

## **¿QUÉ ES UN PROBLEMA MATEMÁTICO? PERCEPCIONES EN LA ENSEÑANZA MEDIA COSTARRICENSE**

**Cristian Alfaro Carvajal**

Escuela de Matemática,

Universidad Nacional.

crisalfaro2002@yahoo.com

**Hugo Barrantes Campos**

Centro de Investigaciones Matemáticas y Metamatemáticas,

Escuela de Matemática,

Universidad de Costa Rica.

Escuela de Ciencias Exactas y Naturales,

Universidad Estatal a Distancia.

habarran@gmail.com

www.cimm.ucr.ac.cr/hbarrantes

### **Resumen**

Una de las principales líneas de investigación en educación matemática está relacionada con la implementación de la resolución de problemas como estrategia didáctica. Esta estrategia requiere de una conceptualización apropiada del término “problema matemático” y lo que significa su uso en el aula. En este trabajo se presentan algunos resultados de un estudio realizado con el objetivo de determinar la forma en que perciben los problemas matemáticos y la resolución de problemas, profesores y estudiantes de la enseñanza media costarricense.

## Abstract

Teaching mathematics through problem solving is one of the main lines of investigation in Mathematics Education. This pedagogical strategy requires defining appropriately the concept “mathematical problem” and the meaning of its use in the classroom. In this work some results are presented, which were obtained by a survey to students and teachers of High School in Costa Rica.

## Palabras clave

Educación matemática, creencias sobre matemáticas, problemas matemáticos, enseñanza aprendizaje de las matemáticas.

## INTRODUCCIÓN

Pólya introdujo la idea de que la resolución de problemas puede ser vista como un arte que utiliza como medio la “heurística moderna”. Par él, resolver problemas representa una forma de descubrimiento y considera la heurística como una forma de investigar nuevos problemas (Pólya, 1990). Esto conlleva la consideración de las matemáticas como una ciencia inductiva y experimental. Las implicaciones de esta idea sobre el proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas son de tremenda importancia, puesto que induciría una estrategia basada en la resolución de problemas como mecanismo para que los estudiantes construyan su propio conocimiento. De hecho, buena parte de la investigación en Educación Matemática que se lleva a cabo en diversas partes del mundo, tiene que ver con la resolución de problemas como estrategia para el aprendizaje de las matemáticas.

Schoenfeld (1985) propone algunos aspectos que deben tenerse en cuenta a la hora de utilizar una estrategia didáctica basada en la resolución de problemas. Entre ellos destaca el *sistema de creencias*; esto es, el conjunto, conciente o no, de determinantes del comportamiento del individuo acerca de sí mismo, el medio, el tema en estudio y las matemáticas en general. Las creencias que un profesor tenga sobre lo que es un problema matemático y lo que ello implica inciden en el

abordaje que realice al utilizar una estrategia que involucre la resolución de problemas en la enseñanza de las matemáticas. Por otra parte, las creencias de los estudiantes al respecto, influenciarán en la forma en que ellos se enfrenten a tales problemas.

Determinar las creencias acerca de los problemas matemáticos y su papel en el proceso de enseñanza aprendizaje permitirá una mejor aproximación a la enseñanza de esta disciplina a través de la resolución de problemas.

## **MARCO DE REFERENCIA**

La discusión acerca de los problemas matemáticos en el contexto de la enseñanza aprendizaje de las matemáticas tiene que ver con dos asuntos centrales: qué se entiende por problema matemático y cómo se utilizan los problemas matemáticos en la clase.

### **¿Qué es un problema matemático?**

Un texto de matemáticas, cuya primera edición data de 1940 dice: “existen numerosos problemas cuya resolución se reduce a la de una ecuación de primer grado con una incógnita. Por ejemplo el siguiente: Un número es tal que su duplo disminuido en 3 unidades es igual a dicho número aumentado en 2. ¿Cuál es ese número?” (Repetto, Linskens y Fesquet, 1967, p. 207). A continuación lo resuelve y establece una serie de pasos para resolver “problemas” del mismo tipo.

