía.

La ingeniería didáctica surgió en la didáctica de las matemáticas francesa, a principios de los años ochenta, como una metodología para las realizaciones tecnológicas de los hallazgos de la teoría de Situaciones Didácticas y de la Transposición Didáctica. El nombre surgió de la analogía con la actividad de un ingeniero quien, según Artigue (1998, p. 33):

“Para realizar un proyecto determinado, se basa en los conocimientos científicos de su dominio y acepta someterse a un control de tipo científico. Sin embargo, al mismo tiempo, se encuentra obligado a trabajar con objetos mucho más complejos que los depurados por la ciencia y, por lo tanto, tiene que abordar prácticamente, con todos los medios disponibles, problemas de los que la ciencia no quiere o no puede hacerse cargo.”

En realidad el término ingeniería didáctica se utiliza en didáctica de las matemáticas con una doble función: como metodología de investigación y como producciones de situaciones de enseñanza y aprendizaje, conforme mencionó Douady (1996, p. 241):

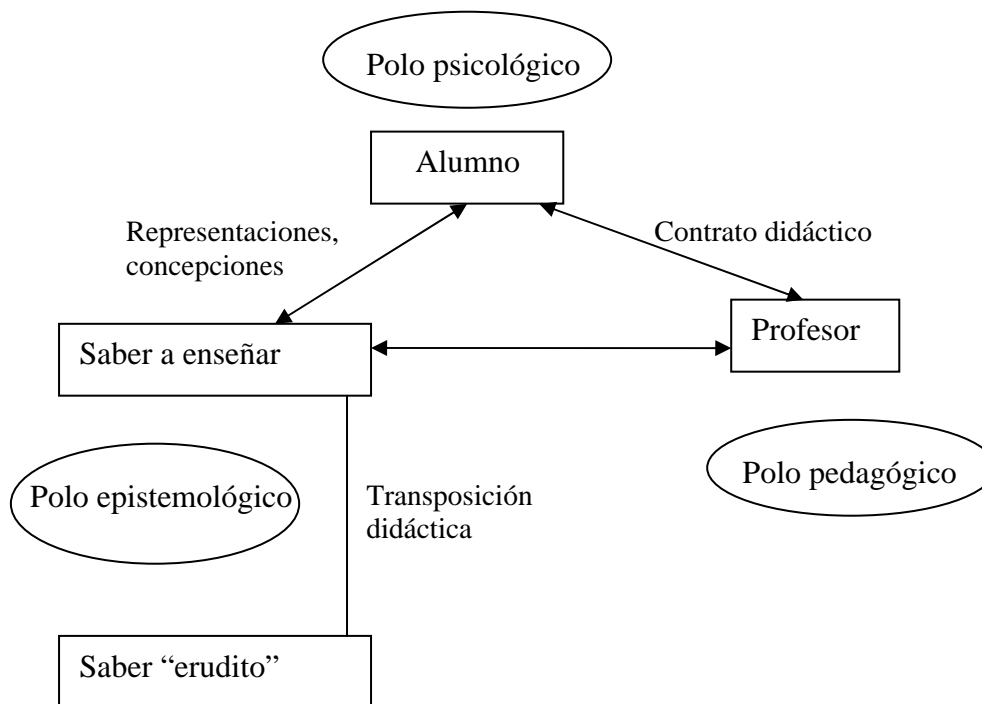
“... el término ingeniería didáctica designa un conjunto de secuencias de clase concebidas, organizadas y articuladas en el tiempo de forma coherente por un profesor-ingeniero para efectuar un proyecto de aprendizaje de un contenido matemático dado para un grupo concreto de alumnos. A lo largo de los intercambios entre el profesor y los alumnos, el proyecto evoluciona bajo las reacciones de los alumnos en función de las decisiones y elecciones del profesor. Así, la ingeniería didáctica es, al mismo tiempo, un producto, resultante de un análisis *a priori*, y un proceso, resultante de una adaptación de la puesta en

funcionamiento de un producto acorde con las condiciones dinámicas de una clase.”

