CUADERNOS DE INVESTIGACIÓN Y FORMACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
2007, Año 2, Número 3, pp. 69-97.

RECONSTRUYENDO Y CONECTANDO RELACIONES MATEMÁTICAS BÁSICAS CON EL USO DE UN *SOFTWARE* DINÁMICO

Christian Páez Páez
cpaez@itcr.ac.cr
Escuela de Matemática
Instituto Tecnológico de Costa Rica
Manuel Santos Trigo
msantos@cinvestav.mx
CINVESTAV, México

Resumen

En el proceso de entender ideas matemáticas o resolver problemas, resulta importante que los estudiantes se planteen preguntas, utilicen distintas representaciones, formulen conjeturas y comuniquen sus resultados. ¿Qué procesos del pensamiento matemático se favorecen cuando los estudiantes emplean, sistemáticamente, un software dinámico en la resolución de problemas? En este trabajo se presenta una actividad donde se ilustra la construcción, con el uso de un software dinámico, de una configuración que incluye segmentos, rectas perpendiculares, triángulos, ángulos, etc. que sirve como plataforma para identificar y presentar un conjunto de resultados matemáticos. En este contexto, se ilustra que el uso del software puede facilitar la búsqueda de relaciones con base en procesos que impliquen la necesidad de cuantificar atributos, observar invariantes, formular conjeturas y comunicar resultados.

Abstract

To what extent does the systematic use of technology favour students´ development of problem solving competences? In particular, the use of dynamic software seems to offer students the possibility of constructing simple geometric configurations that might become a platform to formulate questions that lead them to the construction or recognition of mathematical relationships. Thus, particular mathematical results emerge from exploring the behaviour of parts of a certain configuration as a result of moving other elements within such figure or representation. In this process, students can build their own repertoire of mathematical results and also utilize their previous knowledge to support, justify, or explain their conjectures. Here, it becomes important for students to develop methods and strategies to observe particular relationships, express them using specific notation, and provide arguments to demonstrate their results.

Palabras claves

Educación Matemática, geometría dinámica, matemática, didáctica, tecnología.

En las propuestas recientes sobre el currículum matemático a nivel preuniversitario, se reconoce la importancia de que los estudiantes utilicen distintas herramientas tecnológicas en el estudio de la disciplina (NCTM, 2000). Sin embargo, ante la variedad de herramientas disponibles es necesario identificar no sólo las ventajas que le puedan brindar al estudiante durante la comprensión de las ideas matemáticas y la resolución de problemas, sino también caracterizar las representaciones, estrategias y formas de razonamiento que exhiban los estudiantes como resultado de usar tales herramientas en sus experiencias de aprendizaje. Así, ¿qué herramientas pueden favorecer el desarrollo de competencias matemáticas de los estudiantes? ¿Cómo emplearlas? ¿Qué es lo que resulta relevante en el proceso de aprender matemáticas en ambientes donde los estudiantes utilizan, sistemáticamente, algunas herramientas? y, de manera general, ¿qué formas de razonamiento desarrollan los estudiantes al emplear, sistemáticamente, herramientas tecnológicas en la resolución de problemas? son preguntas importantes que orientan la reflexión sobre la trascendencia de utilizar algunas herramientas tecnológicas en la instrucción matemática.

En este artículo, se identifican algunas relaciones matemáticas elementales que, normalmente, aparecen en el *currículum* a nivel de secundaria y bachillerato. Estas relaciones surgen durante el proceso de ensamblar una configuración geométrica que involucra la construcción de segmentos, mediatrices, triángulos, ángulos, rectas, etc. La construcción se realiza con el empleo de un *software* dinámico que puede ser *The Geometer's Sketchpad* (Key Curriculum Press, 1999) o *CabriGéomètre* (Laborde y Bellemain). En particular, las representaciones dinámicas que se realizan con la ayuda del *software* resultan importantes en la búsqueda de relaciones. Así, los estudiantes pueden construir su propio repertorio de resultados matemáticos a partir de analizar el comportamiento de los elementos de la configuración (búsqueda de invariantes) al mover componentes dentro de la misma figura o construcción. En este proceso, se ilustra la importancia de que el estudiante se plantee preguntas, formule conjeturas, busque argumentos que le permitan explicar la validez de las conjeturas y comunique sus formas de razonamiento y resultados.

En lo que sigue, se desarrollará un ejemplo donde se muestran algunos conceptos y relaciones relevantes que surgen durante la construcción de una figura que incluye puntos, rectas, segmentos y triángulos, a partir del empleo de un *software* dinámico.

En el camino, se identificarán procesos importantes del quehacer matemático, como la formulación de conjeturas, la necesidad de plantear argumentos que justifiquen la validez de ciertas relaciones, la búsqueda de invariantes y la importancia de explorar casos particulares.

¿PROBLEMA INICIAL O PREGUNTAS?

Una característica notable en este tipo de actividades es que no existe un problema inicial planteado por resolver, sino que durante el proceso de ensamblar una construcción aparecen preguntas que se exploran a partir del empleo del *software*. Las preguntas y conjeturas surgen al mover y observar cambios cuantitativos y visuales en algunos elementos de la configuración. Es decir, una construcción simple se convierte en una plataforma para que el estudiante busque, formule y justifique una serie de resultados matemáticos. En este proceso, los estudiantes pueden observar la importancia de conectar ideas matemáticas y robustecer, continuamente, sus procesos de argumentación.

Un aspecto importante al representar un problema o situación con la ayuda del *software* dinámico es que los estudiantes tienen la oportunidad de formular preguntas acerca del comportamiento de algunos elementos de la construcción. La facilidad para medir atributos, como distancias, superficies o ángulos, permite que los estudiantes observen invariantes como resultado de mover partes o componentes (puntos, segmentos, rectas) dentro de la representación. Es decir, plantear preguntas es una actividad relevante que los estudiantes pueden desarrollar con el empleo de la herramienta. Postman y Weingartner (1969) afirman que:

> El conocimiento se produce en respuesta a preguntas… Una vez que [el estudiante] ha aprendido cómo preguntar -preguntas relevantes, apropiadas y sustanciosas- el estudiante ha aprendido cómo aprender y ya nadie lo puede detener en el camino de seguir aprendiendo lo que necesite y quiera conocer (p. 23).

