INCORPORACIÓN DE LA TECNOLOGÍA PARA LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS (EDO)

Yuri Morales López
Escuela de Matemática
Universidad Nacional, Costa Rica
ymorales@una.ac.cr
Oscar Salas Huertas
Escuelas de Matemática
Universidad Nacional y Universidad de Costa Rica
Costa Rica
osala@una.ac.cr

Resumen

En este trabajo se expone la necesidad de la incorporación de la tecnología y de los procesos de modelización en el curso de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO) de la carrera de Enseñanza de la Matemática en la Universidad Nacional en Costa Rica, con el fin de motivar a los alumnos para que logren: hacer un tratamiento discreto de la información, acceder al razonamiento estocástico para la búsqueda de las soluciones, y utilizar la matemática discreta, la modelización y la optimización de procesos para la interpretación de los problemas, entre otros. En particular, se presentan los principales resultados de la experiencia sistematizada en este curso durante el segundo periodo del 2008 en la Universidad Nacional.

Palabras clave

Ecuaciones diferenciales, modelación e interpretación de fenómenos, uso de tecnología.

Abstract

The aim of this paper is to illustrate the need for the incorporation of technology and process modeling in the course of Ordinary Differential Equations (ODE), of the major in Mathematics Education in the Universidad Nacional in Costa Rica, in order to motivate students to achieve: to make a discreet handling of information, access the stochastic reasoning for the search of solutions, and use discrete mathematics, modeling and optimization processes for the interpretation of problems, among others. In particular, we show the main results of the systematized experience in this course during the second half of 2008 at the Universidad Nacional.

Keywords

Differential equations, modeling and interpretation of events, use of technology.

1. Introducción

La tecnología juega un papel fundamental en todos los sectores de la sociedad. La investigación en las ciencias exactas y las sociales se ha visto nutrida por información obtenida del análisis de datos que, cuatro décadas atrás, hubieran sido imposibles de analizar. Toda esta nueva información ha conducido a replantear, día con día, los modelos construidos sobre una base de conocimiento que sufre cambios, cada vez, con mayor velocidad.

Múltiples sectores de nuestra sociedad del conocimiento trazan esfuerzos para poder plantear modelos los cuales expliquen, con mayor exactitud, lo que ocurre en diversos fenómenos naturales o eventos propios de nuestro quehacer.

Para esta tarea, es innegable que el futuro profesional debe contar cada vez con mejores destrezas y habilidades tanto cognitivas como meta–cognitivas. Es decir, el nuevo profesional no solo deberá ser consciente del cómo aprende y reaprende, sino que también, deberá contar con la habilidad de ser crítico y saber cómo resolver problemas.

Bajo estas consideraciones, todos los sectores de la educación costarricense tienen un grado de responsabilidad, pero, la educación superior tiene una tarea tanto difícil y loable, como romántica: ofrecer al futuro profesional las mejores herramientas, destrezas, habilidades y conocimientos para desarrollarse en su área y, al mismo tiempo, estar acorde con las necesidades sociales y ambientales.

Para esto, la educación superior debe encargarse de ofrecer el conocimiento de una manera integrada, sin desligar un área de otra. Es en este sentido que la matemática puede ser una herramienta para ofrecer las habilidades y destrezas antes mencionadas. Consecuentemente, la matemática puede nutrir otras áreas mediante estrategias que involucren la modelación de fenómenos y las simulaciones con computadores.

¿Por qué se estudian las ecuaciones diferenciales (modelización matemática)?

Las EDO es uno de los temas más apasionantes de la Matemática Aplicada que nos transporta a la modelización de problemas del entorno; en este sentido, entenderemos por modelización matemática, esencialmente, el traslado de un problema del mundo real a un problema matemático, resolver el problema matemático e interpretar la solución en el lenguaje del mundo real.

Si se desea preparar a economistas, ingenieros, matemáticos, biólogos, entre otros, para la modelización de problemas complejos, en los que una masa de información irrelevante oscurece el objetivo central y, además, la habilidad principal consiste en destacar dicho objetivo y seleccionar la información necesaria, entonces la formación debe diferir claramente de la tradicional, en la cual según Brousseau (1986), las clases están dirigidas a comprender conceptos abstractos, demostrar teoremas y resolver ecuaciones, muy conveniente para la formación de matemáticos puros; pero insuficientes para el que va a aplicar la matemática o en la formación inicial de un profesor de matemática (Almeida, V., Bruna, A., Espinel, M.C., García, J.A., Bermúdez, M., González, M., 1998).

Si desde la enseñanza obligatoria se llegara al conocimiento matemático resolviendo problemas en íntima conexión con la vida diaria, las ciencias humanas, o con la física, y se educara al alumno en la modelización de tales problemas, entonces el ciudadano medio tendría un mejor concepto sobre la necesidad, el interés y el poder de las Matemáticas. Por todo ello, existe en la actualidad una corriente en Educación Matemática que sostiene con fuerza la necesidad de que el aprendizaje de las matemáticas se realice en continuo contacto con las situaciones del mundo real que les dieron y le siguen dando su motivo y vitalidad.