Artigue (1998, p. 40) distingue varias dimensiones ligadas a los procesos de construcción de ingenierías didácticas:

- Dimensión epistemológica: asociada a las características del saber puesto en funcionamiento.
- Dimensión cognitiva: asociada a las características cognitivas de los alumnos a los que se dirige la enseñanza.
- Dimensión didáctica: asociada a las características del funcionamiento del sistema reenseñanza.

Como mencionamos anteriormente, el sustento teórico de la ingeniería didáctica proviene de la teoría de situaciones didácticas (Brousseau, 1997) y la teoría de la transposición didáctica (Chevallard, 1991), que tienen una visión sistémica al considerar a la didáctica de las matemáticas como el estudio de las interacciones entre un saber, un sistema educativo y los alumnos, con objeto de optimizar los modos de apropiación de este saber por el sujeto (Brousseau, 1997).



INGENIERÍA DIDÁCTICA COMO METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN

Como metodología de investigación la ingeniería didáctica se caracteriza:

1. Por un esquema experimental basado en las “realizaciones didácticas” en el aula, es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza.
2. Por el registro de los estudios de caso y por la validación que es esencialmente interna, basada en la confrontación entre el análisis *a priori* y *a posteriori*.

En el primer caso se distinguen, por lo general, dos niveles de ingeniería didáctica, dependiendo de la importancia de la realización didáctica involucrada en la investigación:

- Nivel de micro-ingeniería.

Las investigaciones a este nivel son las que tienen por objeto el estudio de un determinado tema. Ellas son locales y toman en cuenta principalmente la complejidad de los fenómenos en el aula.

- Nivel de macro-ingeniería

Son las que permiten componer la complejidad de las investigaciones de micro-ingeniería con las de los fenómenos asociados a la duración de las relaciones entre enseñanza y aprendizaje.

Los dos niveles de investigación son importantes y se complementan. Las investigaciones de micro-ingeniería son más fáciles de llevar a la práctica, mientras que las investigaciones de macro-ingeniería, a pesar de todas las dificultades metodológicas e institucionales, son indispensables.

FASES DE LA METODOLOGÍA DE LA INGENIERÍA DIDÁCTICA

El proceso experimental de la ingeniería didáctica consta de cuatro fases:

1. Primera fase: Análisis preliminares.
2. Segunda fase: Concepción y análisis *a priori* de las situaciones didácticas.
3. Tercera fase: Experimentación.
4. Cuarta fase: Análisis *a posteriori* y evaluación

Los análisis preliminares

Para la concepción una ingeniería didáctica son necesarios análisis preliminares respecto al cuadro teórico didáctico general y sobre los conocimientos didácticos adquiridos y relacionados con el tema. Los análisis preliminares más frecuentes son (Artigue, 1998 p. 38):

- El análisis epistemológico de los contenidos contemplados en la enseñanza
- El análisis de la enseñanza tradicional y sus efectos.
- El análisis de las concepciones de los estudiantes, de las dificultades y obstáculos que determinan su evolución.
- El análisis del campo de restricciones donde se va a situar la realización didáctica.

Todo lo anterior se realiza teniendo en cuenta los objetivos de la investigación, y como comenta Artigue: a pesar de que esta serie de análisis no se evidencia en las publicaciones, los trabajos que el investigador ha realizado como pilares de su ingeniería se retoman y profundizan en el transcurso de las diferentes fases de la misma, en función de las necesidades sentidas. Por lo tanto, los estudios preliminares tan sólo mantienen su calidad de “preliminares” en un primer nivel de elaboración.

Según Artigue, en los trabajos publicados, con frecuencia no intervienen de manera explícita todas las diferentes componentes de análisis mencionadas anteriormente y que un excelente ejercicio de didáctica consiste en identificar, en un trabajo específico, las dimensiones privilegiadas y tratar de buscarles su significación didáctica *a posteriori*.

