Matemáticas: una reconstrucción histórico-filosófica para una nueva enseñanza[1]

Ángel Ruiz
Escuela de Matemática[2]
Universidad de Costa Rica
Costa Rica

Resumen

Se trata en este trabajo de analizar el origen de la visión racionalista de las Matemáticas, con sus énfasis en los aspectos deductivo-formales, apriorísticos y axiomáticos, y cuya influencia ha sido decisiva en la enseñanza de las Matemáticas. Para la descripción analítica de este paradigma se aborda la Filosofía de las Matemáticas en los griegos, Descartes, Leibniz y Kant, así como en el periodo que va de 1870 a 1940. En esta investigación se busca hacer una reconstrucción interpretativa de la naturaleza e historia de las Matemáticas, capaz de fundamentar una nueva y necesaria actitud en la enseñanza de las mismas. Lo que se busca, entonces, es sugerir la necesidad de un cambio radical en la filosofía moderna de las Matemáticas, que permita importantes transformaciones en su Enseñanza.

Palabras clave

Educación Matemática, Enseñanza, Matemática, Filosofía de las Matemáticas.

Abstract

In this paper we analyze the origin of the Rationalist vision of Mathematics with its emphasis on the formal, deductive and axiomatic aspects, and whose influence has been decisive in mathematics instruction. The analysis description of this paradigm addresses the philosophy of mathematics in the classic Greeks, Descartes, Leibniz and Kant as well as in the period 1870 to 1940. This research seeks to make a theoretical re-interpretation about the nature and history of Mathematics, capable of founding a new and necessary approach in the teaching of Mathematics. What is intended, then, is to suggest the need for a radical change

[1] Publicado en UNESCO (1990). *Educación Matemática en las Américas VII* (Actas de la *VII Conferencia Interamericana de Educación Matemática*, celebrada en República Dominicana, 12-16 julio 1987).

[2] Se ha preservado la referencia institucional del autor en el momento que este artículo se publicó por primera vez.

Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática. 2011. Año 6. Número 7. pp 179-190. Costa Rica

in Modern Philosophy of Mathematics, which allow deep changes in its teaching.

Key words

Mathematics Education, Teaching, Mathematics, Philosophy of Mathematics.

El conflicto entre el Racionalismo y el Empirismo ha sido en el mundo de la epistemología un tremendo factor de separación de pensadores (y de ideas) en tradiciones antagónicas. Este ha generado en algunas ocasiones una falta de comunicación que ha repercutido en la ausencia de una comprensión más profunda de la naturaleza del conocimiento.

En la historia de la reflexión sobre las Matemáticas ha predominado como paradigma central uno que afirma al Racionalismo, que privilegia la "razón" por encima de la experiencia sensorial en la determinación de la verdad de las proposiciones de las Matemáticas. En torno al racionalismo se ha condensado una "ideología" que enfatiza los aspectos formales deductivos y axiomáticos que establece al conocimiento matemático como *a priori*, infalible, absoluto, y que ha tendido a favorecer la existencia de un mundo abstracto independiente, platónico, para las entidades de las Matemáticas. Esta "ideología" dominante ha determinado métodos, actitudes, programas, textos, etc., en la enseñanza de las Matemáticas.

Frente a esta ideología se ha opuesto tradicionalmente un empirismo "a lo Mill" que no da espacio a la mente más allá que el del ser reflejo de la experiencia sensorial, no dejando realmente lugar al sujeto epistémico. Por otra parte, dentro de los empiristas modernos del siglo XX (alrededor del Círculo de Viena), la posición de negación de contenido material a las matemáticas y reducción de su naturaleza al lenguaje, no pareciera tampoco una extraordinaria alternativa frente a la ideología racionalista.