En los últimos años, los avances en cuanto al poder de cálculo de la computadora han ocasionado que la enseñanza de la matemática en cursos como Métodos Numéricos o Ecuaciones Diferenciales, puedan contar con una metodología propia de las ciencias experimentales, en el sentido de poder experimentar y comprobar. Al mismo tiempo, es fundamental considerar que los procesos a los cuales se les trata de dar respuestas con el uso de la computadora necesita de objetos discretos y procesos finitos, lo cual ha puesto de moda temas como: combinatoria, matrices, geometría combinatoria, problemas de optimización, procesos iterativos, recursividad, entre otros. Dichas cuestiones se suelen unificar con el término matemática aplicada o discreta, ya que tratan, en general, fenómenos discretos y procesos finitos de la vida real.

Entonces, es indiscutible que los métodos numéricos utilizados en el curso de EDO cuentan en este momento de gran auge no solo debido al papel que juegan actualmente las computadoras, sino que, como ya lo mencionamos, puede existir una relación y aplicabilidad de los contenidos en una amplia variedad de disciplinas tales como biología, química, ingeniería, informática, sociología, etc.

Es clara la importancia de entender el papel y rol que juegan las matemáticas aplicadas dentro del currículum de formación inicial para profesores de Enseñanza de la Matemática; sobre todo cuando se observa que el material existente en cursos tales como Ecuaciones Diferenciales no cumple con las expectativas ni se adapta a las necesidades concretas de los futuros formadores.

Es por lo anterior que consideramos necesaria la incorporación de la tecnología y de los procesos de modelización en el curso de EDO, en particular, en la carrera de Enseñanza de la Matemática de la Universidad Nacional, en Costa Rica, con el fin de motivar a los alumnos para que, entre otras cosas, logre: hacer un tratamiento discreto de la información, acceder al razonamiento estocástico para la búsqueda de las soluciones, y utilizar la matemática discreta, la modelización y la optimización de procesos para la interpretación de los problemas.

Por último, cabe mencionar que nuestros objetivos implícitos en el curso procuran: promover la conexión entre las distintas partes de la matemática, resolver problemas con aplicaciones al mundo real, dominar los principios básicos de iteración, recursión e inducción, utilizar los conceptos matemáticos para modelizar diversas situaciones y aplicar métodos discretos de optimización para los distintos problemas.

2. Marco referencial

La enseñanza y aprendizaje de la EDO es un área de sumo interés en muchas carreras universitarias; en gran medida, esto se debe a que esta disciplina nació como necesidad práctica. Los resultados de Newton y Leibniz entre el siglo XVII y XVIII fueron los grandes detonantes para que se desarrollara toda una teoría sobre las ecuaciones que contienen funciones y sus derivadas.

Para entender cómo están aprendiendo los estudiantes esta área, es indispensable conocer cuál es su escenario o su contexto y qué cursos de matemáticas han superado. Además de esto, es necesario conocer cuáles son algunas de las deficiencias más comunes con las que un estudiante concluye el curso de EDO. Existen ciertas señales que nos pueden permitir conocer el aprovechamiento en estos cursos; por

[1]Existen distintos enfoques de cómo enseñar ecuaciones diferenciales y sus herramientas, este trabajo enfoca el uso de tecnología. Esto no quiere decir que se deba omitir la historia como recurso, sino que, ambos pueden ser utilizados para lograr una mediación pedagógica.

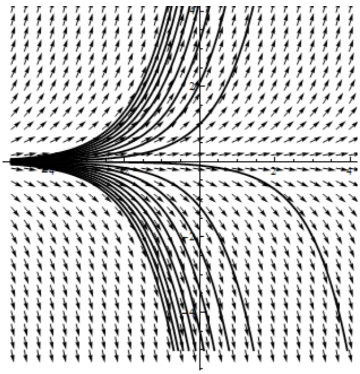
ejemplo, es válido preguntarse cuáles son las bases previas del estudiante, esto es: ¿cuál fue el enfoque con el que se manejó el concepto de límite, derivada, integración y serie? ¿Con qué frecuencia se relacionan estos conceptos con aplicaciones en fenómenos naturales o sociales? ¿Con cuáles herramientas cuenta el estudiante para la modelación y simulación de fenómenos? ¿Se ha formalizado un concepto de error por aproximaciones o errores relativos?

Otro factor es el enfoque con el que se pretenda resolver los problemas asociados. Según Nápoles, González, Genes, Basabilbaso y Brundo (2004) existen tres grandes enfoques: el algebraico, el numérico y el geométrico, los cuales están asociados a la teoría de las múltiples representaciones.