La idea que subyace en lo expuesto anteriormente es la conceptualización tradicional de problema como un enunciado verbal. Sin embargo, tal conceptualización resulta insuficiente para una estrategia pedagógica basada en la resolución de problemas. A través del tiempo se ha propuesto una serie de definiciones del término problema; estas definiciones buscan establecer criterios que sirvan como marco de referencia para que, a través de la resolución de problemas que cumplan tales criterios, el estudiante pueda construir los conceptos matemáticos de manera significativa. Según Gómez y Carulla (s. f.), lo que se persigue es que el estudiante desarrolle un pensamiento matemático de alto nivel;

este tipo de pensamiento tiene (según Resnick, citado por Gómez y Carulla) características tales como las siguientes:

- Es no-algorítmico en el sentido de que el camino para la acción no está completamente especificado con anterioridad.
- Es complejo en tanto que el camino total no es “visible” desde un único punto de vista.
- Con frecuencia da lugar a soluciones múltiples, cada una con costos y beneficios.
- Hay incertidumbre puesto que en principio no se conoce todo lo que se requiere para desarrollar la tarea.
- Se requiere de mecanismos propios de regulación.
- Se requiere gran cantidad de trabajo mental con el propósito de desarrollar las estrategias y los criterios involucrados.

Podemos decir que los enunciados anteriores describen lo que serían las características de un problema matemático; sin embargo, una definición precisa implica ciertas dificultades. Para Schoenfeld (1985) la dificultad de definir el término “problema” radica en que es relativo: un problema no es inherente a una tarea matemática, más bien es una relación particular entre el individuo y la tarea; utiliza la palabra problema para referirse a una tarea que resulta difícil para el individuo que está tratando de resolverla. Charnay (1994) dice que un problema puede verse como una terna situación-alumno-entorno; el problema se da solo si el alumno percibe una dificultad, en ese sentido lo que es un problema para un estudiante no necesariamente lo es para otro. En un sentido parecido se pronuncia Callejo (1994), citada por Remesal (1999), cuando señala que un problema es una situación cuya solución no es inmediatamente accesible al sujeto dado que no cuenta con un algoritmo que la resuelva de manera inmediata, esto implica que es un concepto relativo al sujeto que intenta resolverlo.

### **Cómo se utilizan los problemas matemáticos**

Schroeder y Lester, citado por Bay (2000) describen tres formas en que la resolución de problemas pueden ser utilizados en la clase: enseñar para resolver

problemas, enseñar acerca de la resolución de problemas y enseñar mediante la resolución de problemas. En la primera forma la idea es primero explicar los conceptos y luego proponer situaciones problemáticas que pretendan poner en práctica lo aprendido. La segunda manera se refiere a la enseñanza de estrategias o heurísticas que permitan resolver problemas; es enseñar a resolver problemas y no necesariamente los contenidos matemáticos curriculares. Enseñar mediante la resolución de problemas es enseñar los contenidos matemáticos a través de la actividad de resolver problemas; esto significa que el profesor propone una situación problemática y, en el proceso de resolución, se van desarrollando los contenidos pertinentes.

La importancia de establecer las diferencias arriba mencionadas radica en que, por una parte, las actividades que el profesor proponga serán diferentes según el uso que se le esté dando a los problemas; por otra parte, diferentes usos podrá propiciar diferentes logros en los estudiantes.

### **Creencias acerca de los problemas matemáticos**

Diversos estudios (por ejemplo Callejo y Vila (2003), Remesal (1999)) reflejan que una buena cantidad de estudiantes y profesores tienen un concepto de problema de tipo tradicional; se le reconoce como una categoría de pregunta escolar que se caracteriza por algunos aspectos formales como la manera en que está enunciado (verbalmente) y el formato. No se percibe una diferencia entre ejercicio y problema y se percibe que una situación es intrínsecamente problemática y que, por lo tanto, su carácter de problema no depende del resolutor. Por otra parte, perciben que para resolver un problema hay que dominar algoritmos ampliamente y con seguridad.