El punto importante de entender tal vez sea que ni la ideología racionalista ni sus críticas empiristas parecieran ser muy satisfactorias para la filosofía de las matemáticas de nuestros días. Esto posee implicaciones extraordinarias para una Enseñanza de las Matemáticas que ha partido en los últimos tiempos de los paradigmas dominantes en la comprensión de las Matemáticas, y que para nadie es un secreto padece una profunda crisis.

Vamos a buscar aquí comprehensión de la ideología racionalista, y a partir de su crítica delinear una perspectiva filosófica diferente, que no cae simplemente en las formulaciones críticas del empirismo occidental.

La "Teoría de las Formas" de Platón constituye una fuente muy importante que influiría en la evolución del paradigma considerado. Para éste existía un mundo especial de "formas", de esencias de las cosas, que sólo podría ser aprehendido por la razón. El mundo de los sentidos no era verdaderamente real. Para Platón las Matemáticas eran asimiladas a un mundo de entidades universales, absolutas y eternas. Se trataba de descripciones de relaciones invariables entre entes invariables. Según él las entidades de la naturaleza y la sociedad así como la percepción empírica de las cosas se colocaban en el terreno de la apariencia y no de la esencia o realidad. La posición epistemológica de Platón era racionalista y además duramente crítica de las tendencias materialistas o empiristas de la época. Atacó de una manera sistemática la actitud de los naturalistas jónicos y especialmente al atomismo de Leucipo y Demócrito. Buscó un apuntalamiento del misticismo y las actitudes espiritualistas (comunes en las Civilizaciones del Bronce) y de todas aquellas posiciones intelectuales contrarias a la búsqueda del conocimiento a través de la práctica o de la experiencia sensorial o intuitiva. En un contexto histórico dominado por el retroceso general de Atenas (después de su derrota en las Guerras de Peloponeso), su gran erudición y su extraordinaria capacidad literaria convirtieron sus opiniones en puntos centrales de referencia de la vida intelectual griega. Si bien no produjo resultados importantes en matemáticas, se interesó tanto por ellas que ellas que exigía en su Academia el conocimiento de las mismas como requisito de admisión (en realidad se refería a la geometría). Aunque el mejor matemático de la época fue su discípulo Eudoxo, sus posiciones racionalistas fueron decisivas en la comprensión y la forma de buena parte de las Matemáticas que le siguieron. Su visión debe considerarse como un auténtico obstáculo en el recurso positivo de la historia de las Matemáticas griegas (de hecho, la rigidez de la metodología platónica limitó los alcances del trabajo de Eudoxo, quien tuvo que alejarse del maestro en muchas cosas). Para Platón, además, el modelo deductivo y axiomático era esencial en las Matemáticas. Su influencia fue casi directa (a través de discípulos suyos) sobre Euclides, quien fue el director de la "Facultad de Matemática" del *Museum* de Alejandría, y su "texto" llamado *Elementos* se convertiría en el modelo a seguir en la enseñanza y evolución de las Matemáticas por muchos siglos (Körner, 1969).

Aristóteles, quien también fue discípulo de Platón, rompió considerablemente con la visión platónica. En lugar de un "mundo de Formas" o "universales" en el vacío, afirmó que los "universales" existían en las cosas reales, físicas. En partes de su obra (como en la *Biología*) adoptó una metodología de investigación empírica, que sus discípulos a través del Liceo y luego del *Museum* se encargarían de extender.

Se sugiere que Estratón realizó experimentos controlados, tal y como haría Galileo dos milenios después. Aristóteles sistematizó las bases de la lógica en su *Organom*, pero no se dedicó a las Matemáticas. Sus ideas lograron contrapesar la actitud estéril platónica en ciertas ciencias, pero en las Matemáticas el territorio quedó libre completamente. ¿Qué habría sucedido si Aristóteles hubiera enfrentado al racionalismo exagerado y axiomatismo en la reflexión platónica sobre las Matemáticas? Es difícil de saber. La realidad es que Aristóteles no rompió totalmente con Platón ni con el racionalismo. Buena parte de sus escritos rechazaban de hecho la experiencia sensorial y están cargados de categorías y recursos mentales que se juzgan verdaderos, absolutos e infalibles. Su "teoría de los universales" se puede valorar apenas como "moderada" frente a la "radical" de Platón. No será sino hasta el Siglo XVI de nuestra era con Ockam y el Nominalismo que se desarrollará una actitud más antagónica y alternativa frente a los "universales".