Concepción y análisis *a priori* de las situaciones didácticas

En esta segunda fase el investigador toma la decisión de actuar sobre un determinado número de variables del sistema que no estén fijadas por las restricciones. Estas son las *variables de comando* que él percibe como pertinentes con relación al problema estudiado.

Artigue distingue dos tipos de variables de comando:

- Variables macro-didácticas o globales
- Concernientes a la organización global de la ingeniería.
- Variables micro-didácticas o locales
- Concernientes a la organización local de la ingeniería, o sea, la organización de una secuencia o fase.

Ambas variables pueden ser generales o bien dependientes del contenido didáctico en el que se enfoca la enseñanza. Es importante resaltar que las selecciones globales, aunque se presenten separadas de las selecciones locales, no son independientes de ellas.

Como mencionamos anteriormente, la validación en ingeniería didáctica es esencialmente interna. Desde la fase de concepción se inicia el proceso de validación, por medio del análisis *a priori* de las situaciones didácticas de la ingeniería. Este análisis *a priori* se debe concebir como un *análisis de control de significado*. Esto quiere decir que;

“Si la teoría constructivista sienta el principio de la participación del estudiante en la construcción de sus conocimientos a través de la interacción de un medio determinado, la teoría de las situaciones didácticas que sirve de referencia a la metodología de la ingeniería ha pretendido, desde su origen, constituirse en una teoría de control de las relaciones entre el significado y las situaciones.” (Artigue 1998, p. 44)

Por lo tanto, el objetivo del análisis *a priori* es determinar en qué las selecciones hechas permiten controlar poscomportamientos de los estudiantes y su significado. Por lo anterior, este análisis se basa en un conjunto de hipótesis. La validación de las mismas está indirectamente en juego en la confrontación que se lleva a cabo en la fase cuatro, entre el análisis *a priori* y el análisis *a posteriori*.

Artigue argumenta que tradicionalmente este análisis *a priori* comprende una parte descriptiva y una predictiva, y se debe:

- Describir las selecciones del nivel local (relacionándolas con las selecciones globales) y las características de la situación didáctica que de ellas se desprenden.
- Analizar qué podría ser lo que está en juego en esta situación para un estudiante en función de las posibilidades de acción, de selección, de decisión, de control y de validación de las que él dispone, una vez puesta en práctica en un funcionamiento casi aislado del profesor.
- Prever los campos de comportamientos posibles y se trata de demostrar cómo el análisis realizado permite controlar su significado y asegurar, en particular, que los comportamientos esperados, si intervienen, sean resultado de la puesta en práctica del conocimiento contemplado por el aprendizaje.

Por lo que hemos mencionado, en el análisis *a priori* el estudiante es tomado en cuenta en ambos niveles, descriptivo y predictivo, mientras que el profesor no interviene sino en un nivel descriptivo. Así, el estudiante es el actor principal del sistema y el profesor está poco presente en el análisis *a priori*, excepto durante las situaciones de devolución y de institucionalización. Artigue menciona que, de alguna forma, la noción de contrato didáctico permite recuperar en parte el papel del profesor, pero que no se

puede negar que hasta el momento el profesor ocupa siempre un papel marginal en la teorización didáctica.

Experimentación

Es la fase de la realización de la ingeniería con una cierta población de estudiantes. Esa etapa se inicia en el momento en que se da el contacto investigador/profesor/observador con la población de los estudiantes objeto de la investigación.

La experimentación supone:

- La explicitación de los objetivos y condiciones de realización de la investigación a los estudiantes que participarán de la experimentación;
- El establecimiento del contrato didáctico;
- La aplicación de los instrumentos de investigación;
- El registro de observaciones realizadas durante la experimentación.

Es recomendable, cuando la experimentación tarda más de una sesión, hacer un análisis *a posteriori* local, confrontando con los análisis *a priori*, con el fin de hacer las correcciones necesarias.

Durante la experimentación se busca respetar las selecciones y deliberaciones hechas en los análisis *a priori*.