### **ESTE ESTUDIO**

Dada la importancia de la resolución de problemas como una estrategia pedagógica para la enseñanza aprendizaje de las matemáticas, se realizó un estudio con el propósito de determinar la percepción que tienen profesores de matemáticas

y estudiantes de la enseñanza media costarricense acerca de los problemas matemáticos y su papel en el aprendizaje de esta disciplina. Los resultados obtenidos permiten contrastar esta percepción con la que tienen estudiantes y profesores en otros países y constituyen un importante insumo para abordar, de manera más apropiada, la enseñanza de las matemáticas mediante estrategia pedagógica basada en la resolución de problemas.

Las características generales de los participantes en el estudio y la estructura de los instrumentos utilizados se reseñan en este mismo número de los *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática* (Barrantes, 2008b).

El instrumento aplicado a los estudiantes constaba de cinco partes. La parte C (“Qué es un problema matemático”) estaba dirigida a determinar la conceptualización de problema matemático que tienen los estudiantes y algunas de sus características. La parte E (“Las matemáticas y los problemas matemáticos en la clase”) se enfocó en obtener la percepción de los estudiantes con respecto al uso que el profesor hace de los problemas matemáticos en clase y el tiempo promedio de resolución de los problemas.

El instrumento dirigido a profesores constaba de cuatro partes; la parte C (“Qué es un problema matemático”) tenía como objetivo determinar la percepción de los profesores acerca del concepto “problema matemático” y algunas de sus características. La parte D (“Problemas matemáticos en la enseñanza de las matemáticas”) estaba dirigida a determinar la opinión de los profesores con respecto a lo que podría ser el papel principal de la resolución de problemas en el proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas y las posibles dificultades que podrían presentarse al utilizar una estrategia metodológica basada en la resolución de problemas.

## RESULTADOS

### Estudiantes

En Barrantes (2008a) se comentan los resultados obtenidos en relación con la pregunta el concepto de problema matemático y el uso de los problemas matemáticos en clase.

En cuanto a los problemas matemáticos se encontró una preferencia por considerar que un problema puede considerarse como un ejercicio para verificar conocimientos, el cual no puede presentar información que no sea pertinente, solo tiene una respuesta correcta y el enunciado presenta las claves de su solución.

Por otra parte, un elevado porcentaje piensa que un problema matemático se debe poder resolver en 15 minutos o menos; incluso en menos de 10 minutos según una amplia mayoría. Esto induce a que, en general no dediquen más de 10 o 15 minutos en el intento de resolver un problema o ejercicio matemático.

## **Profesores**

### *Qué es un problema matemático*

Se brindó cinco posibles definiciones de problema que debían ser clasificadas de 0 a 4, donde 4 representaba la definición que más se acerca a la visión del profesor y 0 el que más se aleja. Los resultados obtenidos se proporcionan en la tabla 1. La columna encabezada por 0 indica el número de profesores que dieron 0 a la definición correspondiente y así sucesivamente. La columna “Prom” señala el promedio de los puntajes obtenidos por la definición correspondiente.

Es importante hacer notar que una amplia mayoría de los profesores da el máximo puntaje a la definición que propone que un problema es un ejercicio contextualizado que sirve para que el estudiante pueda aplicar un concepto o un procedimiento matemático. También el promedio obtenido para tal conceptualización es el mayor. Esto indica que los profesores mantienen mayoritariamente la conceptualización tradicional de problema como un enunciado verbal; este resultado coincide con los obtenidos en otras investigaciones, tal como se mencionó en el marco teórico. En segundo lugar, los profesores piensan que un problema matemático es una situación que puede servir para que el estudiante descubra. Esto va más acorde con la resolución de problemas como estrategia didáctica.