A pesar de la esterilidad del racionalismo platónico y su influencia en el mundo griego, se dieron trabajos como los de Apolonio de Perga y de Arquímedes de Siracusa. Apolonio dejó poco para la posteridad en el estudio de las cónicas. Arquímedes fue sin duda el mejor matemático de la antigüedad griega, y el padre de la física-matemática.

Con el Imperio Romano la civilización griega y mediterránea fue destruida casi completamente. Se suele considerar como una unidad cultural e histórica: Grecia y Roma; lo que es una visión absolutamente insuficiente para dar cuenta de aquella realidad. Lo que existió fue esencialmente la Civilización Griega, la cual fue destruida en sus rasgos esenciales por un pueblo con un mayor poderío militar: Roma. La ciencia y las técnicas fueron "congeladas" a partir del siglo II A.C. El ordenamiento político-militar de Roma y su éxito constituyeron el principal disolvente social y cultural de Grecia (que durante el período alejandrino no era una realidad homogénea). Lo que se suele llamar Feudalismo fue el resultado de la destrucción y descomposición socio-cultural que durante siglos engendró Roma. No se trataba entonces de un "modo de producción" o una organización social superior a la anterior (Marx). Si algo de la cultura clásica griega se logró salvar fue porque la parte Oriental del Imperio Romano logró ingeniárselas para subsistir (Bizancio) y a que luego el Imperio Islámico adoptó una actitud frente a la cultura clásica ciertamente positiva. En Occidente, la Edad Media se inició con la dispersión social y cultural, la miseria y el oscurantismo. Algunas partes de la cultura griega fueron conservadas por el Imperio Bizantino, y luego por los mahometanos a partir del Siglo VII D.C. No será sin embrago hasta los albores de la nueva sociedad europea (que arrancó con la Revolución Intelectual del Renacimiento-Reforma-Revolución Científica) que la cultura clásica va a ser rescatada, reelaborada y superada cuantitativamente y cualitativamente.

Aparte de Galileo y de Francis Bacon, Descartes fue uno de los grandes profetas de la nueva forma de pensar de la sociedad emergente. En 1637 publicaba su *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la verité dans les sciences,* en el que introducía una nueva variedad de racionalismo, y una metodología (de hecho trasladaba los criterios de verdad de la "correspondencia con el ser humano" a la "distinción y claridad" de las ideas). Utilizando como modelo la forma reconocida usualmente de la geometría introduce un carácter deductivo axiomático del conocimiento y de la realidad. En su "revolución cosmológica" y "revolución geométrica" la axiomática es la piedra de toque. Aunque la referencia se hace a la deducción y a la razón. En realidad se trata de contingencias en donde la intuición (de tipo espiritual y, a veces, hasta teológico) es decisiva. La "Razón" productora de verdades (y también realidades!) absolutas e inefables (alejadas de lo empírico) se refería menos a la lógica que a una "intuición" (Brunschvicg, 1981). En el esquema cartesiano (en donde las Matemáticas juegan un papel central, la *mathesis universalis*) está presente con una consideración precisa sobre la naturaleza de las Matemáticas: axiomática, deductiva, absoluta, *a priori*, infalible. A pesar, no obstante, de este nuevo racionalismo en la misma obra de 1637, como apéndice, aparece la *Geometría*. En ésta establece el resultado teórico de la época más importante previo al invento del cálculo diferencial e integral: la geometría analítica (conjunción de la geometría clásica y el álgebra, desarrollada esta última especialmente por los algebristas italianos Tartaglia, Cardano, etc.) Se puede decir que la Geometría Analítica representa una combinación teórica de la Matemática griega clásica y los resultados algebraicos renacentistas, que fueron posibles gracias al influjo que supuso la recuperación y desarrollo algebraicos por parte de los árabes.