Análisis *a posteriori* y evaluación

Esta es la última fase de la ingeniería didáctica. Esta fase se basa en el conjunto de datos recolectados a lo largo de la experimentación, es decir, las observaciones realizadas de las secuencias de enseñanza, al igual que las producciones de los estudiantes en el aula o fuera de ella. Estos datos se completan con otros obtenidos mediante la utilización de metodologías externas: cuestionarios, entrevistas individuales o en pequeños grupos, realizadas durante cada sesión de la enseñanza, etc.

La validación o refutación de las hipótesis formuladas en la investigación se fundamenta en la confrontación de los análisis, el *a priori* y *a posteriori*.

Según Artigue,

“En la mayoría de los textos publicados concernientes a ingenierías, la confrontación de los dos análisis, *a priori* y *a posteriori*, permite la aparición de distorsiones. Estas están lejos de ser siempre analizadas en términos de validación; esto es, no se busca en las hipótesis formuladas aquello que las distorsiones constatadas invalidan. Con frecuencia, los autores se limitan a proponer modificaciones de ingeniería que pretenden reducirlas, sin comprometerse en realidad con un proceso de validación.”

Las hipótesis mismas que se formulan explícitamente en los trabajos de ingeniería son a menudo hipótesis relativamente globales que ponen en juego procesos de aprendizaje a largo plazo. Por esto, la amplitud de la ingeniería no permite necesariamente involucrarse en verdad en un proceso de validación. (Artigue, 1998, p. 49)

EJEMPLO DE INGENIERÍA DIDÁCTICA

En este acápite describiremos un ejemplo del uso de la metodología de investigación conocida como ingeniería didáctica.

Un ejemplo construido para la función 2^x

Aguilar, Farfán, Lezama y Moreno (1991) realizaron investigaciones sobre el estudio de la función 2^x , que consistieron en el diseño, puesta en escena y análisis de resultados de una secuencia de actividades encaminadas a que los estudiantes construyeran la noción de función exponencial, favoreciendo la realización de ciertas acciones encaminadas a la generalización de ciertas propiedades de la función mencionada.

Análisis preliminar

Se desarrolla desde una perspectiva sistémica, es decir, haciendo consideraciones que toman en cuenta en todo momento a la institución (profesor), el estudiante y el saber matemático en juego y las relaciones entre ellos.

a. Análisis epistemológico

Se procede a mostrar en el contexto del desarrollo histórico de la construcción de la noción de función exponencial, que ésta ha estado estrechamente ligada a la noción de logaritmo.

Se identifican en el proceso de construcción de la función exponencial, las siguientes dificultades:

- para elevar números a distintas potencias, cada tipo de número que se maneje impondrá retos distintos y en ocasiones será difícil de interpretar el significado de la operación,
- para identificar la naturaleza y estructura en la función exponencial (estructura, creciente, forma de crecimiento y la justificación del trazo continuo de su representación gráfica),
- para identificar la relación con la función logarítmica.

b. Análisis didáctico

El concepto de función es una de las principales nociones de la matemática. Varias investigaciones muestran como la enseñanza del concepto de función en las etapas iniciales del aprendizaje del cálculo es problemática.

Usualmente, para abordar a la función logaritmo se hace a través de la exponencial pues se define una como la inversa de la otra, relegando así a la exponencial a un papel intermediario. La definición formal de la función logaritmo se dará hasta que el estudiante aprenda cálculo, a saber, después del tema de integración.

Como los enfoques aritmético y funcional, para las funciones mencionadas, se muestran ajenos, se requiere el establecimiento de un puente entre ambos enfoques del concepto. Previo a ello es necesario construir alguna de las dos como función y es en ese aspecto donde se orienta el diseño de la secuencia. Se hace la construcción para el caso particular $y = 2^x$.

c. Análisis de las concepciones de los estudiantes

Una vez que se ha visto que es posible hacer una construcción geométrica de la función 2^x , el interés se centra en conocer las concepciones que tienen los estudiantes respecto a esta función. Se elabora un cuestionario con el propósito de *tener un primer*

acercamiento a las concepciones que los estudiantes tienen sobre la función 2^x , y compuesto por las siguientes preguntas:

Tenemos la expresión algebraica 2^x .