Así, resulta importante ilustrar las formas en que los estudiantes pueden involucrarse en procesos de formulación de preguntas con la ayuda de la herramienta. En este contexto, se pueden iniciar con la construcción de un segmento *AB* y localizar su punto medio *M* (figura 1), se traza la mediatriz *n* del segmento *AB* (la mediatriz *n* es la línea recta perpendicular al segmento *AB* y que pasa por el punto medio *M*).

Un aspecto relevante en la construcción es que el *software* permite realizar representaciones precisas que pueden guiar a los estudiantes en la búsqueda de relaciones en caminos tanto visuales como cuantitativos.

La idea es que los estudiantes comiencen, inmediatamente, a identificar relaciones entre los elementos de la figura. Por ejemplo, con la ayuda del *software* se puede verificar la congruencia de los segmentos *AM* y *MB*, y que la medida de los ángulos formados por la recta *n* y el segmento *AB* es de 90°; de esta manera, se puede preparar el terreno para agregar otros componentes a la construcción y buscar algunas relaciones entre ellos.

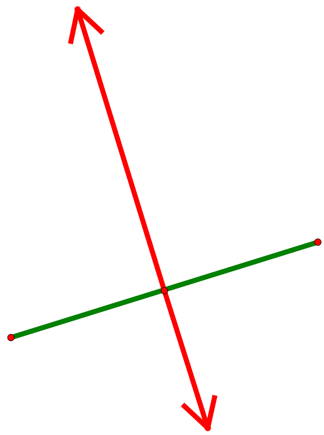

Figura 1: Mediatriz del segmento *AB*.

SOBRE TRIÁNGULOS

Los estudiantes pueden considerar el triángulo que se forma al unir un punto *C* de la recta *n* con los puntos *A* y *B*, respectivamente (figura 2). Dado que el punto *C* se puede mover a lo largo de la recta *n*, los estudiantes pueden preguntarse acerca de las propiedades invariantes del triángulo *ABC*; por ejemplo, pueden cuestionarse: ¿Cuál es la relación entre las medidas de los segmentos *AC* y *BC*? ¿Cómo se relacionan las medidas de los ángulos *CAB* y *CBA*?

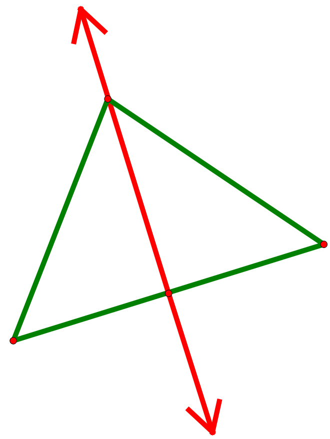

Figura 2: Triángulo isósceles.

Al calcular las medidas de los lados y de los ángulos internos del triángulo *ABC*, los estudiantes pueden identificar algunas propiedades invariantes de la construcción. Por ejemplo, al medir los segmentos *AC* y *BC* y mover el punto *C*, pueden *observar* que estas medidas son siempre iguales; o bien, al medir los ángulos *CAB* y *CBA* también *notar* que estos ángulos son congruentes. Con estos elementos pueden conjeturar que el triángulo *ABC* es un triángulo isósceles (figura 3) y buscar elementos que les permita justificar esta afirmación.

Primer Resultado: Triángulo Isósceles

En la figura 3 se muestran varias posiciones del punto *C* (C_1, C_2 y C_3) sobre la recta *n*; además, se han calculado las medidas de los lados y de los ángulos internos del triángulo *ABC*. Los estudiantes pueden plantear que:

El triángulo *ABC* que se forma al unir los extremos del segmento *AB* con cualquier punto *C* localizado sobre la mediatriz de *AB*, es siempre un triángulo isósceles.

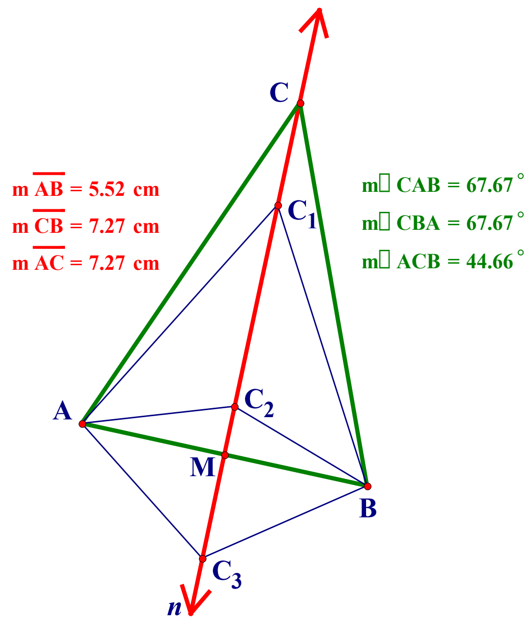

Figura 3: Triángulo isósceles con un vértice sobre la recta *n*.

Una vez convencidos de la pertinencia de la conjetura (convencimiento obtenido a partir de analizar el valor de las medidas calculadas), los estudiantes pueden plantear la pregunta: ¿Por qué la conjetura es válida? (Furinghetti y Paola, 2003, p. 402). Esta pregunta los lleva a la búsqueda de argumentos que involucran propiedades generales como congruencia de triángulos.

Justificación o Prueba de la Conjetura

Considerando los triángulos *AMC* y *BMC* (figura 4), los estudiantes pueden justificar la congruencia entre los lados *AC* y *BC* (C cualquier punto sobre la mediatriz), ya que: (*i*) los segmentos *MA* y *MB* son de igual medida (*M* es el punto medio de *AB*), (*ii*) las medidas de los ángulos *AMC* y *BMC* son de 90º (*n* es perpendicular al segmento *AB* por el punto *M*) y (*iii*) ambos triángulos rectángulos comparten el cateto *MC*.

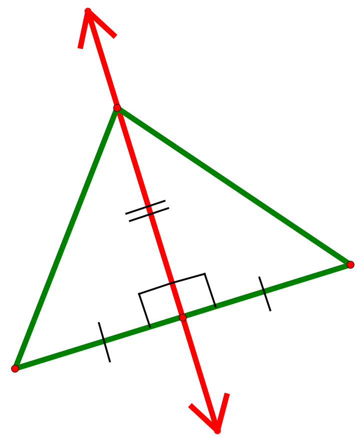

Figura 4: Triángulos rectángulos congruentes.