Una de las problemáticas con la que cuenta la enseñanza de esta disciplina es que, aún hoy, predomina el enfoque algebraico como reflejo de la primera forma que se tuvo de resolver estos problemas. Para Nápoles y otros (2004) "esto ha traído, como consecuencia, que se tenga una visión muy parcial de los métodos que existen para resolver ecuaciones diferenciales, pues frecuentemente en el estudio de los modelos determinísticos se requiere establecer articulaciones entre los diferentes acercamientos." (p. 46)

Esto también causa que el estudiante sienta reticencia a interpretar gráficas y tratar de establecer conjeturas a partir de la visualización; un ejemplo de esta problemática es tratar de interpretar la solución de gráficamente, mediante soluciones particulares y el campo de direcciones; aunque los estudiantes están familiarizados con las funciones exponenciales desde la secundaria, no logran, comúnmente, interpretar la solución (ver gráfica 1). Inclusive, autores como Dobbs (2004) señalan que, hasta el factor A de la ecuación anterior puede ser de gran interés desde las ciencias a las matemáticas, y viceversa; el problema principal se presenta cuando el estudiante posee deficiencias en el concepto relacionado con esta función y sus posibles interpretaciones.

Gráfica 1. Campo direccional y algunas soluciones particulares para $y' = y$



En una investigación de Moreno y Azcárate (2003) llamada *Concepciones y Creencias de los Profesores Universitarios de Matemáticas acerca de la Enseñanza de las Ecuaciones Diferenciales*, se mostró que los docentes involucrados creen que:

1. "Los estudiantes aprenden las ecuaciones diferenciales por imitación y memorización de situaciones y por esquemas de resolución vistos en clase". (p. 271)

2. "Los estudiantes son incapaces de pensar, crear y razonar por ellos mismos". (p. 271)

3. "Las definiciones son algo mecánico que tiene que aprenderse y en donde no hay nada que entender." (p. 271)

4. "Sería mucho más interesante interpretar un modelo matemáticamente que invertir tanto tiempo en resolver diferentes tipos de ecuaciones mecánicamente." (p. 272)

5. "La utilización de ordenadores de forma sistemática nos obligaría a cambiar la manera actual de enseñanza de las ecuaciones diferenciales y a dar más importancia a los métodos gráficos y numéricos." (p. 272)

6. "La formación de los profesores como matemáticos está muy alejada de las aplicaciones a otros campos de las ciencias experimentales." (p. 272)

7. "Dado que las técnicas y los modelos matemáticos son dos aspectos difíciles de reconciliar, los profesores finalmente suelen elegir uno." (p. 272)

8. "Resulta mucho más fácil aprender a resolver una ecuación diferencial que reconocer un modelo matemático, de forma que los profesores suelen optar por el camino más fácil." (p. 272)

Además de los factores mencionados, ciertas prácticas son habituales en la enseñanza de la matemática y, por ende, en la enseñanza de las EDO. Por ejemplo, para realizar correcciones de cálculo, se enseña a los estudiantes que, únicamente, deben insertar la solución que obtuvieron, dentro de la ecuación original para verificarla. (Yeung y Chung, 2007). Es decir, en muy pocas ocasiones se le muestra al estudiante que la solución de un problema (no necesariamente la solución exacta) puede ser la suma de evidencia como gráficos, aproximaciones, entre otros.

Otros autores como Raychaudhuri (2007) señalan que la mayoría de los problemas con los que cuentan los estudiantes en cursos de Ecuaciones Diferenciales pueden deberse a la poca comprensión e importancia que se le otorga al conocimiento de los teoremas de existencia y unicidad.

Por otra parte, Puga (2001) opina que la problemática principal puede estar arraigada en lo que él denomina como *problemas didácticos* en los cursos tradicionales en esta temática. Este autor indica los siguientes problemas: falta de modelización o escasez de procesos completos de modelización; poco o nulo balance entre los tres enfoques (algebraico, geométrico y numérico) en la solución de las ecuaciones diferenciales, escasez en el análisis e interpretación de soluciones, validación de soluciones, ejemplos de ajustes de modelos y predicciones.

A las referencias y posturas mencionadas anteriormente, se debe agregar un factor primordial y complejo: *el enfoque curricular en la Enseñanza de las Matemáticas*. Las nuevas tendencias en Educación Matemática, proponen que cuando se analice el proceso de enseñanza aprendizaje, se considere como un fin principal el hecho de que los estudiantes comprendan las matemáticas o que logren competencia o capacidad matemática.

Por consecuencia de lo anterior, surge la necesidad de definir la noción de competencia,

> Competencia se refiere a la persona 'competente' como al "conocedor de cierta ciencia o materia, o experto o apto en la cosa que se expresa o a la que se refiere el nombre afectado por 'competente'". La competencia se relaciona con la aptitud, capacidad, disposición, "circunstancia de servir para determinada cosa". Una persona apta, o capaz, es "útil en general para determinado trabajo, servicio o función".
>
> Diccionario de uso español de María Moliner.

> Una "competencia" se entiende como "la capacidad de realizar una tarea o de finalizar algo con éxito". Pone en juego la noción de 'capacidad', que se refiere tanto al nivel general de inteligencia de alguien como a la cualidad o destreza que tiene esa persona para hacer una cosa particular.
>
> Diccionario Penguin de Psicología

Parece claro entonces que la competencia es un rasgo cognitivo y disposicional del sujeto; también que será distinta según el campo profesional, el objeto de saber o la edad. Hablamos así de competencia matemática para el ingeniero, el físico, para el actuario, el estudiante de enseñanza de la matemática o del matemático puro.