- ¿Qué significa?
- ¿Siempre se puede calcular? De ejemplos.
- Calcule la expresión para $x = 2, 3, 4, 20, 0, -1, -2, -3, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, -1/3$.
- -¿Es posible encontrar algún valor de x para el cual 2^x resulte negativa?
- ¿Es posible encontrar algún valor de x para el cual 2^x sea igual a 50?
- ¿Puede representarse gráficamente la expresión? Explique.
- ¿Es posible encontrar valores de x que hagan que 2^x resulte mayor que 50, que 500, 5000? Explique.
- ¿Conoce un fenómeno o situación que requiera de la expresión 2^x ?

El cuestionario fue aplicado a estudiantes de bachillerato y de licenciatura en carreras afines a las ingenierías. Los resultados fueron los siguientes:

- 2^x es una operación solo para los enteros ya que interpretan 2^x como multiplicar 2 por si mismo x veces.
- Cuando $x < 0$ no hay una interpretación uniforme para 2^x como lo muestran las siguientes respuestas: $2^{-3} = .002$, $2^{-3} = (-2)(-2)(-2) = -8$, $2^{-3} = 1/2^3$.
- Si x no es entero, 2^x es solamente una notación. No son números que pueden ser calculados pues carecen de un algoritmo para ello y sólo se pueden obtener una aproximación con la ayuda de la calculadora.

Posteriormente se procede a diseñar la secuencia didáctica cuyos objetivos son:

- Proporcionar un proceso geométrico de construcción de puntos de la gráfica de la función 2^x , así como analizar regularidades propias de la función.
- Confrontar la concepción espontánea de que 2^x es evaluable sólo cuando x es entero.

Análisis a priori

- Los estudiantes evaluarán a 2^x , cuando x no es entero, asociándola con magnitudes de segmentos rectilíneos.
- Los estudiantes identificarán la naturaleza creciente de la función al comparar los segmentos rectilíneos obtenidos por métodos geométricos.
- El diseño se compone de tres etapas:
- Primera etapa: proporciona los conocimientos geométricos para obtener raíces y productos, empleando respectivamente la altura del triángulo rectángulo inscrito en una semicircunferencia y semejanza de triángulos. (situación de acción)
- Segunda etapa: Se aplican los conocimientos de la primera etapa para construir seis puntos de la gráfica de la función 2^x en el intervalo $[0,2]$. (situaciones de acción y de formulación)
- Tercera etapa: Por medio de tablas de 2^x se tratan de obtener regularidades que la caractericen. (situaciones de acción, formulación y validación).

Experimentación

Las tres etapas se desarrollaron en una sola sesión, cada etapa de trabajo consistió en una hora de trabajo en equipo por una hora de discusión grupal. Se formaron 5 equipos de 3 estudiantes cada uno, acompañados por un observador.

Se elaboraron registros escritos, por el observador, además cada equipo escribió un reporte detallado del desarrollo de la actividad. Se cuenta con la grabación de audio por cada etapa y filmación de las discusiones grupales.

Análisis *a posteriori*

- Hubo manipulación del número $2^{1/2}$, ya que los estudiantes hallaron geoméricamente un segmento de magnitud $2^{1/2}$, ubicaron en el plano el punto de coordenadas $(1/2, 2^{1/2})$ y lo utilizaron para encontrar el segmento de magnitud $2^{1/4}$.
- Se abrió la discusión sobre la generalización de a^x , en algunos equipos se preguntaron cómo obtener geoméricamente $2^{1/3}$ y al discutir las regularidades de 2^x algunos estudiantes afirmaron que se podía cambiar el 2 por cualquier número a y las regularidades eran las mismas.
- Al considerar la base a arbitraria, sí tomaron en cuenta los casos en que dicho número fuera 0, 1 o negativo. En el caso de ser $a < 0$ discutieron las dificultades que se presentaban cuando el exponente era $1/2$ o de la forma $1/2^n$, afirmando que el número que se obtenía era complejo y que no se podía graficar.
- La palabra verificar se asoció con demostrar y para algunos estudiantes representó una verdadera dificultad.
- El tomar la unidad en forma arbitraria y no la correspondiente a la escala dada en el dibujo trajo dificultades para unos equipos en el desarrollo de la segunda etapa pues no había correspondencia a los segmentos encontrados y los dados en el dibujo.