Tabla 1

**Qué es un problema matemático**

<b>Definición</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>NS/NR</b>	<b>Prom</b>
Un ejercicio que le permite al estudiante demostrar si ha aprendido un concepto o un procedimiento.	21	5	0	5	4	1	1
Un ejercicio contextualizado en el que el estudiante puede aplicar un concepto o un procedimiento matemático a una situación real.	2	8	6	2	17	1	2,68
Una situación que le permite al estudiante desarrollar nuevas habilidades.	3	5	12	10	5	1	2,25
Una situación que provee al estudiante la posibilidad de discusiones y descubrimientos relacionados con algún tema.	3	5	7	15	5	1	2,4
Una situación que motiva al estudiante a aprender nuevos conceptos o procedimientos.	6	12	10	3	4	1	1,91

*Para qué sirve un problema matemático*

También se solicitó el grado de acuerdo con algunas afirmaciones acerca de posibles usos didácticos de los problemas matemáticos, según el criterio: 4 completamente de acuerdo, 3 muy de acuerdo, 2 de acuerdo, 1 en desacuerdo y 0 completamente en desacuerdo. En la tabla 2 se presentan los resultados.

Tabla 2

**Grado de acuerdo con algunas afirmaciones acerca de los problemas matemáticos**

<b>Un problema matemático sirve:</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>NS/NR</b>
Solo como medio para motivar a los estudiantes	7	10	8	6	2	3
Solo como medio de recreación para los estudiantes	7	12	10	3	1	3
Como medio para enseñar y aprender matemáticas	0	1	5	15	12	3
Para desarrollar nuevas habilidades	0	2	2	11	18	3
Solamente para aplicar la teoría	10	13	6	2	2	3
Como medio para realizar descubrimientos	2	1	11	11	8	3
Para realizar generalizaciones	6	5	10	8	4	3

Podemos observar que los profesores muestran su mayor grado de acuerdo con que los problemas matemáticos pueden servir para que el estudiante desarrolle

Tabla 3

**Características de los problemas matemáticos**

<b>Algunas de las características de un problema matemático son las siguientes:</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>NS/NR</b>
Solo tienen una respuesta correcta	8	6	2	8	8	4
Solo existe un modo de resolverlo	27	6	0	0	0	3
Si alguien sabe sobre el tema puede resolverlo en cinco minutos o menos	7	8	9	4	5	3
Si alguien sabe sobre el tema puede resolverlo en diez minutos o menos	5	8	13	4	3	3
Si alguien sabe sobre el tema puede resolverlo en quince minutos o menos	5	5	16	3	3	4
Si alguien que sabe sobre el tema no lo puede resolver en un corto tiempo es porque el problema no tiene solución	18	11	4	0	0	3

nuevas habilidades y, también, como medio para enseñar y aprender matemáticas. Esto es positivo en el sentido del uso de la resolución de problemas como estrategia didáctica.

### *Características de los problemas matemáticos*

También se indagó sobre el grado de acuerdo con algunas posibles características de los problemas matemáticos (4 completamente de acuerdo, 3 muy de acuerdo, 2 de acuerdo, 1 en desacuerdo y 0 completamente en desacuerdo). La tabla 3 muestra los resultados obtenidos.

Con respecto a algunas de las características que se propusieron, los profesores mostraron mayor grado de acuerdo con la que dice que un problema matemático solo tiene una respuesta correcta; el 50% dijo estar de acuerdo o muy de acuerdo con esto. También más del 50% mostró algún grado de acuerdo con que un problema matemático debe poder resolverse en menos de 15 minutos o, incluso, en menos de 10 minutos. Esto coincide tanto con los estudios mencionados como con lo que piensan los estudiantes; alumnos de estos profesores.

### **La resolución de problemas en la enseñanza aprendizaje de las matemáticas.**

Se proporcionaron seis posibles posiciones sobre lo que podría ser el papel principal de la resolución de problemas en el proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas; el profesor debía clasificarlas de 0 a 5, donde 0 correspondía a la posición más alejada a la del profesor y 5 a la más cercana. Los resultados obtenidos se presentan en la tabla 4.