Competencia y comprensión se complementan: la competencia atiende al componente práctico, mientras que la comprensión al componente teórico del conocimiento. La competencia pone en juego conocimientos de tipo procedimental, mientras que la comprensión requiere conocimiento conceptual.

La sociedad, por lo tanto, valora la acción; pero, nos planteamos la interrogante ¿es posible o deseable la acción sin comprensión? Parece que la acción será más flexible y adaptable, generalizable, y por tanto, más eficaz si va acompañada de comprensión, de saber por qué se hacen así las cosas (Godino, 2003).

Para lograr la comprensión y la competencia matemática Godino (2003), nos plantea dos cuestiones básicas:

> ¿Qué comprender? ¿Cuáles son los conocimientos matemáticos que queremos que nuestros alumnos lleguen a dominar? La respuesta a estas preguntas es el eje descriptivo, que indicará los aspectos o componentes de los objetos a comprender.
>
> Definir la "buena" comprensión y la "buena competencia" matemática requiere definir previamente las "buenas" matemáticas. (p. 4)
>
> ¿Cómo lograr la comprensión y la competencia por parte de nuestros alumnos? La respuesta a esta pregunta es el eje procesual que indicará las fases o momentos necesarios para el logro tanto de la "buena" comprensión como de la "buena" competencia. (p. 4)

De esta forma el logro de la competencia y comprensión, están por consiguiente, íntimamente ligadas al cómo concebimos el conocimiento matemático.

Los términos y expresiones matemáticas denotan entidades abstractas, cuya naturaleza y origen tenemos que explicitar, para poder elaborar un modelo útil y efectivo, razonando sobre lo que entendemos por: comprender tales objetos. De lo anterior, surgen las siguientes preguntas ¿Cuál es la estructura del objeto a comprender? ¿Qué formas o modos posibles de comprender existen para cada objeto matemático? ¿Qué aspectos o componentes de la práctica y el discurso matemático es posible y deseable que aprendan los estudiantes en un momento y circunstancias dadas? ¿Cómo articular el estudio de sus diversas componentes?

Este último factor analizado debe llevarnos entonces, coherentemente, a reconocer también que debe existir una determinada manera de entender las matemáticas y los objetos matemáticos y que, evidentemente, junto a la necesidad particular de comprender cómo se aprenden las EDO yace un panorama más amplio respecto al cómo aprender Matemáticas

3. Metodología

Los contenidos matemáticos han cambiado en las últimas décadas y también la manera de hacer matemáticas. La matemática ha adoptado ciertas metodologías de trabajo de las ciencias experimentales, sobre todo debido al uso de las computadoras. Las actividades como observar, explorar, utilizar discernimientos intuitivos, hacer predicciones, probar hipótesis, conducir ensayos, controlar variables, simular situaciones reales son cada vez más frecuentes, (Almeida, V., Bruna, A., Espinel, M.C., García, J.A., Bermúdez, M., González, M., 1998).

Dado los precedentes anteriores, como docentes hemos identificado las siguientes necesidades en el curso de Ecuaciones Diferenciales:

1. Reformar las prácticas actuales en el aula para incluir la historia y las tecnologías como herramientas útiles en el aprendizaje de esta disciplina.

2. Incluir actividades que involucren la exploración y el descubrimiento, donde la matemática se presente como una ciencia viva y en pleno desarrollo y no como una serie de recetas y conocimientos acabados.
3. Desarrollar las habilidades relacionadas con la creación de conjeturas y posibles acercamientos a la solución de problemas.
4. Utilizar los enfoques geométrico, algebraico y numérico como fuentes de hipótesis y como acercamientos a la solución de una ecuación diferencial.

Estas necesidades, a nuestro criterio, son un reflejo particular de lo que no poseen muchos de los currículos de formación docente en matemática, pero también, representan grandes metas a alcanzar en el desarrollo propio de cada curso.

Dado esto, en este primer acercamiento se planteó (propuesta):

1. Detectar algunas de las posibles causas que puedan influir en la comprensión de las Ecuaciones Diferenciales.
2. Integrar el contenido matemático con los métodos de formación donde el futuro docente se vea profesionalmente activo (acción para llevar al aula).
3. Implementar en el curso los contenidos matemáticos con problemas relacionados con la física y la química, entre otros; esto con el fin de lograr una posición activa y práctica de la materia.
4. Dotar al estudiante de herramientas para la comprensión del desarrollo teórico del curso de tal manera que, por un lado, el estudiante domine los medios que existen, tanto bibliográficos como programas de computadoras y, por otro lado, que desarrolle contenidos en acción y se percate de las posibles afinidades con temas relacionados.