Utilizando el criterio de congruencia *ladoángulolado*, los estudiantes pueden concluir que $\triangle AMC \cong \triangle BMC$ y, así, demostrar que los lados *AC* y *BC* son congruentes. La búsqueda de este tipo de argumentos resulta importante, ya que los estudiantes pueden apreciar la diferencia entre sustentar un resultado a partir de los datos que se generan con el uso de la herramienta (medición de atributos) y el uso de propiedades generales de las figuras.

Los estudiantes deben aceptar que toda relación o conjetura que identifiquen debe acompañarse de una justificación o argumento que la respalde (Santos, 1997). La búsqueda de argumentos se puede favorecer cuando los estudiantes realizan las construcciones con *Sketchpad* o *Cabri*, ya que estas construcciones se efectúan con base en las propiedades que caracterizan a las figuras. Así, un rectángulo es un objeto construido a partir de sus propiedades (pares de lados paralelos, ángulos rectos o pares de lados congruentes). Es decir, el empleo de la herramienta facilita que los estudiantes exploren o examinen la construcción, asignen medidas (a segmentos y ángulos), observen invariantes, planteen una conjetura y, eventualmente, consideren información y elementos relevantes para proponer una demostración (Furinghetti y Paola, 2003).

Considerando la misma construcción los estudiantes pueden investigar otras relaciones o propiedades en la figura.

Segundo Resultado: Triángulo Equilátero

Al mover el punto C, los estudiantes pueden observar que para cierta ubicación del punto se cumple que el triángulo formado, además de ser un isósceles, también puede ser un triángulo equilátero (tres lados congruentes). Con base en las medidas calculadas, los estudiantes pueden mover el punto C hasta que las medidas de los lados y de los ángulos sean iguales, respectivamente; así, pueden plantearse: ¿Dónde ubicar, exactamente, el punto C para que el triángulo ABC sea un equilátero? Para ubicar la posición del punto C, los estudiantes pueden construir una circunferencia de centro B y radio BA (figura 5); con esta construcción se obtienen dos puntos de intersección (C' y C'') entre la línea n y la circunferencia. Pueden trazar los segmentos AC', BC', AC'' y BC'', al calcular sus medidas respectivas, pueden *comprobar* que son iguales a la medida del segmento AB. Con esta información, se establece el siguiente resultado:

Al unir los extremos del segmento AB con cualquiera de los puntos de intersección entre la recta n y la circunferencia de centro B y radio BA, se obtiene un triángulo equilátero.

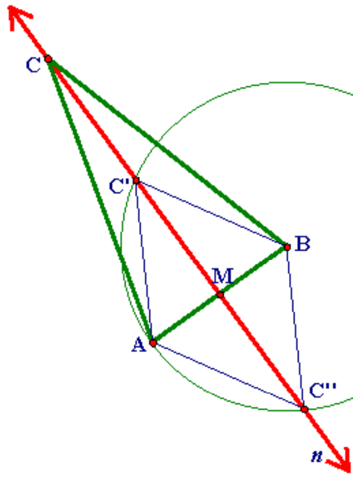

Figura 5: Triángulos equiláteros.

Más Allá de la Medición: Justificación o Prueba de la Conjetura

Para mostrar que el triángulo ABC' (figura 5) es un triángulo equilátero, los estudiantes pueden afirmar que los lados AC' y BC' son congruentes, ya que todo triángulo ABC, con C sobre n, es un triángulo isósceles y, además, que los lados BA y BC' son congruentes, ya que ambos segmentos corresponden a radios de una misma circunferencia. De esta manera, los tres lados del triángulo ABC' tienen la misma medida, por lo que el triángulo ABC' es equilátero. De la misma manera, los estudiantes pueden confirmar que el triángulo ABC'' es equilátero.

El éxito en la construcción del triángulo equilátero puede motivar a los estudiantes de preguntarse si existe otra clase de triángulos isósceles que se puedan formar en la construcción.

Tercer Resultado: Triángulo Rectángulo

Al poner la atención en los ángulos del triángulo, los estudiantes pueden observar que el ángulo ACB toma distintos valores al mover el punto C. Aquí se pueden preguntar: ¿Existen puntos sobre la recta *n* con los que se pueden formar triángulos rectángulos? ¿Dónde se localizan estos puntos? ¿Cómo se pueden trazar dichos puntos?

Al mover el punto *C*, los estudiantes pueden ubicar la posición de algún punto sobre *n* donde el ángulo *ACB* sea, aproximadamente, de 90º y, eventualmente, *comunicar* el siguiente resultado:

> Al unir los extremos del segmento *AB* con cualquiera de los puntos de intersección entre la recta *n* y la circunferencia de centro *M* y radio *MA*, se forma un triángulo rectángulo.

Justificación o Prueba del Resultado

Al considerar, por ejemplo, el triángulo *ABC′* (figura 6), se tiene que el ángulo *AC′B* es un ángulo inscrito en una circunferencia y que su medida está dada por la mitad de la magnitud angular del arco que subtiende. Dado que *AB* es diámetro de la circunferencia, los estudiantes pueden concluir que el ángulo *AC′B* mide 90º y, de esta manera, justificar que el triángulo trazado es un triángulo rectángulo. Con un procedimiento similar, pueden mostrar que el triángulo *ABC′′* también es un triángulo rectángulo. Aquí, los estudiantes emplean un *teorema* seguramente estudiado antes: *si uno de los lados de un triángulo inscrito en una circunferencia es el diámetro del círculo, entonces el triángulo es un triángulo rectángulo*. En este sentido, los estudiantes acceden a un resultado previamente estudiado para probar un resultado que emerge durante el proceso de armar la construcción.

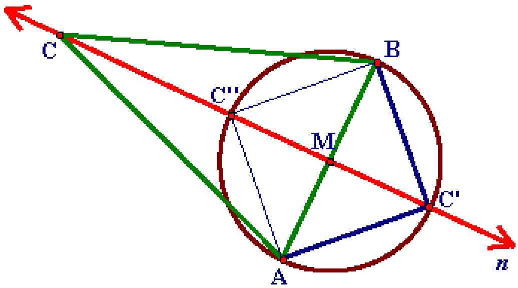

Figura 6: Triángulos rectángulos.