Algún tiempo después, Leibniz (uno de los creadores del Cálculo) también asumía el racionalismo de nuevo cuño, pero hacía de la lógica su referencia más importante. Las proposiciones de las matemáticas eran verdaderas porque su negación sería lógicamente imposible. Kant más tarde va a crear una colección de categorías y de posiciones que busca dar cuenta de la naturaleza de las Matemáticas dentro del racionalismo, pero tomando en cuenta la tradición empirista que corría paralela (sobre todo en Gran Bretaña) en la sociedad moderna. Para éste las proposiciones de las Matemáticas son "sintéticas" *a priori* y no "analíticas" (Kant, 1973). Una proposición es "analítica" si no necesita para decidirse acerca de su verdad más que una indagación "conceptual", "lingüística", o incluso "lógica sencilla" (por ejemplo: "todos los solteros no son casados"). Si se requiere algo más, por ejemplo la experiencia sensorial, la proposición es "sintética". El territorio de los "sintético *a priori*" era aquí lo decisivo. Porque se trataba de proposiciones no analíticas pero no empíricas. Estas requieren algo especial que Kant llamaba "intuición espacio-temporal". Para Kant las Matemáticas no eran analíticas (con ello se contraponía a Leibniz) pero sí eran *a priori*. No apuntaba el paradigma formal-axiomatizante y deductivista, pero sí el racionalismo.

Con estos pensadores el racionalismo se estableció en la época moderna. Ya no era exactamente el mismo "platónico" o "griego" en general. Los siglos de oscurantismo y el control ideológico por parte del clero introdujeron nuevas características (por ejemplo: la reducción a primeras verdades o realidades en el nuevo racionalismo conectaba con la intervención divina). Los Siglos XVII y XVIII habían creado una base filosófica racionalista de la que partirían siglos después casi todas las reflexiones sobre la naturaleza de las Matemáticas. De hecho, este siglo es donde se desencadenó la Revolución Científica que tuvo un importante sesgo matemático. Este es el siglo no sólo de la Geometría Analítica sino también de la Teoría Elemental de Números, las Probabilidades y el Cálculo Diferencial e integral. Se trataba de una auténtica revolución en las Matemáticas que va a determinar el carácter de toda las Matemáticas de los siglos posteriores.

El racionalismo vuelve a recibir un fuerte empuje en el siglo XIX y especialmente en sus vertientes axiomático-lógico-formalizantes (Kant había afirmado una relación estrecha y dependiente entre su "intuición espacio-temporal" y la geometría euclidiana, al emerger las no euclidianas su racionalismo intuitivo se desprestigió). El motor de este empuje era el salto lógico de las mismas (durante el siglo XVII no importaba la "lógica" tanto como la "predicción" en las Matemáticas).

Con las nuevas Matemáticas se volvió importante "renovar" las posiciones sobre la naturaleza de las Matemáticas aprovechando los nuevos resultados y recursos en la vigorización de las matemáticas (Gauss, Abel, Cauchy, Weierstrass, etc.) y en el desarrollo de la lógica (Boole, De Morgan, etc.). Gottlob Frege intentó un proyecto de fundamentación de las Matemáticas: el *logicismo*. En éste buscaba reducir las Matemáticas a la lógica, a través de la teoría de conjuntos, que consideraba segura, firme. Frege era *platonista* en matemáticas, aunque su visión se manifiesta de diferentes formas en diferentes etapas de su vida (el platonismo más radical lo expresa en 1918 en su artículo "Der Gedanke") Ante la existencia de paradojas en su edificio fundamental, esta etapa *logicista* entró en crisis, abriendo lugar a un nuevo intento, esta vez dirigido por Bertrand Russell. Este invento va a desquebrajarse profundamente con la introducción necesaria de axiomas no lógicas, que minaban el sentido *logicista* de la reducción.