Estrategias: Se concibió una serie de actividades con tres contenidos fundamentales; primero, programación estructurada básica orientada a los métodos numéricos clásicos para la resolución de las ecuaciones diferenciales (Euler, Euler modificado, Taylor y Runge – Kutta de cuarto orden); en segundo lugar, funciones predefinidas de trazas y graficación, principalmente asociadas a la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias, y por último, funciones predefinidas en los software para la resolución algebraica de las EDO. Estas se basaron, fundamentalmente, en ejercicios relacionados con la bibliografía recomendada y apoyados con los tutoriales de los fabricantes de los *software.*

Circunstancia inicial: Se elaboró esta propuesta de curso contemplando que los estudiantes no han sido formados bajo un currículo fuertemente apoyado en el uso de las TIC's y, por lo tanto, se requirió trabajar en algunos conceptos básicos sobre el uso de software y una breve introducción a la programación estructurada (ver tabla 1).

Tabla 1. Principales instrumentos utilizados para el desarrollo del curso (propuesta) y sus respectivos enfoques.

Instrumentos de evaluación durante el curso de Ecuaciones Diferenciales					
Pruebas tradicionales, laboratorios de programación y proyecto de aplicación					
Enfoque algebráico		Enfoque geométrico		Enfoque numétrico	
Pruebas escritas tradicionales	Pruebas Cortas	Pruebas Cortas	Integración gráfica en el laboratorio	Pruebas extra-clase	Laboratorios de investigación

Sobre la población y el contexto: Para este trabajo se tomaron los dos grupos del curso de Ecuaciones Diferenciales impartido en el IV nivel de la carrera de Enseñanza de la Matemática de la Universidad Nacional en el II ciclo del 2008; dichos grupos contaron inicialmente con una población de 44 estudiantes en total.

Sobre la metodología del curso: La estrategia utilizada para el desarrollo de las lecciones comprendió una componente teórica y una práctica, de manera tal que, durante la primera fue desarrollada la teoría necesaria para la resolución de las EDO; esto mediante clases magistrales, en las cuales, la participación del estudiante consistía en el aporte de ideas para la resolución de ejercicios seleccionados y pertinentes de acuerdo con el modelo propuesto. La segunda correspondió al desarrollo de las clases en el laboratorio de cómputo; en ellas, el estudiante tuvo una participación activa tanto en el desarrollo como en la aplicación de los métodos numérico y geométrico que, a la postre, serían los necesarios para resolver los problemas de aplicación asignados por los profesores en un proyecto final del curso. Se programó una visita al laboratorio por cada tres visitas al salón de clase, aproximadamente, durante todo el ciclo.

Sobre la evaluación: Se propuso tres pruebas teóricas, pruebas cortas y tareas planeadas para comprobar el dominio de los conceptos tradicionales relacionados con el enfoque algebraico, la elaboración y exposición de un trabajo grupal, y la realización de un proyecto final. En éste, las herramientas tecnológicas se utilizaron para: promover las múltiples representaciones (logrando que el estudiante trascienda la solución algebraica), la modelización (tomando un problema de la vida real y formulando el modelo matemático necesario para resolverlo) o el análisis de soluciones (para la aproximación de soluciones numéricas y la representación geométrica de familias de curvas y campos direccionales).

Percepción del estudiante: Se decidió construir un Blog en la plataforma del sitio Google (www.edouna.blogspot.com) para que los estudiantes compartieran, a modo de anecdotario, su percepción respecto al curso, la metodología y el uso de las herramientas tecnológicas; esta herramienta estuvo disponible del 18 de agosto al 16 de noviembre del 2008 y en este espacio se pudo documentar 209 aportes.

Sobre el software: Se trabajó con Mathematica versión 6.0 en un grupo y MatLab versión 7.0 en el otro (versiones de prueba). Una hipótesis establecida (y que no fue posible analizar por los autores en este trabajo) fue que para fines prácticos del curso, los software de programación no son más que una colección de modelos conceptuales, por lo que, la instrucción podrá variar en forma, pero, no de fondo. En el próximo apartado se describen las experiencias obtenidas y otras consideraciones.

En este apartado se exponen los principales resultados e implicaciones de la aplicación de la propuesta; para esto, se deseó incluir en este análisis, tres ángulos distintos respecto a las incidencias desde la perspectiva del docente, desde la perspectiva curricular y, por último, la del estudiante.

4. Análisis y resultados

1. Cambios en las prácticas habituales

Desde la perspectiva curricular, la coyuntura histórica de la enseñanza de la Matemática ha mostrado que los cursos tradicionales de nivel superior se basan en metodologías magistrales y eso, poco a poco, caló en lo que el estudiante considera un curso avanzado. Durante las primeras etapas de la aplicación de la propuesta existió un ambiente de desconcierto respecto a un curso que, por tradición, se trabaja por teoremas y técnicas algebraicas para resolver las ecuaciones.

Esta confusión inicial respecto al trabajo se debió a dos razones principales: primero, tratar de involucrar la interpretación (algebraica, numérica y geométrica) en las soluciones de una ecuación, y segundo, desconcierto debido al papel que jugaría el estudiante cuando utilizara la tecnología.