El *software* dinámico facilita el estudio de lugares geométricos que resultan al mover elementos dentro de la configuración.

[Con el software dinámico] los estudiantes también pueden analizar, de manera sencilla, conjeturas mediante la exploración de propiedades específicas de las construcciones que han producido, o incluso ‘descubrir’ nuevas propiedades. (Hanna, 1998, p. 7).

Con relación al *descubrimiento* de nuevas propiedades, los estudiantes pueden volver a la construcción inicial (figura 2) y, con base en los trazos que ahí se presentan, cuestionarse acerca de algunas rectas notables del triángulo isósceles.

Por ejemplo, en el triángulo *ABC* (figura 7), los estudiantes pueden determinar el punto de intersección *P* entre el *rayo bisector* del ángulo *BAC* y la *mediatriz* del lado *BC* (recta perpendicular que pasa por el punto medio del lado *BC*).

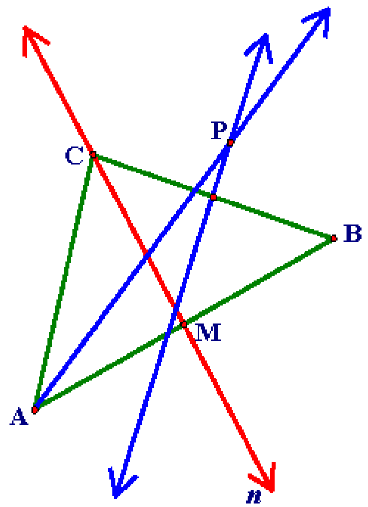

Figura 7: Intersección entre el rayo bisector del ángulo *BAC* y la mediatriz del lado *BC*.

Los estudiantes se pueden preguntar acerca de las propiedades o características de *P*; al mover *C* a lo largo de *n*, *P* describe un camino o trayectoria que los estudiantes pueden analizar en términos de recursos matemáticos. Por ejemplo, pueden asociar, inicialmente, el camino que deja *P* con una parábola, o bien, indicar que dicho recorrido describe parte de una hipérbola. Sin embargo, es necesario que sustenten sus conjeturas; es decir, es necesario propiciar un ambiente en el que los estudiantes justifiquen sus observaciones, ya que, de esta manera, pueden buscar evidencia que les convenza y que convenzan a los demás de sus resultados, factor importante de la argumentación en el quehacer matemático (Godino y Recio, 2001, p. 412).

BÚSQUEDA DE LA ECUACIÓN DE UN LUGAR GEOMÉTRICO

Con *Sketchpad* o *Cabri* los estudiantes pueden determinar, fácilmente, el lugar geométrico del punto *P* cuando *C* se desplaza sobre la recta *n*.

En la figura 8 se muestra el rastro que deja *P* al mover el punto *C* sobre la recta *n*. Con el lugar geométrico construido, los estudiantes pueden buscar evidencia que les permita argumentar si el desplazamiento de *P* coincide con alguna cónica o si, por el contrario, es una trayectoria que no representa alguna cónica conocida.

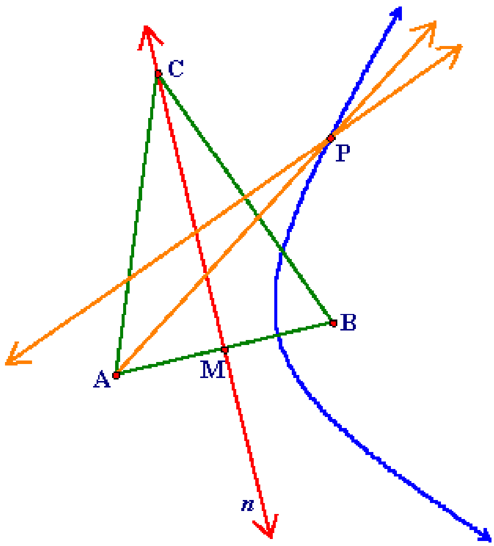

Figura 8: Lugar geométrico de *P* cuando el punto *C* se desplaza sobre la recta *n*.

Los estudiantes pueden utilizar *Sketchpad* o *Cabri* para *explorar* y *analizar* la construcción que se ha realizado. Usando el comando que permite generar cónicas por cinco puntos arbitrarios, se puede determinar, al menos visualmente, si la cónica que pasa por esos cinco puntos coincide con el lugar geométrico que genera *P*.

La investigación empírica producida en un ambiente dinámico de geometría contiene objetos y transformaciones sobre los objetos. Preferiblemente, las investigaciones deben estimular a los estudiantes a observar y describir un patrón y, además, explorar ese patrón para determinar una generalización. (Pence, 1999, p. 430)

Asociando una Cónica al Lugar Geométrico

Trazando la cónica que se genera con cinco puntos arbitrarios pertenecientes al lugar geométrico de P, los estudiantes pueden *justificar*, con un claro contraejemplo, que dicho lugar geométrico no corresponde ni a una parábola ni a una hipérbola y que, en general, no se relaciona con alguna cónica.

En la figura 9 se presenta una cónica generada con cinco puntos que pertenecen al lugar geométrico en estudio; se puede observar que dicha cónica (a la que pertenecen los puntos Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 y Q_5) no coincide con (o no contiene) el lugar geométrico de P.

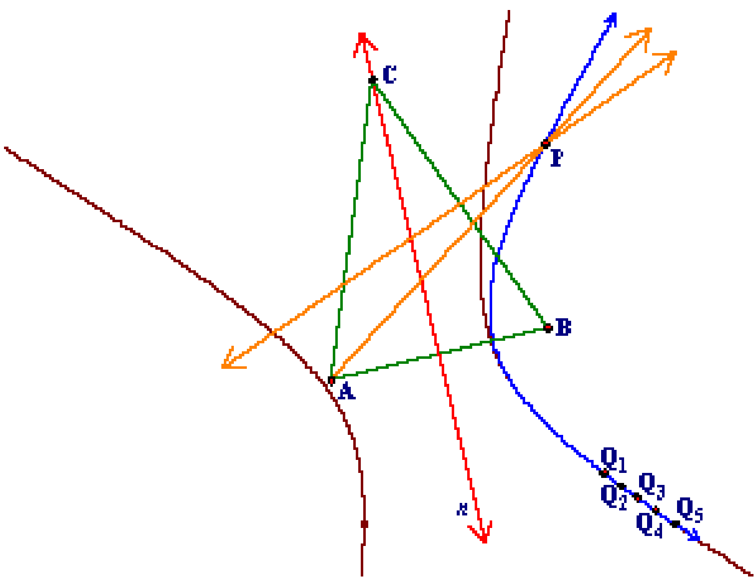

Figura 9: Cónica generada por cinco puntos del lugar geométrico de P.