Frente al logismo (y porque de hecho existían visiones de partida diferentes), se dieron dos intentos fundacionales más: el *formalismo* (D. Hilbert) y el *intuicionismo* (Brouwer). El primero volvía a la intuición en contraposición con el reduccionismo analítico de Frege y Russell. Para Hilbert, todo empezaba con la intuición del signo. Por otro lado, buscaba técnicamente fundamentar la matemática demostrando su consistencia a través de métodos finitistas y constructivos. Para los intuicionistas la vuelta a la intuición también era necesaria, pero a la intuición temporal (abandonando la Kantiana espacial). Para éstos la lógica y el lenguaje eran secundarios en la construcción matemática. Supusieron además que la Ley del Tercero Excluido no era siempre correcta. Para esta corriente lo axiomático-formal y lógico no era decisivo, pero las Matemáticas seguían siendo *a priori*, infalibles y absolutas.

Desde los griegos hasta la sociedad moderna la visión racionalista sobre las Matemáticas, con énfasis en la lógica, la intuición o la sintaxis, ha sido constante en la conciencia occidental. Una colección extraordinaria de grandes matemáticos y pensadores ha asumido esa actitud filosófica. No es entonces de extrañar que gran parte de las ideas que todavía hoy en día se poseen sobre las Matemáticas estén condicionadas por el racionalismo y el esquema axiomático-formalizante. No se trata entonces de las Matemáticas. Es decir, cuando se menciona que la "gran reforma" de los años 60 en la enseñanza de las Matemáticas ha engendrado dificultades, se está planteando un asunto que apunta a la reflexión más profunda sobre las Matemáticas. Por eso mismo es que las respuestas frente a la "crisis" no pueden ser improvisaciones espontáneas ni recursos aislados de un debate general filosófico, epistemológico, histórico, pedagógico e incluso hasta político.

Frente a esta ideología tan sólidamente anclada en la historia del conocimiento, una visión "mecánica" y unilateral como la inductivista de Mill, o un convencionalismo sintáctico como el del empirismo lógico, no podrían aspirar a ser seriamente alternativas filosóficas.

Este es el panorama que ha predominado en la reflexión más generalizada sobre las Matemáticas: Un dinámico racionalismo que encuentra como oposición epistemológica a un inductivismo simplista o a un convencionalismo que libra de contenido a las Matemáticas. Se trata de un marco en donde no aparece adecuadamente una esencial referencia empírica intuitiva y, al mismo tiempo, un activo papel del sujeto epistemológico. Las matemáticas son, en mi criterio, empíricas, poseen un objeto "propio" en el mundo físico y social. Su desarrollo está en relación íntima con los objetivos y métodos vinculados al devenir de lo real (no es extraña la relación especial que ha tenido históricamente con las llamadas ciencias "naturales"). Toda metodología que intente armar intelectualmente el análisis del decurso histórico de las Matemáticas (sus avances y retrocesos, sus tendencias y, cara al futuro, sus perspectivas) debe comprender su carácter empírico. Pero entender esta naturaleza empírica no implica reducir el sujeto y la mente a meros receptáculos de la acción del objeto material (ni pensar que se reduce a la mera generalización de experiencias particulares). El resultado matemático es siempre producto de la combinación activa de componentes empíricos y mentales. Epistemológicamente: tanto el sujeto como el objeto intervienen en su configuración intelectual. La proporción en que lo hacen no es, sin embargo, definible de un amanera *a priori*. Se trata de un problema histórico y concreto. Se deben establecer entonces las líneas vectoriales que determinan en cada situación el sentido de su evolución. Una visión empírica, intuitiva y dinámica como la que sugiero encuentra sustento en una lectura adecuada de la historia de las Matemáticas.