Desde la perspectiva del docente, el cambio que representa incluir estos tres enfoques también requirió planificación, e inclusive, aceptar que las discusiones habituales, poco a poco, se transformaron en preguntas no habituales a un curso clásico.

Apreciación del estudiante: “me preocupa la parte que es del proyecto o de los trabajos que se deben presentar con el programa de Mathematica 6, siento que se debe tener más preparación para el manejo, ya que no solo consiste en travesearlo”.

2. El papel del enfoque tradicional dentro de la propuesta

Los procesos de innovación, muchas veces, pueden ser planificados y estructurados sistemáticamente, pero, lo que cualquier proceso de este tipo debe asegurar es no entorpecer o menospreciar objetivos que ya eran exitosos. Bajo esta premisa, uno de los retos presentes en esta modificación de la estrategia curricular fue no disminuir la comprensión en los teoremas y técnicas algebraicas que se alcanzaban bajo la propuesta clásica.

Basado en esto, se planificó que las pruebas escritas principales guardarán énfasis en el enfoque algebraico y con el nivel tradicional de exigencia en los temas. Ahora, puesto que el porcentaje de evaluación en estas pruebas es alto y, aclarando que no se ha realizado un análisis comparativo con cursos anteriores, sí se puede afirmar que la promoción fue alta.

Sin ni siquiera tratar de conjeturar que la propuesta es más efectiva que el trabajo que se ha venido realizando en los ciclos anteriores, se pudo rescatar que el estudiante se sintió motivado por el uso de la herramienta tecnológica.

Apreciación del estudiante: “Éste software es de gran ayuda, ya que facilita el trabajo y permite una mejor percepción y comprensión de conceptos que quizás consideramos abstractos, ya que estamos acostumbrados por los cursos que llevamos y en los libros que leemos, a un modelo algebraico”.

3. Problemáticas en el enfoque alternativo

Es oportuno mencionar que como cualquier otro proceso de enseñanza-aprendizaje el enfoque alternativo bajo el cual se desarrolló el curso de Ecuaciones Diferenciales no está exento de problemáticas. Las mismas se presentan en varias etapas del proceso;

• Se debe ser muy precavido cuando se planean las actividades o situaciones didácticas que servirán, a posteriori, en el aula para generar conocimientos y motivar a los alumnos a la búsqueda de soluciones; las actividades llamadas por Brousseau (1997) situaciones a-didácticas son los principales indicadores de que el alumno está asimilando los conocimientos.

• Las vivencias en el aula y, en particular, en el laboratorio fueron fundamentales para que el estudiante llevara a la práctica los conceptos teóricos aprendidos, pero introdujeron una serie de variables que el docente no pudo subestimar; el estudiante posee, para la resolución de problemas planteados por el profesor, lo que Schoenfeld (1985) llamó inventario de recursos adquiridos a lo largo de sus años de estudio, y se tuvo que intervenir en el momento oportuno para aportar correcciones, pues algunos de estos recursos podrían haber sido defectuosos y confundir el trabajo realizado por el alumno; otro aspecto esencial que se tiene que considerar es el “control” pues cuando se asignaron problemas para que el alumno los trabajara, estos por su naturaleza, podían ser resueltos siguiendo diferentes caminos, por lo tanto, el estudiante debió escoger la heurística que iba a utilizar para resolverlo (i.e. el estudiante tiene el control).

Esto genera una dinámica interesante pues el alumno debe tener la capacidad de identificar cuando la heurística utilizada no lo está llevando a ninguna parte y entonces debe decidir volver al inicio y cambiar la estrategia. Cabe destacar que la situación anterior no es natural para el alumno, pues como pudimos constatar, él mismo no está familiarizado con la idea de equivocarse cuando resuelve un determinado problema matemático.

• Otras importantes consideraciones se pueden realizar a partir de las experiencias generadas del trabajo o proyecto de investigación asignado a los estudiantes como parte de la evaluación del curso. Aquí se pudieron identificar una serie de aspectos para los cuales los estudiantes parecen no haber construido las suficientes estrategias para resolver problemas a lo largo de la carrera, por ejemplo, dado un problema de la vida real ellos poseen poca habilidad para pasarlo al lenguaje matemático; cuando se atascan o encuentran dificultad para encontrar la solución, parecen no tener la capacidad de buscar mecanismos de simplificación o mecanismos que les permitan enfrentar el problema de un modo diferente; una vez que logran encontrar la solución a un determinado problema tiene dificultades extraordinarias para discernir si la misma corresponde a algo práctico o una solución teórica (etapa de validación de la respuesta). De hecho, muestran importantes barreras cognoscitivas que les imposibilita en muchos casos adaptar una respuesta obtenida, a través de una fórmula matemática, para una respuesta que explique lo que sucede en un determinado fenómeno físico.