El hecho de que los trazos de la cónica de los cinco puntos y del lugar geométrico de *P* no queden encimados, presenta a los estudiantes *evidencia* suficiente que les permite tomar la decisión de no buscar argumentos que justifiquen que el lugar geométrico de *P* corresponde a alguna cónica.

Así, el empleo del *software* permite que se tomen decisiones relevantes antes de intentar probar algún resultado; en este caso, existe evidencia de que el lugar geométrico no corresponde a alguna cónica. En este sentido, de Villiers (1999) menciona que "en los procesos de justificación deductiva, un papel importante lo ocupa la **búsqueda de contraejemplos**, principalmente, los que resultan **empíricamente**, ya que logran el **convencimiento** del fallo de la conjetura" (p. 4, letra negrita agregada). En el caso anterior (intersección entre una *bisectriz* y una *mediatriz*) no se generó algún tipo de cónica, sin embargo, los estudiantes pueden considerar otras rectas relacionadas con la construcción del triángulo y, de esta manera, explorar y analizar propiedades o características que se presenten. Por ejemplo, pueden preguntarse: ¿Qué sucede al considerar otro tipo de rectas? ¿Se pueden generar otros lugares geométricos? ¿Existe alguna cónica al realizar otras construcciones?

La Generación de una Parábola

En la figura 10, los estudiantes pueden trazar una recta perpendicular a la mediatriz *n* que pase por el punto C y también construir la mediatriz del lado BC, estas dos rectas se cortan en el punto P. ¿Cuál es el lugar geométrico del punto P cuando el punto C se mueve sobre la recta *n*?

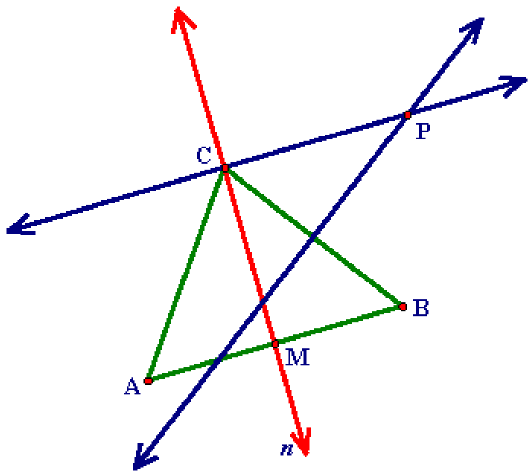

Figura 10: Intersección de la recta perpendicular a n que pasa por C y la mediatriz de BC.

La figura 11 muestra el lugar geométrico que describe el punto P y, visualmente, parece ser una parábola. El estudiante puede observar que para cualquier posición del punto P que genera el lugar geométrico, se cumple que la distancia de ese punto al punto B es la misma que hay de ese mismo punto a la recta n . Esto se deduce por la propiedad de que el punto está sobre la mediatriz del segmento BC. Es decir, se trata de una parábola con foco el punto B y con directriz n.

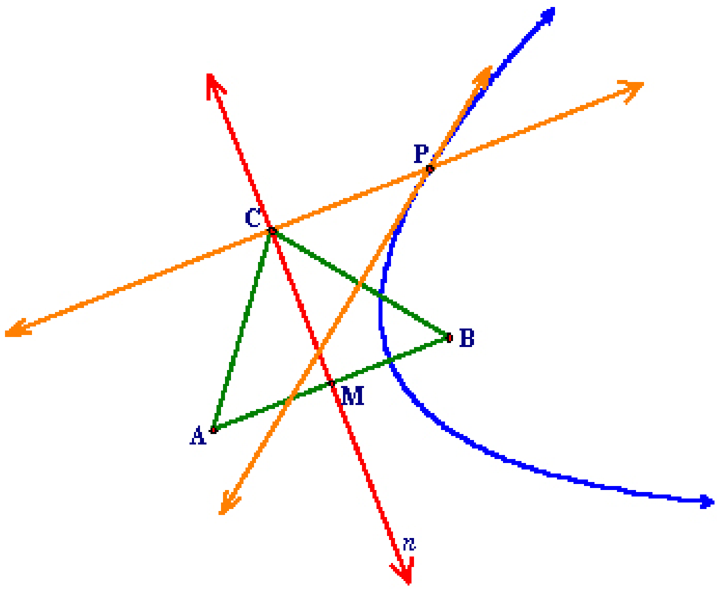

Figura 11: Lugar geométrico del punto *P* cuando *C* se mueve sobre la recta *n*.

La Generación de una Hipérbola

Los estudiantes pueden considerar la recta *m* (figura 12) que pasa los puntos medios de los lados *BC* y *AB* (*N* y *M*, respectivamente) y, además, considerar la *altura h* del triángulo *ABC* respecto del lado *BC*. Al obtener el punto de intersección *R* entre las rectas *h* y *m*, se puede determinar el lugar geométrico del punto *R* cuando *C* se mueve sobre la recta *n*.

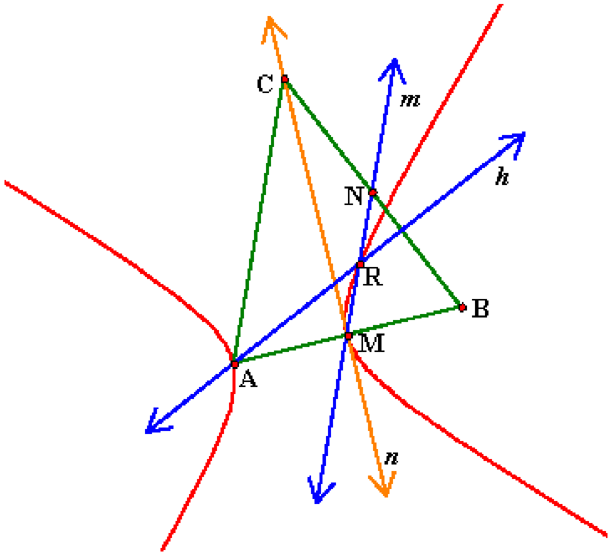

Figura 12: Lugar geométrico de *R* cuando el punto *C* se mueve sobre la recta *n*.