Las autoras Farfán y Ferrari (Farfán y Ferrari, 2001) retomaron la investigación anterior para presentar distintas inquietudes surgidas a partir de la misma. Se retomó, para el diseño de la situación, la pregunta ¿cómo hallar $2^{1/3}$ con los procedimientos utilizados? y se aplicó la metodología de ingeniería didáctica.

Algunos de los resultados obtenidos fueron:

- La idea de densidad de números de la forma $p/2^q$ surgió implícitamente para “encerrar” a $1/3$, y así determinar este número sobre el eje x , al momento de graficar 2^x .
- Los estudiantes analizaron lo que ocurría a la derecha e izquierda de $1/3$, identificando un patrón que les permitió crear una única sucesión para aproximarse a $2/3$, argumentándolo tanto aritmética como geoméricamente.
- Se generó la idea de la factibilidad de la construcción de 2^x para todo número x mediante la noción de número real como una aproximación, ya que se establecieron argumentos que explicitaban que $1/3$ era sólo un caso particular para la construcción propuesta. Sin embargo, la naturaleza de la secuencia de actividades propició la aparición del obstáculo del infinito potencial, ya que en la misma no se propone construir un segmento de longitud $2^{1/3}$ (¿cómo superar este obstáculo?).

CONCLUSIÓN

La ingeniería didáctica se fundamenta en las teorías de situaciones didácticas de Brousseau y de transposición didáctica de Chevallard.

En el ejemplo descrito en la sesión anterior podemos notar cómo son utilizadas las distintas fases de la ingeniería didáctica: análisis preliminares; concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas; experimentación y análisis a posteriori con la evaluación.

En los análisis preliminares fueron revisados programas, textos, libros de historia de las matemáticas para los análisis epistemológicos y didácticos, y elaborados cuestionarios para identificar las concepciones de los estudiantes respecto al objeto de estudio.

Se elaboraron las situaciones didácticas que fueron utilizadas en la fase experimental, tratando de observar las distintas fases que componen las etapas del aprendizaje: acción, formulación, validación e institucionalización.

Finalmente se analizan los datos recolectados para proceder a hacer el análisis *a posteriori* con la respectiva evaluación de los resultados obtenidos y la validación, resultante de la confrontación de los análisis, el *a priori* y *a posteriori*.

REFERENCIAS

Aguilar, P., Farfán, R. M., Lezama, J., Moreno, J. (1997). Estudio didáctico de la función 2^x . *Actas de la undécima Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa*. México. Grupo Editorial Iberoamérica, 19-23.

Artigue, M. (1998). Ingeniería didáctica. En Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., Gómez, P. (Eds.). *Ingeniería didáctica en educación matemática*. Colombia. Una empresa docente.

Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics*. Kluwer Academic Publishers.

Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica: Del saber sabio al saber enseñado*. AIQUE, Argentina.

Douady, R. (1996). Ingeniería didáctica y evolución de la relación con el saber en las matemáticas de collège-seconde. En Barbin, E., Douady, R. (Eds.). *Enseñanza de las matemáticas: Relación entre saberes, programas y prácticas*. Francia. Topiques éditions. Publicación del I.R.E.M.

Farfán, R. M., Ferrari, M. (2001). Ingeniería Didáctica. Un ejemplo construido para la función 2^x . *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. México. Grupo Editorial Iberoamérica, Volumen 14, 408-415.