• Una última acotación que nos queda por hacer, concierne a la evaluación de los procesos, hasta cierto punto complejos, que se generan cuando se utiliza la modelización como herramienta para lograr la comprensión de los contenidos matemáticos. La inquietud fundamental es la ausencia de instrumentos aptos para medir si el estudiante adquirió una determinada competencia o no; además, si la adquirió, ¿en qué medida es capaz de utilizarla? Por ejemplo: se necesitan procesos de evaluación que brinden información sobre la capacidad de interpretación que posee el estudiante y la forma en que se enfrenta a un problema de modelización; en dichos instrumentos se debe evidenciar la forma y la profundidad con que cada uno de los objetivos fue alcanzado. Por otra parte, coincidimos con las ideas de Barbosa (2006), y pensamos que los procesos de evaluación deben retroalimentarse con la oportuna creación de espacios de discusión donde el estudiante comparta con sus compañeros y con el profesor las ideas utilizadas durante el proceso de modelización, ya sean aquellas de carácter puramente matemático, aquellas de carácter tecnológico que le permiten construir el modelo, y aquellas que tienen que ver meramente con la reflexión acerca de los criterios utilizados para la creación del modelo.

4. Influencia del uso de la tecnología

A lo largo del presente artículo hemos tratado de evidenciar la importancia de la componente tecnológica y el peso de la misma dentro del enfoque que adoptamos para el curso Ecuaciones Diferenciales. Sin embargo, tenemos que ser claros en que se detectaron una series de deficiencias en la formación inicial de los estudiantes de la carrera, los cuales llegan a los niveles superiores sin contar con los conceptos elementales de la programación; éstos son esenciales para desarrollar procesos numéricos y geométricos con un nivel de matemática adecuado (puede suceder lo mismo en el curso de Métodos Numéricos). Parecería necesario entonces, que las carreras de matemática cuyo currículo contenga estos cursos, realicen un esfuerzo importante para ofrecerle al estudiante competencias que vayan más allá de la utilización de software asociados a la ofimática u otros donde el alumno solo tiene que darle los datos y el programa se encarga de hacer la matemática (tipo caja-negra). En estos, comúnmente, los estudiantes confían ciegamente en lo que hace el software sin poder intervenir en el proceso.

Tomando en consideración la calidad de algunos de los trabajos presentados por los estudiantes del curso, se deduce que ellos sí cuentan con las habilidades necesarias para aprender y comprender programación enfocada a la matemática. Para aprovechar esto, lo fundamental debe ser, primero, estimular este tema al inicio de la carrera y, segundo, mostrar al estudiante el nuevo panorama matemático que le ofrecen estas herramientas.

Apreciación del estudiante: “El formato del proyecto, donde se debe programar los métodos de Euler, Euler mejorado y Runge – Kutta nos permite visualizar las facilidades que nos pueden ofrecer las herramientas tecnológicas para convertir procedimientos repetitivos pero muy extensos en procedimientos fáciles y rápidos de visualizar”.

5. Consideraciones finales

Junto a las razones y evidencias expuestas en el apartado anterior, en este trabajo también se pretendió detectar algunas posibles causas que influyen en la com-[2] prensión de la resolución de las ecuaciones diferenciales por parte de los estudiantes; complementariamente a las posibles razones que la bibliografía expuesta ofrece, a nuestro criterio, estas se concentran en tres grandes problemáticas:

• *Debilidades en el concepto de aproximación y métodos numéricos simples*. Se considera que el estudiante muestra ciertas debilidades en temas como las series, el polinomio de Taylor y el caso de Maclaurin para la aproximación numérica de funciones con radios de convergencia útiles para ciertos problemas de aplicación. Esta poca experiencia causó que, para muchos, el concepto de aproximación numérica en el curso fuera algo extraordinario, cuando debió ser una estrategia casi natural. Además, al parecer, los estudiantes tienen una percepción de que las aproximaciones numéricas no representan una herramienta, ni poseen carácter de validez en la Matemática.

• *Debilidades en interpretación de resultados*. Durante las clases impartidas tanto en el laboratorio como en el salón de clases, se detectó que los estudiantes no poseen todas las competencias, que como profesores apreciamos que son necesarias para analizar las posibles interpretaciones de los resultados algebraicos, geométricos y numéricos.

• *Debilidad sobre el uso de herramientas tecnológicas a través de la carrera*. Este factor fue de relevancia en la propuesta pues, dentro de ésta, se tuvo que incluir actividades básicas para el uso del software que, consecuentemente, requirieron la inversión de recursos. En un supuesto ideal, el estudiante debería ser confrontado con recursos tecnológicos de un propósito definido; es decir, aunque existen cursos de previos sobre uso de la tecnología, esto no puede asegurar al cuerpo docente encargado de este curso, que el estudiante ha utilizado la herramienta para la explicación y resolución de problemas ni para la modelización de fenómenos en los cursos fundamentales de Geometría, Cálculo, entre otros.