Los resultados obtenidos en este apartado son consistentes con los de los apartados anteriores. Los profesores piensan, mayoritariamente, que los problemas pueden ser utilizados en la enseñanza de las matemáticas para inducir el razonamiento crítico, el pensamiento creativo y la habilidad para construir y aplicar conceptos. En segundo lugar, piensan que sirven para contextualizar diferentes temas matemáticos. Es importante observar que, tanto aquí, como en apartados

Tabla 4

### Papel de la resolución de problemas en la enseñanza aprendizaje de las matemáticas

<b>Posición</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>NS/NR</b>	<b>Prom</b>
Apoyar y afirmar los conocimientos adquiridos por el estudiante después de desarrollar la teoría de un tema.	1	9	10	7	2	4	3	2,3
Desarrollar en el estudiante el pensamiento lógico y el tratamiento axiomático formal de las matemáticas.	4	4	5	5	12	3	3	2,78
Preparar de la mejor manera a los estudiantes para enfrentar con éxito los exámenes, en particular las pruebas nacionales.	15	5	5	6	2	0	3	1,24
Contextualizar diferentes temas de las matemáticas con el propósito de preparar a los estudiantes para la vida.	1	3	8	7	8	6	3	3,09
Inducir en los estudiantes el razonamiento crítico, el pensamiento creativo y la habilidad para construir y aplicar conceptos.	0	3	1	1	8	19	4	4,21
Motivar al máximo a los estudiantes para que adquieran los conceptos relacionados con un tema	11	9	5	7	1	0	3	1,33

previos, se denota que los profesores no creen que los problemas sirvan como medio para motivar a los estudiantes en la adquisición de nuevos conocimientos.

### **Posibles dificultades.**

Se indagó sobre las posibles dificultades a las que se podría enfrentar el profesor al desarrollar una estrategia de enseñanza aprendizaje de las matemáticas a través de la resolución de problemas.

Los profesores señalaron como la principal dificultad el elevado número de estudiantes que tienen en sus grupos. También señalaron como dificultades importantes (en ese orden) la gran cantidad de contenidos de los programas de estudio, la poca motivación de los estudiantes para aprender matemáticas y el poco tiempo lectivo. La mayoría de ellos piensan que la preparación de los profesores no es un obstáculo para utilizar la resolución de problemas como estrategia didáctica.

## **DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES**

En términos generales, muchos de los resultados obtenidos concuerdan con los obtenidos en estudios realizados en otras latitudes. Particularmente, se conceptualiza el término “problema matemático” desde el punto de vista de un enunciado verbal contextualizado. Por otra parte, se piensa, tanto por parte de los alumnos como de los profesores, que si alguien sabe del tema, debe poder resolver un problema en 15 minutos o menos; una mayoría significativa, en ambos grupos, incluso piensa que un problema matemático se puede resolver en menos de 10 minutos.

Las creencias mencionadas anteriormente juegan en contra de la posibilidad de utilizar la resolución de problemas como una estrategia en el proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas. En efecto, por un lado, en una estrategia de este tipo, un problema no necesariamente debe ser del estilo clásico: verbalización, contextualización; por el contrario, muchas situaciones puramente matemáticas pueden servir como un disparador del proceso de adquisición de conocimientos. Por otra parte, el proceso de resolución de un problema retador

que realmente lleve a adquirir conceptos o a establecer la necesidad de estudiar nuevos temas, requerirá de tiempo; es posible que, usualmente, 15 minutos no sean insuficientes.

Debemos observar que, también, en su mayoría los profesores muestran un alto grado de acuerdo con que los problemas pueden servir para enseñar y aprender matemáticas y que el estudiante pueda hacer sus propios descubrimientos. Esto juega a favor de la resolución de problemas como estrategia didáctica.