El camino o trayectoria que sigue *R* cuando se mueve el punto *C*, parece corresponder a una hipérbola. Aquí los estudiantes pueden plantearse la tarea de verificar si la cónica que pasa por cinco puntos que pertenezcan al lugar geométrico de *R*, y el lugar geométrico generado por *R* corresponden en efecto a una hipérbola. Es decir, si el lugar geométrico y la cónica que pasa por los cinco puntos coinciden, entonces, los estudiantes pueden investigar la posición de (*i*) los focos de esta hipérbola, (*ii*) los ejes de simetría, (*iii*) los vértices y (*iv*) el centro de simetría (intersección de los dos ejes de simetría).

Ejes de Simetría, Centro de Simetría y Vértices de la Hipérbola

Con base en la construcción que se muestra en la figura 13, los estudiantes pueden *suponer* que uno de los ejes de simetría de la hipérbola es la recta l que pasa por los puntos A y B y, además, mencionar que el centro de simetría de dicha hipérbola es el punto medio O del segmento AM (utilizando los comandos se puede trazar el punto O como la homotecia o dilatación del punto B con centro en A y razón).

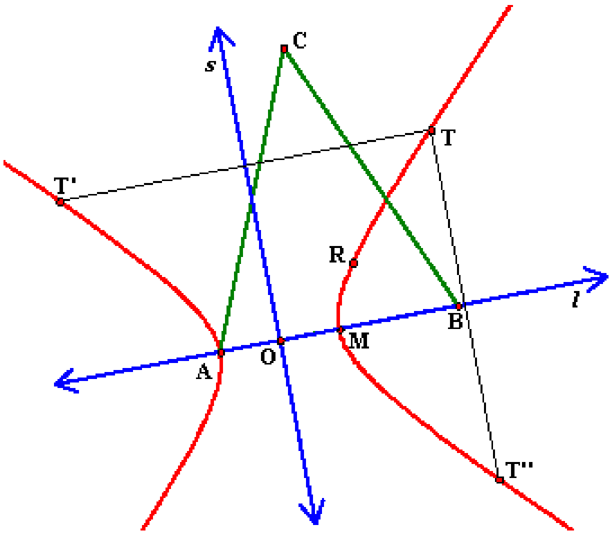

Figura 13: Ejes de simetría de la hipérbola generada por R.

La línea recta s (perpendicular a l por O) representa el otro eje de simetría; también, se considera que los vértices de la hipérbola son los puntos A y M, respectivamente. Una tarea importante es que los estudiantes demuestren que los elementos de la hipérbola satisfacen las propiedades de ese lugar geométrico. Es decir, los puntos de la hipérbola deben satisfacer la definición de dicho lugar geométrico. Santos (2004) ilustra distintas formas de cómo los estudiantes emplean el *software* dinámico para demostrar que lo que inicialmente visualizan en la figura corresponde a alguna cónica determinada.

Así, utilizando transformaciones (como rotación, traslación, reflexión, etc.), los estudiantes pueden *comprobar* si l y s son los ejes de simetría de la hipérbola; para esto, pueden colocar un punto arbitrario T sobre el lugar geométrico de R y reflejarlo con respecto a dichos ejes de simetría (figura 13). Al mover el punto T, los estudiantes pueden *verificar* que las reflexiones respectivas (T' y T'') siempre están sobre el lugar geométrico de R.

Focos de la Hipérbola

Sobre el plano se identifican: (*i*) los ejes de simetría (rectas l y s, respectivamente), (*ii*) el centro de simetría (punto O) y (*iii*) los vértices (puntos A y M, respectivamente), y resulta importante investigar la ubicación de los focos de la hipérbola.

¿Qué propiedades tienen los puntos de la hipérbola? ¿Cómo se define esta cónica? Los estudiantes pueden recordar que: *hipérbola es el lugar geométrico de todos los puntos de un plano, tal que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos (llamados focos) es constante*, y plantearse la tarea de localizar sus focos y *verificar* si se satisface la definición de este lugar geométrico.

Se puede suponer, inicialmente, que uno de los focos de la hipérbola es el punto B (con lo que B' reflejo de B respecto de s sería el otro foco) (figura 14). Haciendo los cálculos pertinentes y moviendo el punto T, los estudiantes pueden desechar su hipótesis de que B y B' sean los focos de la hipérbola, ya que no se mantiene constante el valor absoluto de la diferencia de las distancias de T a B y de T a B'.

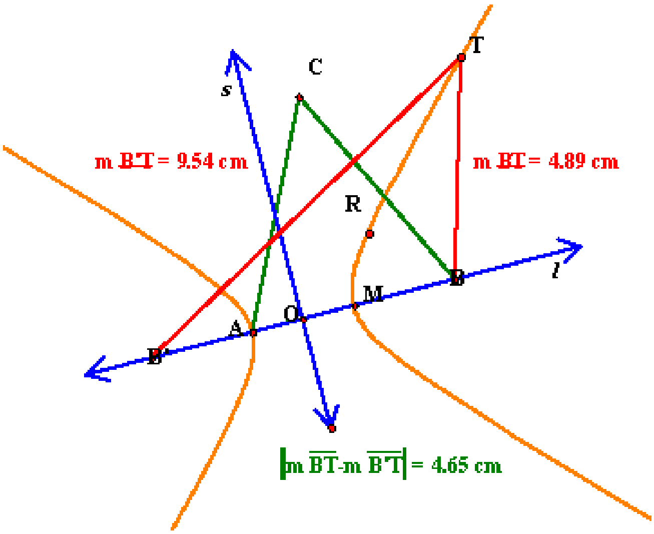

Figura 14: Verificación utilizando la definición de hipérbola.

Con el uso de *Sketchpad* o *Cabri* se puede ubicar un sistema coordenado que permita determinar la ecuación de la cónica, de tal manera que sea lo más sencilla posible.

Por ejemplo, se debe buscar un origen del sistema de coordenadas para el cual la ecuación de la hipérbola sea de la forma , ya que esta es la forma canónica de la ecuación de una hipérbola donde: su centro es el punto , sus focos son los puntos y , y se cumple que .