Trabajo pendiente y recomendaciones

Durante la administración y la aplicación de la propuesta, se pudo detectar que existe la necesidad de profundizar en la sistematización de intenciones educativas, prácticas en y fuera del aula y, al mismo tiempo, profundizar en las didácticas específicas en esta disciplina para lograr comprender los conocimientos que cons-

[2] Este trabajo no se enfocó en una metodología explicativa o causa – efecto; las posibles causas de estas problemáticas se ofrecen desde la perspectiva como docentes del curso.

truye el estudiante cuando se involucran los distintos enfoques y el papel de las tecnologías en estos nuevos conocimientos. Asimismo, esta comprensión puede aportar más indicios de cuáles deben ser las técnicas adecuadas para evaluar estos nuevos conocimientos; inclusive, estos aportes podrían evidenciar la necesidad del uso de instrumentos evaluativos no tradicionales dentro de nuestras aulas.

Evidentemente, se hace necesario construir y mejorar instrumentos de recolección de información con el fin de documentar el impacto del uso de las herramientas tecnológicas, no solo en cursos de matemática aplicada, sino, en cursos de corte teórico y didáctico.

Por otro lado, como se mencionó en el apartado de análisis, una de nuestras principales preocupaciones en el curso fue poder aceptar la poca comprensión del gran problema que engloba una propuesta de este tipo; se hace esta aclaración, pues, más que un recelo a la innovación, se desea motivar, en particular, a los docentes para iniciar (o continuar) con procesos que involucren estrategias alternativas para enriquecer la investigación en las didácticas específicas de los cursos de nivel superior.

Por último, es importante motivar a los docentes para la toma de decisiones respecto a la incorporación de las tecnologías dentro de las carreras y, fundamentalmente, en áreas y cursos específicos; esto con el fin de impulsar cambios reales en todos los ámbitos y no, solamente, en directrices y políticas generales, las cuales están presentes en muchos currículos de formación de formadores en Matemática, pero que, pocas veces, son llevadas a la práctica.

Referencias y bibliografía

Almeida, V.; Bruna, A.; Espinel, M.C.; García, J.A.; Bermúdez, M.; González, M. (1998). *Matemáticas Para Nuestro Tiempo. Consejería de Educación, Cultura y Deportes*. Canarias.

Barbosa, J.C. (2006). *Mathematical Modelling in classroom: a critical and discursive perspective.* Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 38(3), 293-301.

Brousseau G. (1986). Fondements et Méthodes de la Didactique des Mathématiques, Recherches En Didactique des Mathématiques, Vol. 7.2, 33-115

Brousseau, G. (1997).*Theory of didactical situations in mathematics*. Kluwer Academic Publisher.

Dobbs, D. (2004). Classroom note: Recognizing exponential growth. *International Journal of Mathematical Education in Science & Technology*, 35(1), 153-158. Recuperado el 2 de marzo del 2009, de Academic Search Premier database Balderas

Garfunkel, S. (1991). F*or All Practical Purposes. Introduction To Contemporary Mathematics*. W.H. Freeman And Company. New York.

Godino, J.D.; Batanero, C.; Font, V. (2003). Matemática y su Didáctica para Maestros, Manual del Estudiante. Proyecto Edumat-Maestros. Edición Febrero 2003. Reprodigital, Granada. Recuperado de [http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/] el [1/2/2009].

Moreno, M.; Azcárate, C. (2003). Concepciones y Creencias de los Profesores Universitarios de Matemáticas acerca de la Enseñanza de las Ecuaciones Diferenciales. *Enseñanza De Las Ciencias*, 2003, 21 (2), 265-280.

Nápoles, J.; González, A.; Genes F.; Basabilbaso, F.; Brundo J.(2004). El Enfoque Histórico Problémico en la Enseñanza de la Matemática para Ciencias Técnicas: El Caso de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. *Revista Acta Scientae*. Volume 6 - Número 2. pp 41-59. Ed. Ulbra

Puga, A. (2001). Integration of CAS in the Didactics of Differential Equations. (ERIC Document Reproduction Service No. ED468390) Recuperado el 2 de marzo del 2009, de ERIC database. [http://math.unipa.it/~grim/ABalderas25-33]

Raychaudhuri, D. (2007). A layer framework to investigate student understanding and application of the existence and uniqueness theorems of differential equations. *International Journal of Mathematical Education in Science & Technology*, 38(3), 367-381. Recuperado el 2 de marzo del 2009, doi:10.1080/00207390601002898

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem solving*. New York: Academic Press.

Snell, J. (1988, September). *For All Practical Purposes: Introduction to Contemporary Mathematics* (Book). *American Scientist*, 76(5), 525-525. Recuperado el 2 de marzo del 2009, de Academic Search Premier database.

Wagner, J., Speer, N., & Rossa, B. (2007). Beyond mathematical content knowledge: A mathematician's knowledge needed for teaching an inquiry-oriented differential equations course. *Journal of Mathematical Behavior*, 26(3), 247-266. Recuperado el 2 de marzo del 2009, doi:10.1016/j.jmathb.2007.09.002

Yeung, K., & Chung, W. (2007). On solving differential equations using the Laplace transform. International *Journal of Electrical Engineering Education*, 44(4), 373-748. Recuperado el 2 de marzo del 2009, de Academic Search Premier database.