En cuanto a las principales dificultades que los profesores piensan que se podrían presentarse al utilizar la resolución de problemas como estrategia didáctica, hay tres que tienen que ver con aspectos relacionados con el sistema como un todo: la cantidad de los temas de estudio, el número de estudiantes por grupo y el tiempo lectivo. Efectivamente son dificultades a tener muy en cuenta, pero podría investigarse y evaluarse de qué manera pueden ser superadas. La otra dificultad (falta de motivación de los estudiantes) está más en las manos del profesor durante el proceso y, más bien, es posible que a través de la misma actividad de resolución de problemas pueda ser superada; aunque, como se dijo antes, los mismos profesores no crean que los problemas pueden ser fuente de motivación hacia el aprendizaje de las matemáticas.

De acuerdo con algunas de las creencias sobre las características de los problemas que aparecen tanto en estudiantes como en profesores, puede pensarse que los segundos inducen, con su hacer en el aula, tales creencias en los primeros. Particularmente es importante el hecho de que los estudiantes piensen, igual que los profesores, que los problemas matemáticos deben ser resueltos en poco tiempo. Esto posiblemente implica que más que en problemas ambos grupos estén pensando en ejercicios, del tipo que se presentan usualmente en clase y en libros de texto, para reforzar los conceptos estudiados.

Aunque la gran mayoría de profesores encuestados considera que la preparación de los profesores no es una dificultad para el uso de los problemas como estrategia didáctica, pensamos que la confusión conceptual que denotan al respecto implica la necesidad de una apropiada capacitación en este tema.

## REFERENCIAS

Barrantes, H. (2008a). Creencias sobre las matemáticas en estudiantes de la enseñanza media costarricense. En *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática*, número 4.

Barrantes, H. (2008b). Encuesta: creencias en la educación matemática. En *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, número 4.

Bay, J. (2000). Linking Problem Solving to Student Achievement in Mathematics: Issues and Outcomes. Extraído el 14 de agosto de 2007 de [http://www.ncacasi.org/jsi/2000v1i2/problem\\_solv\\_3](http://www.ncacasi.org/jsi/2000v1i2/problem_solv_3)

Callejo, M. y Vila, A. (2003). *Origen y formación de creencias sobre la resolución de problemas: Estudio de un grupo de alumnos que comienzan la Educación Secundaria*. Extraído el 3 de marzo de 2007 de <http://www.ma.usb.ve/bol-amv/vol10.html#numero2>

Charnay, R. (1994). Aprender (por medio de) la resolución de problemas. En C. Parra e I. Sais (Eds.), *Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones* (pp. 51-64). Barcelona: Paidós.

Gómez, P. y Carulla, C. (s. f.). *Innovación curricular en pre-cálculo y la potenciación de estrategias en la resolución de problemas*. Extraído el 18 de agosto de 2007 de <http://cumbia.ath.cx:591/pna/Archivos/GomezP98-2059.PDF>

Pólya, G. (1990). *Cómo plantear y resolver problemas* (XV reimposición de la 1ª edición en español, 1965). México: Editorial Trillas.

Remesal, A. (1999). *Los problemas en la evaluación del aprendizaje matemático en la escuela obligatoria: perspectivas de profesores y alumnos*. Tesis doctoral, Universidad de Barcelona. Disponible en [www.tesisenxarxa.net/TESIS\\_UB/AVAILABLE/TDX-1023106-140538//02.ARO\\_PRIMERA\\_PARTE.pdf](http://www.tesisenxarxa.net/TESIS_UB/AVAILABLE/TDX-1023106-140538//02.ARO_PRIMERA_PARTE.pdf)

Repetto, C., Linskens, M. y Fesquet, H. (1940). *Aritmética y álgebra* (XVI edición). Buenos Aires: Kapelusz.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving* (1a. edición). Orlando, Florida: Academic Press.

Schommer-Aikins, M., Duell, O. y Hutter, R. (2005). Epistemological Beliefs, Mathematical Problem-Solving Beliefs, and Academia Performance of Middle School Students. *The Elementary School Journal*, 105(3), 209-304. Versión en línea: [www.journals.uchicago.edu/ESJ/journal/issues/v105n3/1050303/1050303.web.pdf](http://www.journals.uchicago.edu/ESJ/journal/issues/v105n3/1050303/1050303.web.pdf)