Se puede considerar el punto *A* como el origen del sistema de coordenadas (figura 15); y considerar a la recta *l* como el eje de las abscisas y a la recta *u* (línea perpendicular a *l* por *A*) como el eje de las ordenadas. Se puede, también, asumir (sin pérdida de generalidad) que el punto *B* posee las coordenadas , es decir, *AB* representa la unidad; de esta manera, los puntos *A* y *B* están sobre el eje de las abscisas, lo que provoca que la ecuación de la hipérbola no sea una expresión difícil de manipular algebraicamente.

Utilizando el comando del *software* que permite el trazo de cónicas por cinco puntos dados del lugar geométrico se determina la ecuación de la cónica que pasa por esos puntos. En este caso, la ecuación de la hipérbola con las características mencionadas es (figura 15).

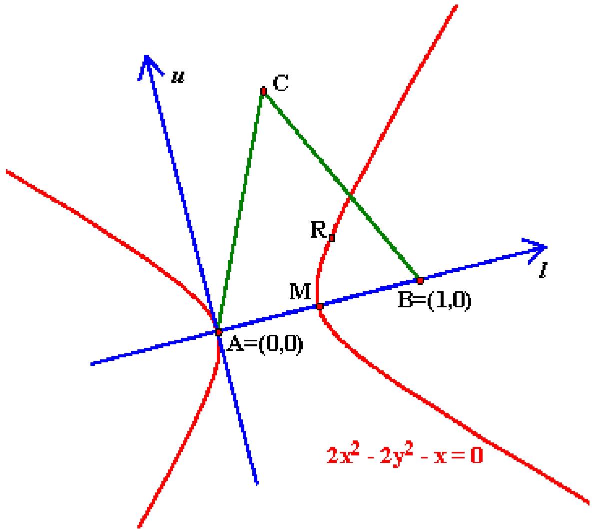

Figura 15: Sistema de coordenadas y ecuación de la hipérbola.

Con este *caso particular*, los estudiantes pueden obtener las coordenadas de los focos de la hipérbola y, eventualmente, *generalizar* el resultado.

Aquí resulta conveniente llevar la ecuación $2x^2 - 2y^2 - x = 0$ a la forma:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

La ecuación de la hipérbola se puede expresar como:

$$\frac{\left(x - \frac{1}{4}\right)^2}{\left(\frac{1}{4}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(\frac{1}{4}\right)^2} = 1$$

De donde el valor de c está dado por:

$$c = \sqrt{\left(\tfrac{1}{4}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{4}\right)^2} = \frac{1}{4}\sqrt{2}$$

Teniendo dicho valor, los estudiantes pueden identificar los focos de la hipérbola (puntos que están sobre el eje de las abscisas). Uno de dichos focos (F_1) tiene como abscisa: $\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{2} = \frac{1}{4}\left(1 + \sqrt{2}\right)$; o bien, F_1 está a una distancia de $\frac{1}{4}\left(1 + \sqrt{2}\right)$ unidades del punto A.

Como B corresponde con el punto $(1, 0)$, es decir, AB mide la unidad, el valor de la abscisa para uno de los focos (F_1) de la hipérbola de todo triángulo de esta construcción es $\frac{AB}{4}\left(1 + \sqrt{2}\right)$; o bien, F_1 está a una distancia de $\frac{AB}{4}\left(1 + \sqrt{2}\right)$ unidades de A. Una manera de ubicar el punto F_1 en el plano cartesiano es trazando la homotecia o dilatación de B con centro en A y razón $\frac{1}{4}\left(1 + \sqrt{2}\right)$.

Existen varias maneras de obtener los focos de la hipérbola: una es calcular la medida del segmento AB y trazar el círculo con centro en A y radio $\frac{AB}{4}\left(1 + \sqrt{2}\right)$ (figura 16); el otro foco (F_2) se puede obtener reflejando F_1 respecto al eje de simetría s.

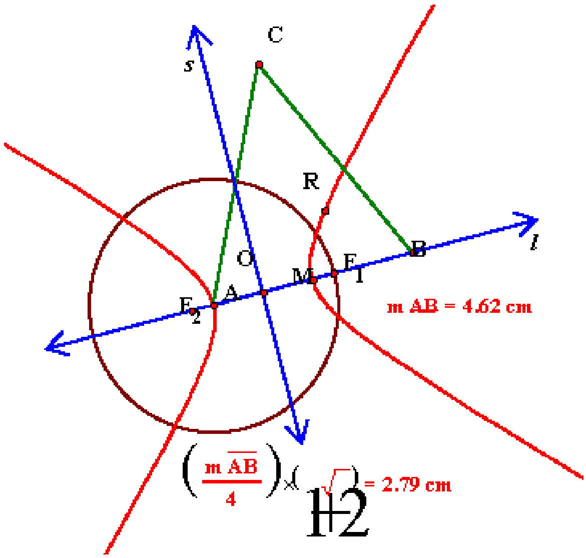

Figura 16: Focos de la hipérbola.

Verificación Usando la Definición de Hipérbola

Para *verificar* que con F_1 y F_2 se satisface la definición de hipérbola, se considera un punto *T* que pertenezca al lugar geométrico de *R*. En la figura 17 se presentan las medidas necesarias para comprobar la definición de hipérbola. Moviendo el punto *T*, los estudiantes pueden observar que el valor de la diferencia calculada es constante.

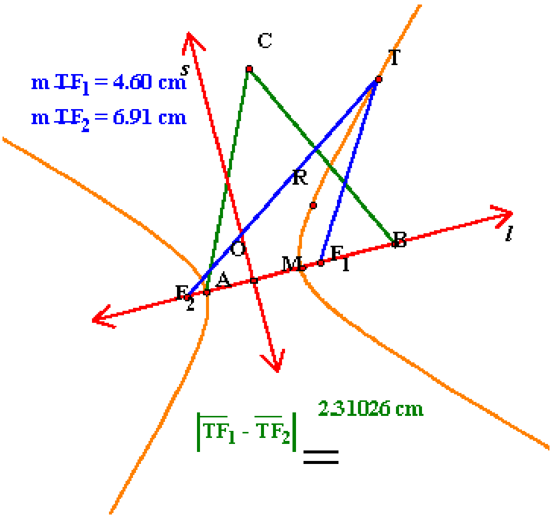

Figura 17: Verificación usando la definición de hipérbola.