Toda historia de las Matemáticas es en realidad una reconstrucción teórica de las mismas; implica la introducción de criterios metodológicos e interpretativos determinados. Parafraseando a Bachelard: el presente siempre ilumina el pasado. La lectura que ha predominado de la historia de las Matemáticas ha estado sometida a los esquemas racionalistas, formalistas o convencionalistas. Se suele señalar la "demostración" en Tales y Pitágoras, para pasar luego rápidamente a la "axiomática" de Euclides. Lo importante aquí son los aspectos abstractos, la demostración y la axiomática. La relación con física o las técnicas no se enfatiza. Arquímedes más bien se ve como un personaje extraño al que habría que "perdonarle" su física en tanto también hizo muy buena matemática axiomática.

Con una mentalidad filosófica diferente, de Tales y Pitágoras se valorarían mejor su relación estrecha con el nacimiento de la ciencia occidental que supuso la actitud naturalista jónica. La obra de Euclides se podría analizar especialmente como una sistematización importante de los resultados de muchísimos matemáticos previos. De Tales a Euclides se dio un período muy rico en aproximaciones y métodos matemáticos: pitagóricos, Anaxágoras, Hippias, Filolao, Arquitas, Zenón, Demócrito, Teodoro de Cirene, Eudoxo, etc. (Boyer, 1968). Es el período en el que se plantearon los problemas elementales que se basaban en los trabajos previos. Es difícil saber con certeza cuánto fue desarrollado previamente a Euclides y de qué forma. Es aceptado generalmente que la mayor parte de la obra de Euclides no fue original. Sería razonable pensar que muchos de los resultados matemáticos codificados por Euclides fueron obtenidos a través de métodos heurísticos, intuitivos y aproximativos. Si la tarea de Euclides fue la de formalización y sistematización, su obra no es tanto un reflejo iluminador de la naturaleza de la construcción matemática como de su expresión. También conocemos de la influencia que Platón tuvo en Euclides (indirectamente); y entonces de los efectos distorsionados que esto pudo suponer en su obra matemática. La ausencia de mayores elementos de información sobre la Antigüedad siempre obliga a dosis mayores de interpretación y opinión, pero creo que existe suficiente evidencia para afirmar que el modelo axiomático de *Elementos* no puede considerarse un modelo ni de la construcción matemática griega ni de las Matemáticas en general.

El caso "Arquímedes" es sin embargo, el más elocuente de lo que afirmo en el párrafo anterior. La primera señal significativa la constituye el volumen de resultados físicos y técnicos que se le reconocen. Sin duda su mente no podía estar ocupada sólo por los aspectos más abstractos y menos intuitivos de las Matemáticas.

Pero hay más. En 1906 salió a la luz lo que constituye tal vez el testimonio más importante sobre la naturaleza y métodos de la construcción matemática de la Antigüedad griega. Se trataba de un palimpsesto escrito por Arquímedes llamado *El Método*, y descubierto por el danés J. L. Heiberg en Constantinopla (Boyer, 1968). En este escrito Arquímedes revelaba su método mecánico e intuitivo con el que abordaba la construcción de sus resultados matemáticos. Las conclusiones eran inevitables: la forma axiomática de sus resultados matemáticos (y además no todos) hacían referencia a la expresión, no a la naturaleza del pensamiento matemático.

La historia del cálculo diferencial e integral es también un buen punto para el análisis de la naturaleza de las Matemáticas. Revela la importancia de la física y la intuición en la gestación de los conceptos matemáticos (el "cálculo de fluxiones" de Newton está directamente ligado a la cinemática). Newton (al igual que Arquímedes) estableció importantes resultado en física, pero además revela el papel de las nociones abstractas en la construcción matemática. La fuente inmediata anterior más básica para el trabajo de Newton fue la *Geometría* de Descartes (1637). En ella se establece la geometría analítica, que no es más que la conjunción de la geometría griega con los resultados algebraicos disponibles en el Siglo XVII (pero una revolución, a su vez). Las nociones algebraicas, menos ligadas a lo intuitiva material, intervinieron importantemente en una síntesis intelectual dinamizante como la geometría analítica, que a la vez será un punto de partida central para la creación del cálculo, Siempre en relación con el mundo (físico, social) las dimensiones más abstractas de las Matemáticas encuentran su papel. Esa combinación muy diversa y siempre distinta de elementos intuitivos y abstractos lógicos es característica de las Matemáticas.

Las Matemáticas del Siglo XIX con su abstracción y las necesidades del rigor lógico empujaron hacia el apuntalamiento del racionalismo: el Logicismo y el Formalismo (el Intuicionismo aunque racionalista es más una "reacción" *sui géneris* frente a los primeros). Hasta la década de los Treinta no se habían dado índices muy importantes de las dificultades de esta aproximación epistemológica.

En 1931, sin embargo, Gödel publicó su famoso "Sobre Sentencias Formalmente Indecidibles de *Principia Mathematica* y Sistemas Afines". Sus resultados implican que cualquier formalismo, suficientemente fue para expresar la teoría elemental de números, es incompleta (Gödel, 1981). La conclusión: las Matemáticas no pueden ser formalizadas de manera absoluta, y, además en las partes formalizables no es posible garantizar la consistencia. Las aspiraciones de fundamentar las Matemáticas por la vía de los sistemas formales quedaban destruidas. El intento de la fundamentación, de las Matemáticas entraba en crisis. Esto resultaba en un duro golpe para el racionalismo; pero, sin embargo, no implicó un inmediato readecuamiento teórico en la filosofía de las matemáticas. Las consecuencias de los resultados gödelianos no fueron sacadas completamente. El empirismo lógico, que frente al auge constante del racionalismo, había optado por reducir las Matemáticas al lenguaje (especialmente a la sintaxis), no supo oponer una respuesta metodológica verdaderamente alternativa. A pesar de Gödel,en la reflexión de las Matemáticas las ideologías apriorísticas, axiomáticas, formalistas, racionalistas o convencionalistas siguieron gobernando el panorama intelectual. A partir de los trabajos de Gödel nuevos resultados en el mismo sentido fueron obtenidos: en 1936 Gentzen ("Die Widers pruchs freiheit der reiner zahlenthorie") probó la consistencia para los enteros y algunas partes del análisis, pero a costa de introducir una inducción transfinita indeseada. Alonso Church en 1936 echó carbón al fuego cuando probó que no es posible en general garantizar "procesos efectivos" en la meta matemática. En 1963, Paul Cohen probó que la hipótesis del continuo y el axioma de escogencia son independientes del sistema axiomático más usado, de Zermelo, Fraenkel; lo que equivale a decir que son proposiciones indecidibles. Cualquier opción en torno al uso de estos axiomas es entonces posible y en cada una axiomáticas matemáticas diferentes. Para terminar de completar el cuadro el teorema de Skolem-Lowenheim señalando que los axiomas de un sistema no limitan los modelos posibles.

Sin embargo, después de la Segunda Guerra Mundial, con la renovación de la producción tecnológica y las exigencias aplicadas a la ciencia, las Matemáticas reales se han desarrollado por derroteros exigentes de una actitud concreta e intuitiva frente a ellas. El curso de las mismas Matemáticas en las pasadas décadas se ha convertido entonces en el principal factor de crítica de la ideología dominante sobre las Matemáticas. Existe (aunque sólo en cierta medida) una importante brecha entre las ideologías sobre las Matemáticas y las Matemáticas concretas: entre la "conciencia" y la realidad.