Otra forma de comprobar que el lugar geométrico de *R* es una hipérbola y que, además, F_1 y F_2 son sus focos, es utilizando la herramienta de *Sketchpad* que permite trazar dicha cónica conociendo los focos y algún punto del lugar geométrico de *R* (por ejemplo, el punto *T*); para realizar el trazo sólo se seleccionan los puntos que representan los focos y algún punto del lugar geométrico, la hipérbola que se genera estaría *sobrepuesta* al lugar geométrico de *R*.

VISIÓN RETROSPECTIVA

Conviene puntualizar algunos componentes relevantes del quehacer matemático que surgen durante el desarrollo de esta actividad. El *software* dinámico resulta una herramienta poderosa que favorece el ejercicio de actividades propias de la disciplina como investigar, explorar y visualizar conjeturas o relaciones a partir de construcciones geométricas simples. En ese contexto, los estudiantes tienden a formular preguntas, buscar invariantes o patrones, plantear argumentos y presentar sus resultados. Este proceso muestra la relación que existe entre la búsqueda de invariantes, la formulación de relaciones, la demostración y la comunicación de resultados. En particular, resulta importante que las relaciones identificadas se expresen, inicialmente, en forma oral y, posteriormente, se desarrolle una notación y lenguaje que permita presentarlas de manera escrita.

Los estudiantes pueden, fácilmente, modificar su construcción inicial (por medio de arrastre de objetos) y observar las relaciones que se mantienen invariantes como resultado de analizar familia de objetos. Es decir, las relaciones que se detecten en un triángulo isósceles se pueden explorar, fácilmente, para familias de este tipo de triángulos.

Algunas conjeturas pueden surgir a partir del proceso de medir partes de la figura y observar su comportamiento; por ejemplo, la conjetura: "el triángulo *ABC* que se forma al unir los extremos del segmento *AB* con cualquier punto *C* localizado sobre la mediatriz de *AB*, es siempre un triángulo isósceles" se formula con base en la medición de los lados y de los ángulos internos del triángulo *ABC*; posteriormente, se presenta una demostración formal de esta conjetura. Un aspecto relevante en este sentido es que una conjetura siempre debe acompañarse de un argumento o prueba que le de soporte o validez.

En otro sentido, hay conjeturas que pueden surgir mediante la *observación* de algunos objetos de la construcción (Santos y Moreno, 2001); por ejemplo, en la generación de una hipérbola, una conjetura es: "los ejes de simetría son las rectas *l* y *s*"; en este caso, se *comprueba* por medio de la *reflexión de un punto* que, efectivamente, dichas rectas son los ejes de simetría de la hipérbola. Es decir, las formas de razonamiento que emplean los estudiantes explotan las propiedades y potenciales del *software*.

Las justificaciones de resultados van desde argumentos formales (como en el caso de los primeros resultados), hasta argumentos relacionados con el comportamiento de la longitud de ciertos segmentos al variar algún punto (comprobación de la definición de hipérbola) y construcciones directas con el *software* (como el trazo de cónicas por cinco puntos arbitrarios). Algunas justificaciones no formales de ciertas conjeturas se fundamentan en ideas importantes relacionadas con resultados matemáticos; por ejemplo, justificar que los focos de la hipérbola son los puntos F_1 y F_2 involucra ideas ligadas con la definición de hipérbola y la simetría de los focos respecto al eje simétrico *s*. Otro ejemplo es la justificación para los ejes de simetría (rectas *l* y *s*), ya que en los argumentos se utiliza la *reflexión de un punto* del lugar geométrico de *R*.

Por último, es importante resaltar que en todo momento los estudiantes, con cierta dirección, son quienes experimentan, realizan construcciones, calculan medidas, buscan relaciones, plantean conjeturas, buscan evidencia para verificar resultados y, eventualmente, plantean demostraciones formales de algunas conjeturas. En este contexto, resulta relevante promover un ambiente de instrucción donde los estudiantes mismos construyan su propio repertorio de relaciones o resultados matemáticos.

REFERENCIAS

De Villiers, M. (1999). The Role and Function of Proof with Sketchpad. En M. de Villiers (Ed.), *Rethinking Proof with The Geometer's Sketchpad*, pp. 310. Emeryville, CA, USA: Key Curriculum Press.

Furinghetti, F. y Paola, D. (2003). To Produce Conjectures and to Prove them Within a Dynamic Geometry Environment: a Case Study. En N. Pateman, B. Dougherty y J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education held jointly with the 25th Conference of PMENA*, Vol. 2, pp. 397404. Honolulu, HI, USA: Center for Research and Development Group, University of Hawaii.

Godino, J. y Recio, A. (2001). Significados Institucionales de la Demostración. Implicaciones para la Educación Matemática. *Enseñanza de las Ciencias, 19*(3), 405414.

Hanna, G. (1998). Proof as Explanation in Geometry. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 20*(2), 413.

Key Curriculum Press (1999). Teaching Geometry with The Geometer's Sketchpad. Version 3.0. Berkeley, CAL: Key Curriculum Press.

Laborde, J-M y Bellemain, F., Cabri Geometry II, version 1. Dallas, TX.: Texas Instruments. National Council of Teachers of Mathematics (2000).

NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: The Council.

Pence, B. (1999). Proof Schemes Developed by Prospective Elementary School Teachers Enrolled in Intuitive Geometry. En F. Hitt y M. Santos (Eds.), *Proceedings of the 21st Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 2, pp. 429435. Morelos, México: Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education.

Postman, N. y Weingartner (1969). Teaching as a Subversive Activity. New York: A Delta Book.

Santos, M. (1997). *Principios y Métodos de la Resolución de Problemas en el Aprendizaje de las Matemáticas*. Segunda Edición, México: Grupo Editorial Iberoamericana.

Santos, M. (2004). Exploring the Triangle Inequality and Conic Sections Using Interactive Software for Geometry. *The Mathematics Teacher, 97*(1), 6872.

Santos, M. y Moreno, L. (2001). Proceso de Transformación del Uso de Tecnología en Herramientas para Solucionar Problemas de Matemáticas por los Estudiantes. *Seminario Nacional de Formación de Docentes: Uso de Herramientas Tecnológicas en el Aula de Matemáticas*. Colombia: Ministerio de Educación Nacional.