Los fracasos en la enseñanza de las Matemáticas del modelo "moderno" (basado en la axiomática, las estructuras, lo formal), representan otro punto concretado histórico de crítica de la ideología anterior que sobrevive todavía. El territorio de la enseñanza de las Matemáticas es entonces un espacio central para la búsqueda de una conciencia de las Matemáticas más adecuada a su naturaleza.

Para avanzar prácticamente en esa perspectiva se requiere una orientación. A través de una adecuada lectura de la evolución de las Matemáticas es posible sugerir cómo (de manera general) abordar la nueva enseñanza de las Matemáticas. En primer lugar, está claro que es importante enfatizar siempre los aspectos concretos e intuitivos, y su relación con el mundo físico y social. La dialéctica entre lo concreto y lo abstracto debe transmitirse tomando como dirección vectorial el primer elemento de esa relación. Lo abstracto puede llegar a ocupar papeles muy decisivos en la construcción matemática, pero de manera general, sumergidos en un marco teórico vinculado al devenir físico y social (a la naturaleza y a la sociedad). La axiomática y lo formal si bien útiles en la expresión, son completamente secundarios en la construcción matemática. Los énfasis y sobrevaloraciones que se les han dado sólo han conducido a desvirtuar la naturaleza y el sentido de las matemáticas.

Por otra parte, consecuencia de lo anterior, es necesario introducir énfasis en la utilidad de las Matemáticas. También en su relación con las demás ciencias.

En los últimos años se ha empezado a considerar que a mejor forma de integrar la auténtica dimensión empírica e intuitiva, así como transmitir su verdadera naturaleza (en la que también interviene la dimensión "abstracta"), es a través de la historia de las Matemáticas. No solamente como recurso didáctico de motivación (lo cual se podría reducir a la anécdota), sino especialmente, como estructuradora de la enseñanza de conceptos. El orden conceptual histórico es a veces la clave para transmitir la esencia de las nociones y los resultados matemáticos. Reconstruyendo cómo fue la evolución concreta del pensamiento matemático su enseñanza puede facilitarse sustancialmente. La historia puede servir entonces como criterio a la hora de decidir cómo se aborda un tema o incluso sobre qué cantidad de álgebra es necesaria para abordar un problema geométrico (o viceversa). Es claro que no se puede seguir el orden histórico. El orden lógico-deductivo debe introducirse también. De lo que se trata es de encontrar un auténtico equilibrio entre ambos.

La crisis latente o innegable de la enseñanza de las Matemáticas modernas puede ser el factor decisivo para motivar cambios en la filosofía dominante de las Matemáticas. Los resultados obtenidos en esa dirección, fusionados con esclarecedores saltos teóricos como los teoremas de Gödel, en los Treinta, pueden dotarnos de los elementos necesarios para la edificación de una nueva conciencia intelectual sobre las Matemáticas que supere entre otras cosas la contraposición (tantas veces estéril) del Racionalismo y el Empirismo. Se trata de un reto.

Referencias y bibliografía

Bell, E. T. (1949). *Historia de las Matemáticas*. Trad. R. Ortiz, México: Fondo de Cultura Económica.

Boyer, C. (1968). *A History of Mathematics*. New Cork: John Wiley and Sons, Inc. 1968.

Brunschvicg, L. (1981). *Les Ètapes de la philosophie mathematique*. París: A. Blanchard.

Gödel, K. (1981). *Obras Completas*. Trad. Jesús Mosterín, Madrid: Alianza.

Kant, M. (1973). *Crítica de la Razón Pura*. Trad. José del Perojo. Buenos Aires: Losada.

Körner, S. (1969). *Introducción a la Filosofía de la Matemática*. Trad. Gerhard. México: Siglo XXI.

Ruiz, A. (1985, diciembre). Implicaciones teórico-filosóficas del Teorema de Gödel en el Paradigma racionalista de la reflexión sobre las Matemáticas. *Revista de Filosofía de la Universidad de Costa Rica*.